YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

19.3.2014

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

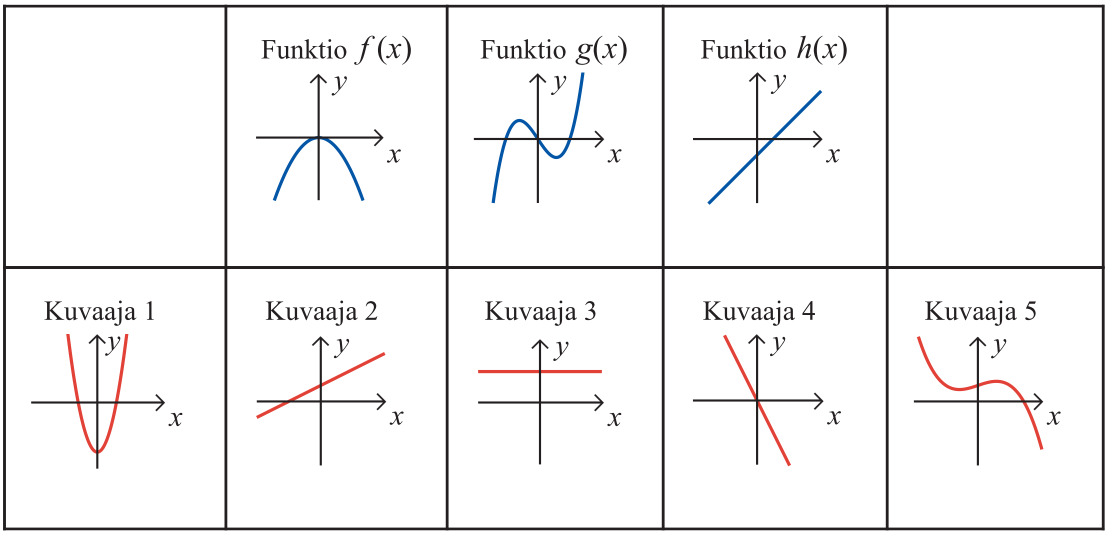
Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $7(x-3)+1=x^2-1-\left(x^2-1\right)$.

b) Millä muuttujan x arvoilla lauseke $x(5-8x)$ saa positiivisia arvoja?

c) Sievennä lauseke $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}+\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$, kun $a \neq b$ ja $a \neq -b$.

2. Taulukon ylärivissä ovat funktioiden $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$ kuvaajat. Alemmassa rivissä on viiden eri funktion kuvaajat. Näiden joukossa ovat myös derivaattafunktioiden $f'(x)$, $g'(x)$ ja $h'(x)$ kuvaajat.



Kopioi alla oleva taulukko vastauspaperiisi ja merkitse siihen, mikä kuvaajista 1–5 esittää kyseessä olevan funktion derivaattaa. Vastausta ei tarvitse perustella.

Funktio	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
Derivaatan kuvaajan numero			

3. **a)** Käyrät $y = 6x^2 + 3x^4 + \dfrac{1}{x}$ ja $y = 3x^4$ sekä suorat $x = 1$ ja $x = 2$ rajaavat tasoalueen. Laske sen pinta-alan likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

b) Määritellään funktiot $f(x) = x^3 - 3x$ ja $g(x) = \dfrac{1}{2} f(2x)$, kun $x \in \mathbf{R}$. Laske derivaatta $g'(1)$.

4. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 - 5x + 2 = 0$ on täsmälleen yksi juuri?

5. Ympyrä sivuaa suoraa $3x - 4y = 0$ pisteessä $(8,6)$. Lisäksi se sivuaa positiivista x-akselia. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

6. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja. Millä muuttujan x arvolla summa $(x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ on mahdollisimman pieni?

7. Säännöllisen tetraedrin muotoista noppaa heittämällä voi saada silmäluvuksi 1, 2, 3 tai 4. Nämä ovat kaikki yhtä todennäköisiä. Pelaaja heittää yhtä aikaa tetraedrin muotoista ja tavallista noppaa ja laskee silmälukujen summan.

a) Määritä kaikkien mahdollisten silmälukujen summien todennäköisyydet.

b) Määritä silmälukujen summan odotusarvo.

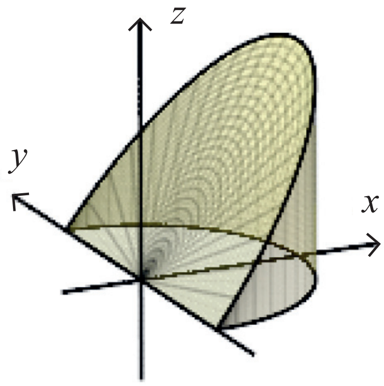
8. Lasersäteellä osoitetaan pisteestä $A(1,-2,3)$ vektorin $\overline{u} = 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$ suuntaan. Toisella säteellä osoitetaan pisteestä $B(9,-1,-12)$ vektorin $\overline{v} = -\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$ suuntaan. Näytä, että säteet leikkaavat toisensa, ja määritä niiden leikkauspiste.

9. Taso $x + 2y + 3z = 6$ leikkaa positiiviset koordinaattiakselit pisteissä A, B ja C.

a) Määritä sen tetraedrin tilavuus, jonka kärjet ovat origossa O sekä pisteissä A, B ja C.

b) Määritä kolmion ABC pinta-ala.

10. Juustoa myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa. Lieriön korkeus on h ja sen pohjan säde on r. Juusto leikataan ensin pystysuorassa suunnassa kahteen yhtä suureen osaan. Toisesta puolikkaasta leikataan vinosti kuvion osoittama pienempi pala, jonka korkeus on h. Laske tämän juustonpalan tilavuus integroimalla.



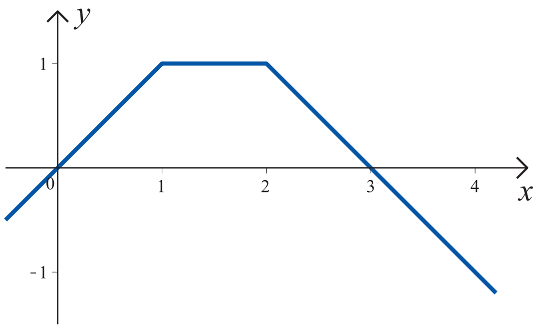
<http://www.valio.fi/tuotteet/juustot/valio-oltermanni>. Luettu 12.3.2013.

11. Alla on funktion f derivaattafunktion kuvaaja $y = f'(x)$. Lisäksi funktio f toteuttaa ehdon $f(0) = 0$.

a) Kirjoita derivaatan $f'(x)$ lauseke paloittain määriteltynä funktiona välillä $0 \le x \le 4$.

b) Muodosta funktion $f(x)$ lauseke paloittain määriteltynä välillä $0 \le x \le 4$.

c) Määritä funktion f suurin ja pienin arvo välillä $0 \le x \le 4$.



12. Funktion $f(x)$ derivaatan likiarvoja pisteessä x_0 voidaan laskea lausekkeen

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

avulla, kun $h > 0$ on pieni. Oletetaan, että $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0{,}5$ ja $h = 10^{-p}$, kun $p = 3, \ldots, 10$. Mikä näistä p:n arvoista antaa parhaan likiarvon luvulle $f'(x_0)$? Tehtävässä muuttujan x yksikkö on radiaani.

13. Tarkastellaan positiivisia kokonaislukuja n ja k, joille

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k)=1007.$$

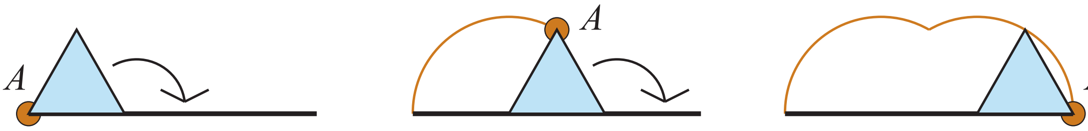
a) Osoita, että tällaiset luvut n ja k toteuttavat yhtälön $(k+1)(2n+k)=2014$.

b) Määritä luvun 2014 kaikki alkutekijät.

c) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n ja k, jotka toteuttavat a-kohdan yhtälön.

***14.** Erään tarinan mukaan ihmiskunta kokeili liikkumista säännöllisten monikulmioiden avulla, ennen kuin pyörä keksittiin.

a) Tasasivuinen kolmio kiertyy oikealle kuvion mukaisesti, kunnes kärki A osuu uudelleen alustaan. Kärki A piirtää kuvion mukaisen käyrän. Laske käyrän pituus, kun kolmion piiri on p. (2 p.)



b) Hahmottele vastaavat käyrät neliön ja kuusikulmion tapauksessa. Kummassakin tapauksessa monikulmio kiertyy niin monta kertaa, että vasemmalla alhaalla oleva kärki osuu uudelleen alustaan. (2 p.)

c) Laske b-kohdan käyrän pituus neliölle, jonka piiri on p. (2 p.)

d) Laske b-kohdan käyrän pituus kuusikulmiolle, jonka piiri on p. (3 p.)

***15.** Välillä $[-1,1]$ jatkuvien funktioiden f ja g skalaaritulo $f*g$ määritellään kaavalla

$$f*g=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Funktiot ovat *ortogonaaliset*, jos $f*g=0$.

a) Määritellään $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$ ja $f_2(x)=x^2$, kun $x\in[-1,1]$. Niiden avulla määritellään funktiot $g_k:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $k=0,1,2$, käyttämällä kaavoja

$$g_0(x)=f_0(x),\quad g_1(x)=f_1(x)-\frac{g_0*f_1}{g_0*g_0}g_0(x)\quad \text{ja}$$

$$g_2(x)=f_2(x)-\frac{g_0*f_2}{g_0*g_0}g_0(x)\;-\;\frac{g_1*f_2}{g_1*g_1}g_1(x).$$

Sievennä funktioiden g_1 ja g_2 lausekkeet. (4 p.)

b) Osoita, että funktiot g_j ja g_k ovat ortogonaaliset kaikilla eri indekseillä $0\le j<k\le 2$. (2 p.)

c) Olkoon $h(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Määritä vakioille a, b ja c sellaiset arvot, että funktiot h ja g_k ovat ortogonaaliset jokaisella $k=0,1,2$. (3 p.)