YLIOPPILASTUTKINTO 1.4.1981 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä $\cos 4x$, kun $\cos x = \frac{1}{2}$.

2. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} < -|x|$.

3. Määritä vakiot a ja b siten, että

$$F(x) = \int_0^x (ae^t + b)\,dt$$

täyttää ehdot $F(1) = 0$ ja $F(2) = 1$.

4. Määritä sen suoran yhtälö, joka puolittaa x-akselin ja suoran $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ välisen terävän kulman.

5. Osoita, että yhtälöllä $x - \ln x = 0$ ei ole reaalijuuria.

6. a) Laske käyrän $y^2 = x(x-2)^2$ rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala. Piirrä käyrä pääpiirteittäin.

b) Vektorit $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ ja $\bar{c} = -\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ lähtevät origosta. Laske niiden kärkipisteiden määräämän kolmion ala.

7 a) Osoita, että yhtälöllä $x^3 + x + 1 = 0$ on yksi ja vain yksi reaalijuuri. Määritä tämän juuren likiarvo 4:n desimaalin tarkkuudella ja selosta lyhyesti käyttämäsi menetelmä.

b) Määritä yhtälön $z + \bar{z}^2 = 0$ kaikki nollasta eroavat ratkaisut. Osoita, että nämä ovat tasasivuisen kolmion kärkinä kompleksitasossa.

8. Puolisuunnikkaassa on kolmen sivun pituus a. Määritä neljännen sivun pituus siten, että puolisuunnikkaan ala on mahdollisimman suuri.

9. a) S_1 on pallo, jonka keskipiste on O ja jonka säde on 1. Piste O on R-säteisen pallon S_2 pinnalla. Määritä näiden pallojen yhteisen osan tilavuus ja tämän raja-arvo, kun $R \to \infty$.

b) Arpajaisiin on hankittu 10000 arpaa, joiden joukossa on 100 voittonumeroa. Montako arpaa vähintään on nostettava, jotta todennäköisyys sille, että saataisi ainakin yksi voitto, olisi $\geq 0{,}5$?

10. Funktio f määritellään välillä $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ siten, että

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \sqrt{1 - 4x^2}\right), \text{ kun } x \neq 0, \text{ ja } f(0) = 0.$$

Määritä $f'(x)$. Millä muuttujan x arvoilla on $-1 < f(x) < 1$?