



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Eräät tehtävät sisältävät useita osia [merkittynä a), b) jne.], jolloin kaikkien kohtien käsittely kuuluu tehtävän täydelliseen suoritukseen.

1. Tasakylkisen kolmion piiri on 15 cm. Sen kyljet ovat 1,5 cm pitemmät kuin kanta. Laske kolmion ala.
2. Lukion jazzyhtyeen konsertin tuotto 192 euroa (€) on jaettava tasan yhtyeen jäsenille. Jos jäseniä olisi 2 enemmän, jokainen saisi 8 € vähemmän. Montako jäsentä yhtyeessä on?
3. a) Sievennä lauseke $\frac{\frac{1}{x}-x}{\frac{1}{x}+1}$. b) Sievennä lauseke $\frac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}$.
c) Ratkaise tämän jälkeen yhtälö $\frac{\frac{1}{x}-x}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}$.
4. Tuoreissa omenissa on vettä 80 % ja sokeria 4 %. Kuinka monta prosenttia sokeria on samoissa omenissa, kun ne on kuivattu siten, että kosteusprosentti on 20?
5. Kaksi matkapuhelinmastoa näkyy paikkaan, jonka etäisyys toisesta mastosta on 5,27 km ja toisesta 3,16 km. Tähtäyssuunnat mastoihin muodostavat $72^\circ 50'$ suuruisen kulman. Kuinka etäällä mastot ovat toisistaan? Etäisyydet mitataan vaakasuorasti, eikä maaston mahdollisia korkeuseroja oteta huomioon.
6. Kulman kärki on pisteessä $(1, 2)$, ja pisteet $(4, 6)$, $(13, -3)$ sijaitsevat sen kyljillä. Laske kulman puolittajan suuntainen yksikkövektori.
7. Reaalilukujen joukossa määritellyn funktion f kuvaajan mielivaltaiseen pisteeseen (x, y) piirretyn tangentin kulmakerroin on $k(x) = 1 - e^{-2x}$. Funktion f pienin arvo on 2. Määritä f .
8. Puhelinkeskukseen tulevien puhelujen määrä noudattaa ns. *Poissonin jakaumaa*: todennäköisyys, että minuutissa tulee n (≥ 0) puhelua, on $p_n = \frac{a^n}{n!}e^{-a}$, jossa vakio a kuvaa keskuksen ruuhkaisuutta. Laske todennäköisyys, että keskuksen tulee minuutissa ainakin 5 puhelua, kun $a = 3$.
9. Piste P *keskusprojektiio* suoralle s projektiokeskuksena piste K määritellään pisteiden K ja P kautta kulkevan suoran ja suoran s leikkauspisteeksi (mikäli tämä on olemassa). Olkoon projektiokeskus $K = (1, 4)$ ja suora s x -akseli. Olkoon $A = (0, 1)$ ja $B = (4, 3)$. Tutki, mille x -akselin välille janan AB pisteet kyseisessä keskusprojektiiossa projisioituvat. Mihin pisteeseen projisioituu janan AB keskipiste? Jos janelle AB asetetaan jakopisteitä tasavälisesti, projisioituvatko nämä tasaväliseksi pisteistöksi x -akselille?

- 10.** Kuution jokaiselle sivutahkolla asetetaan samanlainen säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Näiden yhteinen korkeus määräytykseen siten, että kahden vierekkäisen pyramidin huiput ja vastaavien tahkojen leikkaussärmä sijaitsevat samassa tasossa. Tällöin syntyy monitahokas, jota kutsutaan *rombidodekaedriksi*. Sen sivutahkot ovat suunnikkaita, jotka muodostuvat kahdesta vierekkäisten pyramidien sivutahkosta. **a)** Laske pyramidin korkeuden ja kuution särmän pituuden suhde. **b)** Laske rombidodekaedrin sivutahkon kulmat asteen tarkkuudella. **c)** Laske rombidodekaedrin ja kuution tilavuuksien suhde.
- 11.** Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on 6,6 cm ja sivujana 11,0 cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa. Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri.
- 12.** Ovatko seuraavat väitteet tosia? **a)** Jos funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivaatta on positiivinen kaikilla muuttujan arvoilla, niin funktio kasvaa rajatta eli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. **b)** Jos funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivaatta on positiivista vakiota suurempi kaikilla muuttujan arvoilla, niin $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Perustele vastauksesi.
- 13.** Laske funktion f , $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$, derivaatta. Osoita, että käyrän $y = e^{-x} \sin x$ ja x -akselin alueessa $x \geq 0$ rajoittamien alueiden A_0, A_1, A_2, \dots pinta-alat muodostavat geometrisen jonon. Laske integraali $\int_0^{\infty} |e^{-x} \sin x| dx$.
- 14.** Kesätapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sinä hetkenä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisuna hyttysten määrä mielivaltaisella hetkellä t . Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?
- 15.** Määritä Eukleideen algoritmilla lukujen 34086 ja 14630 suurin yhteinen tekijä $\text{sy}(34086, 14630)$. Esitä tämä lukujen lineaariyhdistelyä, ts. määritä kokonaisluvut a ja b siten, että $\text{sy}(34086, 14630) = 34086a + 14630b$.