YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

26.03.2003

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. Sievennä lausekkeet

$$\textbf{a)}\ \sqrt{3\tfrac{3}{4}}\Big/\sqrt{1\tfrac{2}{3}}, \qquad \textbf{b)}\ \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\Big/\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right).$$

2. Tasasivuisen kolmion ympäri piirretään ympyrä, joka kulkee kolmion kärkipisteiden kautta. Kolmion sisään asetetaan toinen ympyrä siten, että se sivuaa kolmion sivuja. Kuinka monta prosenttia edellisen ympyrän ala on suurempi kuin jälkimmäisen ympyrän ala?

3. Laudan leveys on 95 mm ja pituus 1,6 m. Siitä sahataan samanpituisia paloja, jotka asetetaan rinnakkain siten, että muodostuu neliön muotoinen levy. Miten pitkä voi neliön sivu enintään olla?

4. Tilastojen mukaan eräässä pääsykuulustelussa 25 % pyrkijöistä epäonnistuu matematiikan ja 17 % fysiikan kokeessa. Pyrkijöistä 10 % epäonnistuu kummassakin kokeessa. Laske todennäköisyys, että fysiikan kokeessa epäonnistunut pyrkijä epäonnistuu myös matematiikan kokeessa. Millä todennäköisyydellä pyrkijä epäonnistuu ainakin toisessa kokeessa?

5. **a)** Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ \quad 2^x=8^y. \end{cases}$$

b) Piirrä funktioiden $\lg|x|$ ja $1/x^2$ kuvaajat samaan kuvioon ja ratkaise tämän perusteella epäyhtälö $\lg|x| \geq x^{-2}$. Etsi vastaus kahden desimaalin tarkkuudella. ($\lg = \log_{10}$)

6. Kolmion kulmille α, β ja γ pätee $\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma$. Osoita, että kolmio on suorakulmainen.

7. Suora on vektorin $3\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ suuntainen ja kulkee pisteen $(2,3,7)$ kautta. Määritä sen ja tason $x+2y+z=1$ leikkauspiste.

8. Yksikkösäteisen pallon sisällä on tilavuudeltaan mahdollisimman suuri suora ympyräpohjainen lieriö. Määritä lieriön korkeus ja pohjaympyrän säde. Laske lieriön ja pallon tilavuuksien suhde.

9. Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$, $x>3$, käänteisfunktio f^{-1}. Millä välillä tämä on määritelty? Osoita laskemalla, että $f^{-1}(f(x))=x$, kun $x>3$.

10. Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, jolla on ominaisuudet $f(0)=f(1)=0$ ja $\int_0^1 f(x)\,dx=100$.

11. Olkoon $x_0^2+y_0^2=1$. Osoita, että $x_0x+y_0y=1$ on ympyrän $x^2+y^2=1$ tangentti. Mitkä ovat sivuamispisteen koordinaatit?

KÄÄNNÄ!

12. Geometrisen jonon kolmen ensimmäisen termin summa on 3 ja kuuden ensimmäisen termin summa 12. Laske yhdeksän ensimmäisen termin summa. Suppeneeko vastaava geometrinen sarja?

13. Piste on r-säteisen pallon ulkopuolella etäisyydellä d pallon pinnasta. Kuinka monta prosenttia $p = p(r,d)$ pallon pinnasta näkyy pisteestä? Määritä $\lim_{d\to\infty} p(r,d)$. Kuinka suuri osa maapallon pinnasta näkyy 500 kilometrin korkeudella olevasta satelliitista? Maapallon säde on 6 370 km.

14. Määritä alkuarvotehtävän $y' = y^2$, $y(0) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) ratkaisu $y_a(x)$. Laske $\lim_{a\to 0} y_a(1)$.

15. Piirrä kompleksitasoon pisteet $z_k = \cos(\frac{k\pi}{4}) + i\sin(\frac{k\pi}{4})$, kun $k = 0,1,2,3,4$. Laske näiden pisteiden kuvapisteet, kun ne kuvataan funktiolla $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ ($\mathbb{C}$ = kompleksitaso). Piirrä toinen kuva kompleksitasosta ja sijoita siihen kuvapisteet.