

1. Henkilön työviikko lyheni  $p$  %, samalla kun hänen tuntipalkkansa nousi  $p$  %. Tällöin hänen viikkopalkkansa aleni 4 %. Määrää  $p$ .
2. Osoita, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden keskiarvo ei voi olla kokonaisluku.
3. Suorakulmaisen kolmion sisäänpiirretyn ympyrän ja hypotenuusan sivuamispiste jakaa hypotenuusan suhteessa 1:3. Laske kolmion pienin kulma.
4. Määrää  $a$  ja  $b$  siten, että polynomi  $2x^3 + ax^2 - 4x + b$  on jaollinen trinomilla  $x^2 + 2x - 3$ .
5. Määrää  $a$ ,  $b$  ja  $c$  siten, että paraabelin  $y = ax^2 + bx + c$  huippu on suoralla  $x = 3$  ja että se sivuaa ympyrää  $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$  pisteessä  $(1, 1)$ . Piirrä kuvio.
6. Ympyrän kaaren AB keskipisteestä P piirretty saman ympyrän jänne PC jakaa jängten AB suhteessa 1:2. Pisteestä A piirretään kolmion ABC mediaani (keskijana) AM. Todista, että kolmio ACM on tasakylkinen.
7. Kartion kärki on R-säteisen pallon keskipisteessä ja pohjaympyrä pallon pinnalla. Määrää kartion tilavuuden suurin mahdollinen arvo.
8. Määrää  $a$  siten, että  $\log_2 x = 2 \log_a x$  kaikilla  $x$ :n positiivisilla arvoilla ( $\log_a x$  merkitsee samaa kuin  ${}^a \log x$ ).
9. Muodosta funktion  $x \sqrt{1 - x^2}$  erotusosamäärä lähtien  $x$ :n arvosta 0 ja määrää tämän avulla funktion derivaatta kun  $x = 0$ .
10. Millä  $x$ :n arvoilla on  $\sqrt[3]{x} > x$ ?
11. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy paraabelien  $y = x^2$  ja  $y^2 = x$  rajoittaman alueen pyörähtäessä  $x$ -akselin ympäri.
12. Laatikossa on neljä palloa, jotka on merkitty numeroilla 1, 2, 3, 4. Siitä otetaan umpimähkään ja yhtäaikaa kaksi palloa. Olkoon  $X$  suurempi näihin merkityistä luvuista. Ilmoita  $X$ :n mahdolliset arvot, niiden todennäköisyydet sekä  $X$ :n keskiarvo.

Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta

Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely.

1. Määrää vakiot  $a$  ja  $b$  siten, että yhtälöryhmällä  $a^2x + b^2y = ax^2 + by^2 = 1$  on ratkaisu  $x = y = 1$ . Onko yhtälöryhmällä silloin muita ratkaisuja?
2. Suorakulmaisen kolmion sisäänpiirretyn ympyrän säde on  $a$  ja toinen kateetti  $3a$ . Laske toinen kateetti.
3. Laske käyrien  $y = 4 - x^2$  ja  $y = 1 - \frac{x^2}{4}$  rajoittaman kuvion ala.
4. Todista, että  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .
5. Määrää  $t$  väliltä  $0 < t < 1$  siten, että suorien  $y = t$  ja  $y = 1$  sekä paraabelin  $y = x^2$  leikkauspisteet kärkinä piirretty puolisuunnikas on mahdollisimman suuri.
6. Kolmioon, jonka sivut ovat  $a, b, c$  ja korkeusjanat  $h_a, h_b, h_c$ , piirretään sen sisällä olevasta pisteestä sivuja vastaan normaalit  $n_a, n_b, n_c$ . Todista, että suhteiden  $n_a/h_a, n_b/h_b$  ja  $n_c/h_c$  summa on 1.
7. Määrää funktion  $y = \sin 2x + 2 \sin x$  ääriarvot välillä  $(0, 2\pi)$  ja piirrä samalla välillä sen kuvaaja pääpiirtein.
8. Lukujonossa, jonka kaksi ensimmäistä lukua  $a_1$  ja  $a_2$  ovat annetut, muodostavat peräkkäisten lukujen erotukset  $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots$  geometrisen sarjan, jonka suhdeluku on  $-2/3$ . Osoita, että jonon  $n$ :s luku  $a_n$  lähenee määrättyä raja-arvoa, kun  $n$  rajattomasti kasvaa, sekä määrää tämä raja-arvo.
9. Ympyrän (säde =  $r$ ) sisäänpiirretty ympyränsektori pyörittää symmetria-akselinsa ympäri. Määrää näin syntyneen pallonsektorin suurin mahdollinen tilavuus.
10. Todista, että yhtälöllä  $1 + x \ln x = 0$  ei ole yhtään reaalijuurta.
11. Määrää differentiaaliyhtälön  $y'' + y' = x$  yleinen ratkaisu ja piirrä se integraalikäyrä, joka sivuaa  $x$ - akselia origossa.
12. Kahta noppaa heitetään yhtäaikaan. Olkoon  $X$  suurempi saaduista pisteluvuista (tai pistelukujen ollessa yhtäsuuret niiden yhteinen arvo). Ilmoita taulukon muodossa  $X$ :n jakautuma (s. o. sen eri arvojen todennäköisyydet). Laske mainitun satunnaismuuttujan keskiarvo ja keskihajonta.

Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta

Huom. Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely

1. Positiivista lukua  $a$  pienennetään  $p$  %. Kuinka monta % on saatua lukua suurennettava, jotta saataisiin jälleen luku  $a$  ?
2. Todista, että kolmion kahden sivun keskipisteiden yhdistysjana on kolmannen suuntainen ja puolet siitä.
3. Näytä, että  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1/2} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1/2} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1/2} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1/2}$  on yhtälön  $2x^2 - 5\sqrt{3}x + 6 = 0$  juuri.
4. Johda sen ympyrän yhtälö, joka kulkee origon ja pisteen  $(4, 2)$  kautta ja jonka keskipiste on suoralla  $2x - y = 0$ . Piirrä kuvio.
5. Todista, että  $x + 4y \geq 4\sqrt{xy}$ , kun  $x \geq 0$  ja  $y \geq 0$ . Milloin yhtäsuuruusmerkki on voimassa?
6. Säännöllisen kolmisivuisen pyramidin ABCD pohjasärmät ja korkeus ovat  $= a$ . Pyramidi leikataan tasolla, joka puolittaa pohjasärmät AB ja AC sekä sivusärmän AD. Laske leikkauskolmion ala.
7. Tasakylkisessä kolmiossa on kanta  $a$ , kyljet  $b$  ja korkeus  $h$  sekä  $a:h = h:b$ . Laske kolmion huippukulma.
8. Osoita, että kaikkia  $m:n$  eri arvoja vastaavilla suorilla  $(2m + 1)x + (2 - m)y - (3m + 4) = 0$  on yhteinen piste. Mikä on tämä piste?
9. Tasasivuiseseen kolmioon (sivu  $= a$ ) piirretään ensin suorakulmio ja sen jälkeen ympyrä suorakulmion erottamaan tasasivuiseseen kolmioon. Kuinka suuri on ympyrän säde silloin, kun suorakulmion ja ympyrän alojen summa on mahdollisimman suuri?
10. Piirrä funktion  $y = |x| + |2x - 3|$  kuvaaja ja määrää sitovasti perustellen funktion pienin arvo.
11. Laske niiden osien pinta-alojen suhde, joihin paraabeli  $y^2 = 2x$  jakaa ympyrän  $x^2 + y^2 = 8$  rajoittaman alueen.
12. Kahta noppaa heitetään. Mikä on todennäköisyys sille, että niiden osoittamat piste-luvut ovat joko molemmat  $\leq 4$  tai molemmat  $\geq 3$  ?

Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta

Huom. Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely.

1. Todista kolmion sivuja ja kulmia koskeva siniväittäjä.
2. Suorakulmaisen kolmion kateettien suhde on 2. Suoran kulman kärjestä piirretään korkeusjana sekä kulman puolittaja. Laske niiden ja hypotenuusan rajoittaman kolmion alan suhde alkuperäisen kolmion alaan.
3. Määrää  $p$  siten, että  $x = -1$  on yhtälön  $6x^3 + (6p + 1)x^2 - px - 2 = 0$  juuri. Mitkä ovat silloin yhtälön muut juuret?
4. Käyrän  $y^2 = x(4 - x)^2$  muodostama silmukka pyörähtää  $x$ -akselin ympäri. Laske muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuus.
5. Johda sen paraabelin yhtälö, jonka akselina on  $x$ -akseli ja johtosuorana (ohjausuorana) suora  $x = -1$  ja joka kulkee pisteen  $(-3, -2)$  kautta.
6. Millä  $x$ :n arvoilla geometrinen sarja  $1 + \frac{x}{1 - 2x} + \left(\frac{x}{1 - 2x}\right)^2 + \dots$  suppenee ja mikä on tällöin sen summa  $S(x)$ ? Piirrä käyrä  $y = S(x)$ .
7. Laske origon kautta kulkevien käyrän  $y = x^3 - 5x^2 + 7x$  tangenttien välinen kulma.
8. Kuutio leikataan tasolla, joka kulkee kuution pohjaneliön lävistäjän ja vastakkaisen neliön yhden sivun keskipisteen kautta. Laske leikkauskuvion pinta-ala, kun kuution särmä on  $a$ .
9. Suorakulmaisessa kolmiossa  $ABC$  terävän kulman  $A$  puolittajan ja sivun  $BC$  leikkauspisteen  $D$  etäisyys hypotenuusasta on puolet kateetista  $AC$ . Laske kateettien suhde. Osoita, että janan  $AD$  jokaisesta pisteestä kolmion sivuille piirrettyjen normaalien summa  $= AC$ .
10. Osoita, että yhtälöllä  $y^2 = x^2 + 2x + 2$  on kaksi ja vain kaksi kokonaislukujuuri-  
paria.
11. Määrää ne ensimmäisessä akselikulmassa kulkevat käyrät, joilla on seuraava ominaisuus: käyrän pisteestä  $(x, y)$  piirretyn ordinaatan, käyrän ja koordinaattiakselien rajoittaman alueen ala  $= \frac{1}{5}xy$  jokaisella arvolla  $x$ .
12. Kahdelle perheelle syntyy kummallekin neljä lasta. Mikä on todennäköisyys, että toiselle perheelle syntyy kolme poikaa ja yksi tyttö, toiselle taas kolme tyttöä ja yksi poika. Oletetaan, että pojan syntymisen todennäköisyys on  $1/2$ , ja että kunkin lapsen sukupuoli on riippumaton aikaisemmin syntyneiden lasten sukupuolesta.

Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen kou-  
lukurssin ulkopuolelta

Huom. Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely.