YLIOPPILASTUTKINTO 27.3.1968 MATEMATIIKKA LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.

1. Määrää taulukoita käyttämättä se luku, joka korotettuna potenssiin $-3/2$ antaa tulokseksi $27/8$.

2. Johda yhtälön $x^2 + px + q = 0$ juurien lausekkeet. Millä ehdolla juuret ovat reaaliset?

3. Olkoon $a > b > 0$. Osoita, että lukujen $a + b$ ja $a - b$ käänteislukujen keskiarvo on suurempi kuin a:n käänteisluku.

4. Ympyrät C_1 ja C_2 leikkaavat toisensa kohtisuorasti. C_1 leikkaa ympyröiden keskusjanan ympyrän C_2 säteen keskipisteessä. Määrää ympyröiden säteiden suhde.

5. Millä vakion m arvoilla suorat $(1-m)x + my = 1$ ja $(2m+1)x - (m+1)y = m$ ovat a) kohtisuorassa toisiaan vastaan, b) yhdensuuntaiset?

6. Tasakylkisen kolmion ABC kannan päätepisteistä A ja B kyljille piirretyt mediaanit (keskijanat) leikkaavat toisensa pisteessä D siten, että kulma ADB on 60°. Laske kulma C.

7. Määrää funktion $y = 4x^5 - 5x^4$ ääriarvot ja piirrä sen kuvaaja.

8. Määrää derivaatan määritelmään perustuen funktion $\frac{1}{1-x}$ derivaatta, kun $x = 2$.

9. Suoran ympyräpohjaisen lieriön ja ympyräkartion pohjaympyröillä on yhteinen keskipiste. Kartion huippu on lieriön toisen pohjaympyrän keskipisteessä. Lieriön ulkopuolelle jäävän kartion osan tilavuus on = kartion ulkopuolelle jäävän lieriön osan tilavuus. Laske kartion ja lieriön pohjien säteiden suhde.

10. Osoita, että yhtälöllä $x^3 + px + 1 = 0$ $(p > 0)$ on vain yksi reaalijuuri ja että tämä on lukujen -1 ja $\frac{-1}{p+1}$ välissä.

11. Suora $y = ax$ leikkaa paraabelin $y = x^2$. Olkoon S näin syntyvän paraabelinsegmentin ala ja T sen kolmion ala, jota rajoittavat mainittu suora sekä tämän ja paraabelin leikkauspisteisiin piirretyt tangentit. Määrää suhde $S : T$.

12. Kahta noppaa heitettäessä olkoon X pistelukujen erotuksen itseisarvo. Laadi X:n jakautumataulukko ja laske jakautuman keskiarvo.

YLIOPPILASTUTKINTO 27.3.1968 MATEMATIIKKA PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.

1. Millä a:n arvoilla integraali $\int_0^a (3x^2 - 6x + 2)\,dx$ saa arvon nolla?
2. Ympyrät C_1 ja C_2 leikkaavat toisensa kohtisuorasti. C_1 leikkaa ympyröiden keskusjanan ympyrän C_2 säteen keskipisteessä. Määrää ympyröiden säteiden suhde.
3. Ratkaise epäyhtälö $2x + 1 > |x|$.
4. Polynomilla $P = x^3 + px^2 + qx + r$ on nollakohta, joka on myös sen derivaattojen P' ja P'' nollakohta. Osoita, että P on erään polynomin kuutio.
5. Tutki, onko funktiolla $x + \sin x \cos x$ ääriarvoja.
6. Muuttujalle x annetaan positiivinen lisäys a . Osoita, että funktion x^2 tällöin saama lisäys on sitä suurempi, mitä suuremmasta x:n arvosta lähdetään. Mistä x:n arvosta pitäisi lähteä, jotta lisäys a tekisi funktion arvon kaksinkertaiseksi?
7. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
   a) Nelikulmion lävistäjät ovat a ja b ja niiden välinen kulma on α . Laske nelikulmion ala.
   b) Nelikulmion lävistäjinä ovat vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$. Osoita, että nelikulmion ala on $\frac{1}{2} | \bar{a} \times \bar{b} |$.
8. Suoran ympyräkartion pohjaympyrän keskipiste on annetun suoran lieriön pohjaympyrän keskipisteessä, ja kartion huippu on lieriön toisen pohjaympyrän keskipisteessä. Määrää kartion ja lieriön pohjien säteiden suhde siten, että kartion ulkopuolelle jäävän lieriön osan ja lieriön ulkopuolelle jäävän kartion osan tilavuuksien summa on mahdollisimman pieni.
9. Määrää se funktion $f(x) = x + |x|$ integraalifunktio F, joka x:n arvolla 1 saa arvon 2 . Todenna, että $F'(0) = f(0)$. Laske $F(-2)$.
10. Osoita, että hyperbelin $y^2 = 3(x^2 - 1)$ oikeanpuoleinen haara jakaa kaikki pisteitä $(-1,0)$ ja $(2,0)$ yhdistävät ympyränkaaret suhteessa $2:1$.
11. Osoita sopivaa sijoitusta käyttäen, että
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 2x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx .$$
12. Henkilöt A, B ja C ampuvat kukin yhden laukauksen. Heidän todennäköisyytensä osua maaliin ovat 0,8 , 0,6 ja 0,4 . Mikä on todennäköisyys sille, että tasan kaksi heistä osuu maaliin?

YLIOPPILASTUTKINTO 9.9.1968 MATEMATIIKKA LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3, \qquad \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 0.$$

2. Millä niistä suorakulmaisista kolmioista, joiden kateettien summa on s, on suurin pinta-ala?

3. Todista: Jos nelikulmion kaksi vastakkaista kulmaa on toistensa suplementtikulmia, nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.

4. Suoran $2y = x + 3$ ja käyrän $y = 2x^2$ leikkauspisteisiin A ja B piirretyt ordinaatat, jana AB ja x-akseli rajoittavat nelikulmion. Laske sen ala.

5. Säännöllisen kuusisivuisen pyramidin pohjasärmät ovat a ja sivusärmät $3a$. Laske pyramidin tilavuus.

6. Ratkaise kaksoisepäyhtälö $5x - 4 \leqq x^2 \leqq 25$.

7. Määrää funktion $x^3 - 3x^2 + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $-4 \leqq x \leqq 3$.

8. Olkoon $r = \dfrac{\log a}{\log b}$ (kantaluku $k > 1$) ja $a > 1$, $b > 1$. Tutki, mihin suuntaan r muuttuu (suurenee, pienenee, pysyy muuttumatta), jos a ja b molemmat kerrotaan samalla luvulla $c > 1$.

9. Millä a:n kokonaislukuarvoilla yhtälön

$$x^2 + 2(a-1)x + 2a^2 - 1 = 0$$

juuret ovat reaaliset ja samanmerkkiset? Minkä merkkiset ne tällöin ovat?

10. Ratkaise yhtälö $|x+1| + 2|x| = 2$.

11. Määrää a (> 0) siten, että käyrän

$$y = x^3 - (2a+1)x^2 + a(a+1)x$$

ja x-akselin rajoittamien alueiden pinta-alat ovat yhtäsuuret.

12. Rahaa heitetään viisi kertaa. Mikä on todennäköisyys sille, että kruunu sattuu toisen kerran viimeisessä heitossa?

YLIOPPILASTUTKINTO 9.9.1968 MATEMATIIKKA PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.

1. Millä niistä suorakulmaisista kolmioista, joiden kateettien summa on s, on suurin pinta-ala?

2. Tasakylkisen kolmion kanta on a ja kantakulma α. Osoita, että kantaa pitkin liikkuvan pisteen etäisyyksillä kolmion kyljistä on muuttumaton summa.

3. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
   a) Laske suorien $x - 5y + 4 = 0$ ja $3x - 2y + 1 = 0$ välinen terävä kulma.
   b) Laske vektorien $\bar{a} = 5\bar{i} + \bar{j}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ välinen kulma.

4. Olkoot x_1, x_2 ja x_3 yhtälön $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ juuret. Osoita, että lausekkeella

$$\frac{1}{1 - x_1} + \frac{1}{1 - x_2} + \frac{1}{1 - x_3}$$

on reaalinen arvo.

5. Määrää

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}\right).$$

6. Osoita, että jos $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, niin ympyrät

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y - 1 = 0 \qquad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0),$$

$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y - 1 = 0 \qquad (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

leikkaavat ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ saman halkaisijan päätepisteissä.

7. Osoita, että funktio $f(x) = 1 + x - 2^x$ on positiivinen välillä $0 < x < 1$.

8. Millä a:n arvoilla integraali

$$\int_0^{\pi/a} \left(a \cos\frac{ax}{2} + \sin\frac{ax}{2} - a\right) dx$$

on $= 0$?

9. Missä tason osissa olevien pisteiden koordinaatit (x, y) toteuttavat epäyhtälön

$$|x| - |y| > 1 \ ?$$

Esitä tulos graafisesti.

10. Osoita, että yhtälöllä

$$\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$$

ei ole yhtään ratkaisua. [sin (cos x) merkitsee sen kulman siniä, joka absoluuttisessa mitassa (radiaaneissa) lausuttuna on = cos x.]

11. Käyrä $y^2 = x^2 - x^4$ pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyneen pinnan rajoittaman kappaleen tilavuus.

12. Laatikossa on viisi lappua, joista kolme on merkitty kirjaimella K ja kaksi kirjaimella O. Laput nostetaan umpimähkään toinen toisensa perästä. Mikä on todennäköisyys sille, että ne saadaan järjestyksessä KOKKO ?