YLIOPPILASTUTKINTO 26.3.1969 MATEMATIIKKA LYHYT OPPIMÄÄRÄ

1. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 2y = 5 \\ 5y - z = 1 \end{cases}$.

2. Positiivilukua x muutetaan joko a) suurentamalla sitä 3 %:lla tai b) lisäämällä siihen 15. Millä x:n arvoilla edellinen menettely suurentaa lukua enemmän kuin jälkimmäinen?

3. Pisteiden $(2, 1)$ ja $(-2, 6)$ kautta kulkeva suora ja koordinaattiakselit rajoittavat kolmion. Laske tämän kolmion pinta-ala ja hypotenuusaa vastaan piirretty korkeus (tarkka arvo).

4. R-säteisen ympyrän sisäänpiirretyn kolmion kanta yhtyy ympyrän halkaisijaan. Kantaa vastaan piirretty korkeus on $R/3$ ja kolmion pienin kulma on α. Määrää lausekkeen $\tan\alpha$ tarkka arvo.

5. Osoita, että yhtälön $(m+1)x^2 - m^2(m-1)x + (m-1)^3 = 0$ juuret voidaan kirjoittaa muotoon $x_1 = (m-1)^2$ ja $x_2 = \frac{m-1}{m+1}$ aina, kun $m \neq -1$. Millä m:n arvoilla yhtälöllä on a) kaksi erisuurta reaalijuurta, b) kaksoisjuuri (= yhtyneet reaalijuuret)?

6. Näytä, että jos $x > 1$, niin lauseke
$$(1 - 2x^2)^2(1 - x) + x - 1$$
on negatiivinen. Minkä merkkinen lauseke on, kun $x = 1/2$?

7. Kannan suuntainen suora jakaa kolmion kyljet huipusta lukien suhteessa $3 : 2$ ja kolmion alan sellaisiin osiin, joiden erotus on $35\ \text{cm}^2$. Laske koko kolmion ala.

8. Pallon sisään on piirretty mahdollisimman suuri lieriö. Määrää pallon ja lieriön tilavuuksien suhde. Perustelut.

9. Mitä arvoja funktiot a) $y = f(x) = (x-1)^2$ ja b) $y = g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ saavat, kun x on välillä $0 \leqq x \leqq 3$, mutta $x \neq 1$? Millä x:n arvoilla on $f(x) = g(x)$?

10. Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ sivuaa suoraa $y = 2x - 2$ pisteessä $(3, 4)$. a) Lausu kertoimet b ja c kertoimen a avulla. b) Kun a muuttuu, saadaan eri paraabeleja. Millä suoralla ovat näiden paraabelien huiput? Piirrä samaan kuvioon suorat sekä paraabelit, joissa $a = \pm 1$.

11. Funktion $f(x)$ eräs integraalifunktio on $2 - x^2$. Mikä on se integraalifunktio, jonka kuvaaja yhdessä x-akselin kanssa rajoittaa alueen, jonka ala on $= 4\frac{1}{2}$?

12. Eräästä suorituksesta annettiin sadalle henkilölle pisteitä 1‥10 seuraavasti:

Pistemäärä	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lukumäärä	3	2	7	14	16	15	12	9	12	10

Esitä pistemääräjakautuma graafisesti. Mitkä ovat jakautuman a) tyyppiarvo, b) mediaani, c) kvartiilit?

1. R-säteisen ympyrän sisäänpiirretyn kolmion kanta yhtyy ympyrän halkaisijaan. Kantaa vastaan piirretty korkeus on $R/3$, ja kolmion pienin kulma on α. Määrää lausekkeen $\tan\alpha$ tarkka arvo.
2. Funktiosta $f(x)$ oletetaan, että $f'(x) = \sin 2x$ ja $f(\pi/4) = 1$. Laske $f(\pi/2)$.
3. Päättymättömällä lukujonolla $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ on äärellinen raja-arvo. Mistä luvun n arvosta alkaen u_n poikkeaa tästä raja-arvosta vähemmän kuin 0,001 ?
4. Ratkaise jompikumpi seuraavista tehtävistä:
   a) Osoita, että suoran katkaistun ympyräkartion vaippapinta on aina suurempi kuin sen pohjien erotus.
   b) Kolmion kahtena sivuna ovat vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$. Niiden yhteisestä alkupisteestä on piirretty kolmion kulman puolittajana oleva vektori, jonka kärki on kolmion piirillä. Määrää tämän vektorin lauseke.
5. Osoita, että tasossa on kaksi pistettä, jotka ovat yhteisiä kaikkia eri k:n arvoja vastaaville ympyräviivoille
   $$x^2 + y^2 + kx - ky - 1 = 0 .$$
   Mitkä ovat nämä pisteet?
6. Millä z:n arvoilla lauseke $z\bar{z} + 2z + 3\bar{z} + i$ saa reaalisen arvon? Milloin erityisesti tämä arvo on 1 ? [$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, x, y reaalilukuja.]
7. Piste P liikkuu pitkin x-akselia negatiiviseen suuntaan tasaisella nopeudella v_1 ja piste Q pitkin y-akselia negatiiviseen suuntaan tasaisella nopeudella v_2. Hetkellä $t = 0$ piste P on kohdassa $(a, 0)$ ja piste Q kohdassa $(0, b)$, a ja $b > 0$. Millä hetkellä välimatka PQ on lyhin? Mikä on tämä lyhin välimatka?
8. Mitä tarkoitetaan rationaaliluvulla? - Oletetaan, että reaaliluku x ei ole rationaaliluku. Osoita, että tällöin ei myöskään $\frac{2+x}{3-x}$ ole rationaaliluku.
9. Pisteiden A ja B koordinaatit ovat $(1, 0)$ ja $(t, 0)$, $t > 1$. Piste C sijaitsee positiivisella y-akselilla siten, että kulma $ACB = \alpha$ on mahdollisimman suuri. Määrää t siten, että mainittu α:n suurin arvo on 45°.
10. Integraalin $\int_0^1 |x - t|\,dx$ arvo on t:n funktio. Piirrä tämän funktion kuvaaja. Mikä on integraalin pienin arvo?
11. Määrää ne käyrät, joilla y-akseli puolittaa normaalin sen osan, joka on käyrän ja x-akselin välissä. Piirrä se ratkaisuparven käyrä, joka kulkee pisteen $(0, 4)$ kautta.
12. Todennäköisyys sille, että koripallossa vapaaheitto onnistuu, arvioidaan 80 %:ksi. Laske todennäköisyys sille, että viidestä vapaaheitosta vähintään kolme onnistuu.

YLIOPPILASTUTKINTO 8.9.1969 MATEMATIIKKA, LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Eräs positiivinen luku k korotettuna potenssiin 12 antaa luvun 8. Mihin potenssiin luku k olisi korotettava, jotta saataisiin 1/4?
2. Osoita, että jos $a < b$, niin $a < \frac{2a+5b}{7} < b$.
3. Millä x:n arvoilla funktio
$$f(x) = x^4 + 8x^3 - 14x^2$$
kasvaa?
4. Lukujoukkoon, jossa on 250 lukua, joiden keskiarvo oli 20, liitettiin joukko lukuja, joiden keskiarvo oli 30. Montako liitettävää lukua sai enintään olla, kun keskiarvo ei noussut yli 24:n?
5. Tasasivuisen kolmion korkeusjana halkaisijana piirretään ympyrä. Saatu kuvio pyörähtää korkeusjanan ympäri, jolloin muodostuu pallo ja kartio. Kuinka suuri osa kartion vaipasta on pallon ulkopuolella?
6. Laske sen kolmion ala, jota rajoittavat paraabelin
$$y = -x^2 - 2x$$
pisteeseen (- 2, 0) piirretty tangentti ja normaali sekä paraabelin akseli. Kuvio.
7. Koordinaatistoon piirretystä murtoviivasta OABC tiedetään janojen pituudet: OA = 2,5 cm, AB = 4,0 cm ja BC = 5,0 cm sekä janojen suuntakulmat: OA: $+40^\circ$, AB: -25° ja BC: $+50^\circ$. Laske janan OC pituus (0,1 cm:n tarkkuudella) ja suuntakulma (1°:n tarkkuudella).
8. Kolmiossa ABC on kulma $B = 45^\circ$ ja $AB : BC = 1 : 3$. Laske korkeusjanan CD ja keskijanan CE välinen kulma.
9. Määrää paraabelin
$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$
sen tangentin yhtälö, joka on paraabelille pisteeseen (4, 3) piirretyn normaalin suuntainen.
10. Olkoon
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 2$$
ja $f'(x)$ sen derivaatta. Muodosta funktio
$$g(x) = f(x) - f(1) - f'(1)(x - 1)$$
ja piirrä sen kuvaaja. Missä kulmassa käyrä $y = g(x)$ leikkaa x-akselin?
11. Millä x:n arvoilla funktio $y = 2 + 4\cos 5x$ a) kasvaa, b) saa arvon 0?
12. Muuttuja X noudattaa normaalijakautumaa siten, että keskiarvo $\mu = 0$ ja hajonta $\sigma = 1$. Tällöin X on välillä $-1 \leqq X \leqq +1$ todennäköisyydellä 0,68 ja välillä $-2 \leqq X \leqq +2$ todennäköisyydellä 0,95. Millä todennäköisyydellä X on välillä a) $+1 \leqq X \leqq +2$, b) $X \geqq 2$?

YLIOPPILASTUTKINTO 8.9.1969 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Suora $2x + 3y = 1$ ja koordinaattiakselit rajoittavat kolmion. Määrää luku m siten, että suora $y = mx$ puolittaa tämän kolmion alan.
2. Kahden pallon säteiden summa on a ja pinta-alojen erotus πa^2. Määrää pallojen säteet.
3. Osoita, että funktio $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ kaikilla x:n arvoilla toteuttaa yhtälön $y'' = -4y$, olivatpa A ja B mitä vakioita hyvänsä. Määrää A ja B siten, että $y(0) = 2$ ja $y'(0) = -6$.
4. Polynomi $P(x)$ jaetaan binomilla $x - a$ ja jakoa jatketaan, kunnes jakojäännös on vakio R. Osoita, että $R = P(a)$.
5. Ratkaise epäyhtälö
$$x^2 + 6 \geqq 5|x| .$$
6. Osoita, että aritmeettisen sarjan summa S_n kaikilla n:n arvoilla toteuttaa yhtälön
$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n) .$$
7. Missä tason osassa sijaitsevat ne pisteet, joiden koordinaatit x ja y toteuttavat epäyhtälöparin $x + y \geqq 0$, $x + 2y < 0$? Määrää ne tähän tason osaan kuuluvat pisteet, joiden koordinaatit x ja y ovat kokonaislukuja ja itseisarvoltaan $\leqq 3$. Kuvio.
8. Tasakylkisen kolmion kantakulma on α. Lausu kolmion sisään- ja ympäripiirrettyjen ympyröiden säteiden suhde α:n avulla. Laske suhde, kun $\alpha = \pi/4$.
9. Millä x:n arvoilla lauseke $+\sqrt{x - \sqrt{x}}$ on reaalinen? Millä arvoilla se on $= \sqrt{2}$?
10. Osoita, että
$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx ,$$
kun x on reaaliluku ja $\geqq -1$ sekä n positiivinen kokonaisluku.
11. Osoita sopivan sijoituksen avulla, että kaikilla n:n positiivisilla kokonaisarvoilla on
$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx .$$
12. Kolme noppaa heitetään yhtä aikaa. Olkoon X suurin esiintyvistä pistemääristä. Laske todennäköisyys sille, että a) $X \leqq 4$, b) $X \leqq 3$, c) $X = 4$.