

YLIOPPILASTUTKINTO 28.9.1990 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 2, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Määritä yhtälön $(1 + x + \sqrt{x})(1 + x - \sqrt{x}) = 1$ reaaliuuret.
 b) Tuotteen A hinnasta on 17 % liikevaihtoveroa. A :n hinta ilman liikevaihtoveroa on 120 mk. Mikä on A :n verollinen hinta?
2. a) Määritä funktion $f: f(x) = e^x - x$ pienin arvo.
 b) Ratkaise yhtälöpari $x + ay = 2$, $x + y = 0$. Millä a :n arvoilla yhtälöparilla ei ole ratkaisua?
3. Laske $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \cos x dx$.
4. Kolmion sivut ovat 2, 4 ja 5. Määritä kolmion suurin kulma $0,1^\circ$ tarkkuudella.
5. Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{1 - 2x} \geq 1 - x$.
6. Määritä kahden desimaalin tarkkuudella luku a , jolle $\int_0^a e^{ax} dx = 1$.
7. a) Määritä vektori, joka saadaan kiertämällä vektoria $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ origon ympäri 45° positiiviseen suuntaan.
 b) Laske käyrän $y^2 = (e^x - 1)(e - e^x)$ pyörähtäessä x -akselin ympäri syntyvän pyörähdysskappaleen tilavuus.
8. a) Rasia, jonka koko on $25 \times 25 \times 5$ cm³, sisältää 25 palloa, joiden halkaisija on 5,0 cm. Kohtisuoraan rasian kannen läpi työnnetään terävä neula 2,0 cm syvyyteen. Mikä on todennäköisyys, että neula osuu palloon?
 b) Puistossa on kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa käytävää sekä koirien suosima puu, jonka etäisyys toisesta käytävästä on 60 m, toisesta 100 m. Käytävien väliin on muodostunut lyhin mahdollinen suora oikopolku, joka sivuaa puuta. Minkä kulman tämä oikopolku muodostaa puuta lähempänä olevan käytävän kanssa?
9. Todista oikeaksi kaava $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$ ja laske sen avulla $\int_0^\pi \sin^4 x dx$.
10. a) Funktio f määritellään kaavalla $f(x) = x + \sin x$. i) Osoita, että f on aidosti kasvava. ii) Määritä käänteisfunktion derivaatta $(f^{-1})'(\frac{3\pi - 2}{2})$.
 b) Lipputangon, jonka poikkileikkauksen halkaisija on 20 cm, ympäri on kierretty maasta huippuun ulottuva naru, joka nousee 60° kulmassa ja kiertää tangon 12 kertaa. Mikä on narun pituus? Mikä on lipputangon korkeus?