YLIOPPILASTUTKINTO- LAUTAKUNTA | 27.09.2002 | MATEMATIIKAN KOE PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Eräät tehtävät sisältävät useita osia [merkittynä **a)**, **b)** jne.], jolloin kaikkien kohtien käsittely kuuluu tehtävän täydelliseen suoritukseen.

1. Suorat $y = 2x$, $y = -\frac{1}{2}x$ ja $x + y = 3$ rajoittavat kolmion. **a)** Määritä kolmion kärkipisteiden koordinaatit. **b)** Laske kolmion sivujen pituudet. Piirrä kuvio.

2. Vuoden 1960 jälkeen on nopeimman junayhteyden matka-aika Helsingin ja Lappeenrannan välillä lyhentynyt 37 prosenttia. Laske, kuinka monta prosenttia keskinopeus on tällöin noussut. Oletetaan, että radan pituus ei ole muuttunut.

3. Funktiolla $f(x) = Ae^x + 2Be^{-x}$ on ominaisuudet $f(0) = 1$ ja $f'(0) = 2$. Määritä kertoimet A ja B.

4. **a)** Olkoon $a \neq 0$, $b \neq 0$. Sievennä:

$$\frac{a + \frac{b^2}{a}}{b + \frac{a^2}{b}}.$$

b) Osoita, että $x^2 - y^2 = 1$, kun

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right),\ y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right),\ t \neq 0.$$

5. Suora kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta, ja vektori $2\bar{i} + 3\bar{j}$ on sen normaalivektori. Määritä pisteen $(2, 2)$ etäisyys suorasta.

6. Kolmion kulman suuruus on α ja sen vastaisen sivun pituus 5; toisen kulman suuruus on 2α ja sen vastaisen sivun pituus 8. Laske kolmion kolmannen sivun tarkka pituus ja määritä α asteen kymmenesosan tarkkuudella.

7. Säännöllisen tetraedrin $ABCD$ särmän pituus on a. Särmien DA, DB ja DC keskipisteiden kautta on asetettu taso. Laske tasosta tetraedrin sisään jäävän osan pinta-ala.

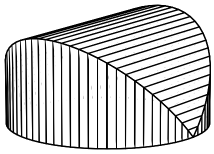
8. Suorakulmion $ABCD$ kärki A on origossa, ja sille vastakkainen kärki C on pisteessä $(6, 4)$. Kärki B on janan AC suuntaisella suoralla. Määritä suoran yhtälö, kun suorakulmion ala on mahdollisimman suuri.

9. Leena ja Sari ratkaisevat rahaa heittämällä, kumpi pääsee ensiksi ratsastamaan. Leena heittää ensiksi, ja jos tulee kruuna, hän pääsee ensiksi ratsastamaan. Jos tulee klaava, Sari heittää rahaa, ja kruunalla hän pääsee ensiksi ratsastamaan. Jos Sarikin heittää klaavan, heittovuoro siirtyy Leenalle. Näin jatketaan vuorotellen, kunnes jompikumpi saa kruunan. Millä todennäköisyydellä Leena pääsee ensiksi ratsastamaan? Entä Sari?

KÄÄNNÄ!

10. Ratkaise toisen asteen yhtälö $ax^2 + 2x + 1 = 0$, kun $|a| < 1$. Mitä raja-arvoja juuret lähestyvät, kun $a \to 0$? Miten nämä suhtautuvat arvoa $a = 0$ vastaavan yhtälön juureen?

11. Venäläisen matemaatikon Pafnuti Tšebyševin (ven. Пафнутий Чебышев) mukaan nimetyt polynomit $T_n(x)$ määritellään rekursiivisesti: $T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$; $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, kun $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mitä arvoja polynomit saavat pisteissä $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$? Laske polynomit $T_2(x)$, $T_3(x)$ ja $T_4(x)$.

12. 

Nykytaiteen museorakennuksen pohja on ympyrä, jonka halkaisija on 19,7 metriä. Jos rakennus leikataan pohjaympyrän tietyn halkaisijan suuntaisella pystysuoralla tasolla, leikkauskuvio on aina suorakulmio, jonka korkeus on puolet kannasta. Määritä rakennuksen tilavuus.

13. Mitä tarkoitetaan irrationaaliluvulla? Osoita, että $\log_2 n$ on irrationaaliluku, kun n on pariton luonnollinen luku ja $\neq 1$.

14. **a)** Laske kompleksilukujen $1-i$ ja $2+3i$ tulo. **b)** Johda lausekkeet kompleksilukujen $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$ osamäärän reaali- ja imaginaariosalle. **c)** Sovella edellisen kohdan tulosta kompleksilukujen $z_1 = 5 + i$ ja $z_2 = 1 - i$ osamäärän laskemiseen.

15. Normaalijakauman kertymäfunktio on

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Laske $\Phi(1)$ Simpsonin säännön avulla jakamalla integroimisväli **a)** neljään, **b)** kahdeksaan osaväliin. Esitä näihin laskuihin perustuva arvio tuloksen tarkkuudesta.