



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Eräät tehtävät sisältävät useita osia [merkittynä **a**), **b**) jne.], jolloin kaikkien kohtien käsittely kuuluu tehtävän täydelliseen suoritukseen.

1. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 4x + 5y = 2. \end{cases}$$

2. Olkoon $a \neq b$. Ratkaise yhtälö $(a - b)x^2 + ax + b = 0$.
3. Juna lähtee Tampereelta klo 8.06 ja saapuu Helsinkiin klo 9.58. Vastakkaiseen suuntaan kulkeva juna lähtee Helsingistä klo 8.58 ja saapuu Tampereelle klo 11.02. Matkan pituus on 187 kilometriä. Oletetaan, että junat kulkevat tasaisella nopeudella, eikä pysähdyksiin kuluvia aikoja oteta huomioon. Laske kummankin junan keskinopeus. Millä etäisyydellä Helsingistä junat kohtaavat, ja paljonko kello tällöin on?
4. Osoita, että käyrillä $x^2 - 6x - 3 + 4y = 0$ ja $2x^2 + 1 - y = 0$ on yksi yhteinen piste, jossa ne sivuavat toisiaan, so. niillä on yhteinen tangentti. Määritä tämän tangentin yhtälö.
5. Eräällä paikkakunnalla sataa 60 prosentin todennäköisyydellä, jos edellisenä päivänä on satanut; poutasään todennäköisyys on tällöin 40 prosenttia. Jos taas edellisenä päivänä on ollut pouta, sateen todennäköisyys on vain 20 prosenttia ja poudan todennäköisyys vastaavasti 80 prosenttia. Millä todennäköisyydellä ylihuomenna sataa, kun tänään on pouta?
6. Maapallon napa-alueiksi kutsutaan pohjoisen napapiirin pohjoispuolella olevaa aluetta ja eteläisen napapiirin eteläpuolista aluetta. Trooppinen alue on päiväntasaajan kummallakin puolella kääntöpiirien välissä oleva alue. Kuinka monta prosenttia napa-alueet ovat koko maapallon pinta-alasta? Entä kuinka monta prosenttia on trooppinen alue? Napapiirin leveysaste on $66,5^\circ$ ja kääntöpiirin $23,5^\circ$.
7. Osoita, että pisteiden $(2, 11\frac{1}{2}, 2)$ ja $(4, \frac{1}{2}, -1)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa pisteiden $(5, 2, 0)$, $(1, 1, 1)$ ja $(4, 1, 3)$ kautta kulkevaa tasoa vastaan.
8. Osoita y -koordinaattien erotusta tarkastelemalla, että käyrä $y = \ln(1 + e^x)$ lähenee rajattomasti suoraa $y = x$, kun $x \rightarrow \infty$.
9. Tutki, millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x - 1}{3x + 1} \right)^k$$

suppenee. Määritä summafunktio ja piirrä sen kuvaaja.

KÄÄNNÄ!

- 10.** Osa tien kaarteesta on ympyrän kaari, joka kartalla kulkee xy -koordinaatiston pisteiden $(28, 98)$, $(70, 112)$ ja $(126, 84)$ kautta. Kuinka suuri on tämän ympyrän säde, kun yksikkö kartalla vastaa 25:tä metriä luonnossa?
- 11.** Millä vakion a arvolla suorien $x = a$, $x = a+2$ ja $y = 0$ sekä käyrän $y = (x^2+x+1)^{-1}$ rajoittaman alueen pinta-ala on suurin?
- 12.** Laske sen pyörähdykappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^3 + 1$, x -akselin sekä suorien $x = 3$ ja $y = 9$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri.
- 13.** Määritellään funktiot f , g ja h seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \neq 0, \\ 1, & \text{jos } x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{jos } x \neq 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0; \end{cases} \quad h(x) = xg(x).$$

- a) Määritä $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- b) Määritä funktion g nollakohdat.
- c) Tutki, mitä arvoja funktio g saa välillä $[-0,01; 0,01]$.
- d) Määritä $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.
- e) Onko funktio h jatkuva origossa?
- f) Onko raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} f(h(x))$ olemassa? Määritä se myönteisessä tapauksessa.

Perustele vastauksesi lyhyesti.

- 14.** Selosta, millainen on yhtälön numeerisessa ratkaisemisessa sovellettava Newtonin menetelmä. Ratkaise sen avulla yhtälön $e^x + \sin x = 0$ suurin juuri viiden desimaalin tarkkuudella.
- 15.** Eräessä yhteiskunnassa elintason kasvu on kääntäen verrannollinen jo saavutettuun elintasoon, ts. mitä korkeampi elintaso on, sitä vähemmän on halukkuutta sen edelleen nostamiseen. Muodosta elintasoa kuvaava differentiaaliyhtälömalli ja ratkaise se. Onko kyseessä jatkuva elintason kasvu? Onko muutos kiihtyvää vai hidastuvaa? Lähestyykö elintaso jotakin vakiotasoa?