

22.3.1967 MATEMATIIKKA PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Pitkän oppimäärän tehtävän 8 kolmannen sanan jälkeen on lisättävä sana positiivinen, mikä korjaus Rehtoria pyydetään tiedottamaan kokelaille koetehtävien tultua jaetuiksi.

1. Yhtälöllä $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ on yksi kokonaislukujuuri. Määrää sen kaikki juuret.

2. Suorakulmaisen särmiön yhdestä kärjestä lähtevät särmät muodostavat samasta kärjestä lähtevän lävistäjän kanssa kulmat α , β ja γ . Näytä, että

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3. Määrää se funktion

$$4 \sin x \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

integraalifunktio, joka on arvoilla $-\pi/2 < x < \pi/2$ jatkuva ja joka x :n arvolla 0 saa arvon 2.

4. Ympyröiden C_1 ja C_2 keskipisteet ovat R -säteisen ympyrän C samalla halkaisijalla. C_1 ja C_2 sivuavat toisiaan ulkopuolelta ja C :tä sisäpuolelta. Määrää C_1 :n ja C_2 :n säteiden suhde, kun näiden ympyröiden alojen summa on $3/4$ C :n alasta.

5. Ratkaise z yhtälöstä

$$\bar{z} - z = i\bar{z} + 4,$$

missä i on imaginaariyksikkö ja $z = x + iy$ ja $\bar{z} = x - iy$ sekä x ja y reaalilukuja.

6. Osoita, että suora $y - 2ax + a^2 = 0$ kaikilla a :n arvoilla on paraabelin $y = x^2$ tangenti. Osoita, että kaikkien paraabelin ulkopuolella olevien pisteiden kautta kulkee kaksi näistä tangenteista.

7. Funktiolla $x^3 + ax^2 + bx + c$ on x :n arvolla -1 ääriarvo ja funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen. Määrää a , b ja c .

8. Määrää pienin sellainen luku a , että päättymätön geometrinen sarja

$$1 + \frac{x}{2(a-x)} + \left(\frac{x}{2(a-x)}\right)^2 + \dots$$

suppenee kaikilla x :n arvoilla, jotka ovat < 4 . Millä muilla x :n arvoilla sarja tällöin suppenee?

9. Määrää lukujonon

$$\frac{2^n}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

viisi suurinta lukua. Perustelu.

10. Määrää funktion $x^2 + y^2 - xy - x - y + 1$ suurin ja pienin arvo sen xy -tasossa olevan neliön piirillä, jonka kärjet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 1)$.

11. Nousevan käyrän pisteeseen $P(x, y)$ piirretty tangenti leikkaa y -akselin pisteessä A ja suoran $y = 2$ pisteessä B siten että $AP = PB$. Määrää käyrän yhtälö, kun sen yksi tangenti on $y = \frac{1}{4}x$.

12. Seitsemän henkilön joukossa on kaksi veljestä. Joukosta valitaan umpimähkään nelihenkinen toimikunta. Mikä on todennäköisyys sille, että a) molemmat veljekset joutuvat toimikuntaan, b) vain toinen joutuu toimikuntaan?

Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.

Huom. Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely.

1. Johda kahden samassa tasossa olevan suoran kohtisuoruusehto lausuttuna kulmaker-toimien avulla.
2. Ratkaise kaksoisepähtälö $0 < x^2 + 2x < 3$.
3. Lausu a:n ja b:n avulla ${}^k \log \sqrt{18}$, kun $a = {}^k \log 2$ ja $b = {}^k \log 3$.
4. Kolmiossa ABC on kulma A 30° ja $AC:AB = 1 : (1 + \sqrt{3})$. Laske kulma B.
5. Kuinka monta prosenttia kolminumeroisista kokonaisluvuihin on sellaisia, joiden en-simmäinen ja vain ensimmäinen numero on 5 ?
6. Muuttuvan janan toisena päätepisteenä on A (-2, 2) ja sen toinen päätepiste liikkuu pit-kin suoraa $x - 2y - 3 = 0$. Johda janan keskipisteen ura. Piirrä kuvio.
7. Kolmioon ABC, jossa $AB:AC = 3:2$, on piirretty suunnikas siten, että sen yksi kulma on BAC ja lävistäjänä tämän kulman puolittaja AD. Laske suunnikkaan ja kolmion alo-jen suhde.
8. Paraabelille $y = \frac{1}{2p} x^2$ pisteeseen A, jonka abskissa on $= h$, piirretty normaali leik-kaa y-akselin pisteessä P. Määrää P:n ordinaatta sekä sen raja-arvo, kun h lähenee nollaa.
9. Määrää kertoimelle a sellainen arvo, että käyrä $y = x^3 + ax^2 + 4$ sivuaa x-akselia. Piir-rä saatua a:n arvoa vastaava käyrä.
10. Suoran ympyräkartion kärki on annetulla etäisyydellä s pallon keskipisteestä ja sen vaippapinta sivuaa pallon pintaa pohjaympyrää pitkin. Miten pallon säde on valittava, jotta kartion pohjan ala saisi suurimman mahdollisen arvon ?
11. Millä vakion k arvoilla funktio $(2k - 7)x^2 + 2x + 1$ saa kaikilla x:n reaaliarvoilla vain positiivisia arvoja ?
12. Luokassa on 3 poikaa ja 5 tyttöä. Näiden oppilaiden kesken arvotaan kaksi teatterilip-pua. Millä todennäköisyydellä toinen lipusta joutuu pojalle, toinen tytölle ?

Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.

Huom. Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely.

Huom. Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.

1. Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + py + 1 = 0 \end{cases} .$$

Millä p :n arvolla yhtälöparilla ei ole ratkaisua?

2. Kuinka monta prosenttia kasvaa kahden positiivisen luvun erotus $a - b (> 0)$, kun a kasvaa 3% ja b 2%? Millä ehdolla erotus tällöin kasvaa kaksinkertaiseksi?

3. Annetun r -säteisen ympyrän sisään on piirretty tasasivuinen kolmio sekä yhden sivun suuntainen jänne, josta puolet on kolmion sisällä. Laske jänneen pituus.

4. Suorakulmion yksi kärki on käyrällä $y = 2x - \frac{1}{3}x^2$ ja kaksi sivua on positiivisilla koordinaattiakseleilla. Laske suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

5. Todista, että osamäärän logaritmi on = jaettavan ja jakajan logaritmien erotus.

6. Säännöllisen kolmisivuisen pyramidin sivusärmät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja pohjan vastainen korkeusjana on = h . Laske pyramidin tilavuus.

7. Määrää pienin positiivinen kokonaisluku n , joka toteuttaa epäyhtälön

$$n - \sqrt{n^2 - 2} < \frac{1}{2} 10^{-3} .$$

8. Kolmioon, jonka kärkipisteet ovat $A(-2, -1)$, $B(3, 0)$ ja $C(1, 4)$, on piirretty A :n kautta suora siten, että neljäsosa kolmion alasta on suoran alapuolella. Johda suoran yhtälö.

9. Millä kantaluvun k ($\neq 0$) arvoilla yhtälö

$$k^{n+1} = k^n + k^{n-1}$$

toteutuu annettakoon n :lle mikä kokonaislukuarvo hyvänsä?

10. Määrää yhtälön $x^2 + (a^2 - 2a)x + 1 = 0$ reaalijuurien summalle suurin mahdollinen arvo.

11. Osoita, että

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} ,$$

kun $x > 1$.

12. Kahta noppaa heitetään. Laske todennäköisyys sille, että a) pistemäärien summa on vähintään 9, b) pistemäärien erotus on itseisarvoltaan vähintään 2.

Huom. Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.

1. Kolmiossa on 105° :n ja 30° :n kulmat. Suurinta kulmaa vastaavan sivun pituus on a. Määrää kolmion ala.

2. Millä a:n arvoilla yhtälöryhmällä
$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2ax - 3ay = -9 \end{cases}$$

on yksi ja vain yksi ratkaisu?

3. Jos polynomi $x^2 + px + q$ jaetaan $(x+1)$:llä, on jakojäännös 1; jos se jaetaan $(x-1)$:llä, on jakojäännös -1 . Määrää p ja q.

4. Ellipsin isoakseli on x-akselilla ja pikkuakseli y-akselilla ja ellipsin eksentrisyys $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ellipsin ja ympyrän $x^2 + y^2 = 8$ leikkauspisteet ovat neliön kärkipisteitä. Johda ellipsin yhtälö.

5. Säännöllisen pyramidin, jonka korkeus on $3R/2$, huippu ja pohjana olevan neliön kärjet sijaitsevat R-säteisen pallon pinnalla. Laske pyramidin tilavuus.

6. Määrää osamäärien
$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$$
 yhteinen arvo, kun $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 4$ ja $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1$.

7. Osoita, että eri k:n arvoja vastaavien ympyröiden

$$(k+1)(x^2 + y^2) - 4kx - 8ky - 4 = 0$$

keskipisteet ovat samalla suoralla (millä?). Millä k:n arvoilla käyrä ei ole ympyrä?

8. Suppenevan geometrisen sarjan kaksi ensimmäistä termiä ovat $\sin x$ ja $\frac{1}{\cos x} - \cos x$. Millä x:n arvoilla sarjan summalla on sama arvo kuin lausekkeella $\cos x + \sin x$?

9. Piirrä funktion $\frac{1}{2}x^2 - |x^2 - x|$ kuvaaja. Määrää tätä varten erityisesti funktion ääriarvot sekä kuvaajan ja koordinaattiakselien leikkauspisteet. Laske edelleen sen kappaleen tilavuus, joka syntyy kuvaajan x-akselin yläpuolella olevan osan pyörähtäessä x-akselin ympäri.

10. Osoita, että funktion $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ pienin arvo on 0.

11. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$$

valitsemalla $x+y$ apumuuttujaksi.

12. Kahta noppaa heitetään kaksi kertaa. Mikä on todennäköisyys sille, että toisessa heitossa saadaan pistesummaksi korkeintaan 5 ja toisessa vähintään 5?