YLIOPPILASTUTKINTO 16.9.1983 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 3, 4, 5 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske $\int_{1/2}^{1} (x - x^{-1})^2 dx$.

2. Määritä vakiot A ja B siten, että funktio f: $f(x) = Ax + B\cos \pi x$ toteuttaa ehdot $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = 0$.

3. a) Ratkaise yhtälö $1 + 4\sqrt{1 - x} = 4x$.

   b) Määritä ne x:n arvot, joilla polynomifunktio $6x^3 - 7x^2 - 1$ saa saman arvon kuin arvolla $x = 1$.

4. a) Sievennä lauseke $f(x) = \dfrac{|1+x| + |3+x| + x}{x(|x| - 2)}$, kun $-3 < x < -1$, sekä määritä $\lim_{x \to -2} f(x)$.

   b) Laske $|\overline{a} + 2\overline{b}|$, kun $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$ ja $|3\overline{a} + \overline{b}| = 2\sqrt{6}$.

5. a) Todista: $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$, kun $x \neq 0$.

   b) Millä välin $[0,\pi]$ osavälillä funktio f: $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ on vähenevä?

6. Mikä käyrän $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, tangenteista rajoittaa koordinaattiakselien kanssa mahdollisimman suuren kolmion, ja mikä on tämän kolmion ala?

7. Funktio f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on parillinen (so. kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f(x)$) ja derivoituva. Osoita, että $f'(0) = 0$.

8. a) Millä t:n arvoilla origosta lähtevien vektoreiden $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{c} = t(\overline{i} + \overline{j}) + \overline{k}$ kärjet määräävät suorakulmaisen kolmion?

   b) Yhtälössä $x^2 - px + q = 0$ p ja q ovat alkulukuja, ja yhtälön juuret ovat luonnollisia lukuja. Mitkä lukuparit (p,q) voivat esiintyä yhtälössä ja mitkä ovat vastaavat juuret?

9. Todista: $e^x + e^{-x} - 2 - x^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

10. Millä a:n arvolla käyrä $y = 2\cos ax$ $(a > 0)$ jakaa suorien $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ ja $y = -1$ rajoittaman neliön kolmeen yhtäsuureen osaan?