YLIOPPILASTUTKINTO 27.9.1989 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 6, 7, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).
*:llä merkityt tehtävät eivät kuulu oppimäärän keskeisiin alueisiin.

1. a) Määritä yhtälön $(1+x^2)^3 = 1$ reaalijuuret.

   b) Tavaran hinta nousi kahdesti peräkkäin p %. Tällöin hinnan kokonaislisäys oli 22,1 %. Määritä p.

2. Määritä ympyrän $x^2+x+y^2=0$ keskipiste ja säde sekä pisteen (1,2) etäisyys ympyrästä.

3. Ratkaise yhtälö $\sin x \cos x = 1/2$.

4. Osoita, että polynomilla P: $P(x) = x^2-(a^2+2)x+a^2 = 0$ $(a \neq 0)$ on nollakohta välillä $]0,2[$.

5. Osoita, että funktio f: $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$ on aidosti kasvava koko $\mathbf{R}$:ssä.

6. a) Laske integraalien $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ ja $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$ summa ja erotus sekä niiden avulla I_1 ja I_2.

   b) Vene, jonka nopeus tyynessä vedessä on 10 km/h, kulkee eräässä joessa 5 km:n matkan myötävirtaan 3 minuuttia nopeammin kuin vastavirtaan. Määritä joen virtaamisnopeus (km/h).

7. a) Kauppias on todennut myyvänsä kuukaudessa 15 kg vähemmän kahvia jokaista markan suuruista kilohinnan korotusta kohti. Millä kilohinnalla kahvi olisi myytävä, jotta voitto olisi mahdollisimman suuri, kun 50 mk:n kilohintaa vastaa 500 kg:n kuukausimyynti ja kauppiaan kustannukset kahvikiloa kohti ovat 30 mk ?

   b) Pisteestä $(-2,0)$ lähtevä vektori $\overline{v}$ muuttuu siten, että sen kärki piirtää ympyrän $x^2+y^2=16$. Minkä käyrän piirtää tällöin vektorin keskipiste?

8. Määritä käyrän $y=\sqrt{1-x}$ pisteeseen $(-1,\sqrt{2})$ piirretyn tangentin yhtälö ja osoita, että käyrä koko määritysjoukossaan (sivuamispistettä lukuun ottamatta) on tämän tangentin alapuolella.

9. a) Jos x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ ovat normaalijakautumaa noudattavia satunnaismuuttujia, joiden keskiarvot ovat μ_i ja keskihajonnat σ_i, niin myös $x_1+\ldots+x_n$ on $N(\mu,\sigma^2)$, missä $\mu=\mu_1+\ldots+\mu_n$ ja $\sigma^2={\sigma_1}^2+\ldots+{\sigma_n}^2$. Ratkaise tämän nojalla seuraava ongelma: Pussissa on 23 makeista. Makeisten paino on normaalisti jakautunut, keskiarvo on 2,1 g ja keskihajonta 0,25 g. Mikä on todennäköisyys, että pussissa olevat makeiset yhteensä painavat yli 50 g ?

   b) Määritä yhtälön $x^{1000} = x(2x)^{500} - 2^{998}x^2$ reaalijuuret.

10. a) Neliöön on piirretty r-säteinen puoliympyrä, jonka jänne $(2r)$ on neliön lävistäjän suuntainen. Kuinka monta prosenttia neliön alasta vähintään jää puoliympyrän ulkopuolelle?

    *b) Positiivisen funktion f kuvaajan $y=f(x)$ väliä $[0,t]$ vastaavan osan pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy pyörähdyskappale, jonka tilavuus kaikilla t:n positiivisilla arvoilla on $\pi[f(t)^2 - f(0)^2]$. Määritä f, kun $f(2)=1$.