

1. Kiitojuna, jonka pituus on a , käyttää ajan t ohittaakseen samaan suuntaan kulkevan tavarajunan, jonka pituus on b ja nopeus v . Kuinka pitkä aika kuluu junien toistensa sivuuttamiseen niiden kulkiessa vastakkaisiin suuntiin? (Ohittamis- samoin kuin sivuuttamisaika on se aika, jonka kuluessa junat ovat ainakin osittain vierekkäin.)
2. Ympyrän säteet jakavat kehän kahteenkymmeneen yhtä suureen osaan. Erään säteen päätepisteestä A piirretään normaali AB viereiselle säteelle, sen kantapistestä B edelleen normaali BC lähinnä seuraavalle säteelle jne. Kuinka monta prosenttia päättymättömän murtoviivan $ABC\dots$ pituus on suurempi tai pienempi kuin ympyrän kehän pituus? (Kahden desimaalin tarkkuus.)
3. Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 + 4ax + 2 = 0$ juuret ovat reaaliset ja positiiviset sekä niiden positiivinen erotus < 1 ?
4. Johda origon kautta käyrälle $y = 3x - (x^2)/2$ piirrettyjen normaalien yhtälöt. Piirrä kuvio.
5. Johda pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$.
6. Ympyröiden O_1 ja O_2 leikkauspisteiden A ja B kautta piirretään kaksi suoraa, jotka leikkaavat ympyrän O_1 samassa pisteessä P ja ympyrän O_2 pisteissä C ja D . Todista että jänne CD on yhdensuuntainen O_1 -ympyrän pisteeseen P piirretyn tangentin kanssa. Käsittele erikseen ne tapaukset, jolloin P on ympyrän O_2 ulkopuolella tai sisäpuolella.
7. Tasakylkisen kolmion ABC (kylki = a) kantasuora kääntyy kannan AB keskipisteen ympäri, jolloin pisteet A ja B siirtyvät huippukulman C kylkiä pitkin pisteisiin A_1 ja B_1 siten, että kolmion ala kasvaa kaksinkertaiseksi. Laske kolmion A_1B_1C sivujen A_1C ja B_1C summa.
8. Neliöpohjaisen pyramidin muotoisen teltan runkona on neljä telttakeppiä, joista jokaisen pituus on a . Laske teltan suurin mahdollinen tilavuus.
9. Millä x :n arvoilla $\left| \frac{\cos 2x}{\sin(45^\circ - x)} \right| < 1$?
10. Laske sen kuvion ala, jota rajoittavat paraabeli $2y = x^2$ sekä paraabelin polttopisteen ja pisteen $(2, 2)$ kautta kulkeva suora. Piirrä kuvio.

1. Kiitojuna, jonka pituus on a , käyttää ajan t ohittaakseen samaan suuntaan kulkevan tavarajunan, jonka pituus on b ja nopeus v . Kuinka monta prosenttia kiitojunan nopeus on suurempi kuin tavarajunan? (Ohittamisaika on se aika, jonka kuluessa junat ovat ainakin osittain vierekkäin.)
2. Suorakulmion kolmen sivun summa on 10 cm. Laske alan suurin arvo ja perustelee ääriarvon laatu.
3. Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 + 4ax + 2 = 0$ juuret ovat reaaliset ja positiiviset?
4. Johda käyrän $y = x - x^2$ sen normaalin yhtälö, jonka kulmakerroin on $1/3$. Piirrä kuvio.
5. Todista kaava $\sqrt{\frac{m}{n}a} = \frac{m}{n}\sqrt{a}$, kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja.
6. Ympyröiden O_1 ja O_2 leikkauspisteiden A ja B kautta piirretään kaksi suoraa, jotka leikkaavat ympyrän O_1 samassa pisteessä P ja ympyrän O_2 pisteissä C ja D . Todista, että jänne CD on yhdensuuntainen O_1 -ympyrän pisteeseen P piirretyn tangentin kanssa.
7. Kulman A puolittajan erään pisteen kautta piirretään kaksi suoraa. Toinen muodostaa A :n kylkien kanssa tasakylkisen kolmion ABC , toinen kolmion ADE , jonka sivu $AD = 2AB$. Laske kolmioiden ABC ja ADE alojen suhde.
8. Kuution avaruuslävistäjän jakaa sen normaalitaso suhteeseen $1 : 5$. Mihin suhteeseen tämä taso jakaa kuution tilavuuden?
9. Kolmen pisteen koordinaatit ovat $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ ja $C(5, 4)$. Laske kulman BAC sinin ja cosinin tarkat arvot sekä kulman suuruus.
10. Ratkaise yhtälöpari $2x - y^2 = 10$, $\log x^2 - \log y^2 = 1$. (Logaritmit ovat Briggsin järjestelmän logaritmeja.)

- jesteimän logaritmeja.)
10. Ratkaise yhtälöpari $2x - y^2 = 10$, $\log x^2 - \log y^2 = 1$. (Logaritmit ovat Briggsin järjestelmän logaritmeja.)
 9. Kolmen pisteen koordinaatit ovat $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ ja $C(5, 4)$. Laske kulman BAC sinin ja cosinin tarkat arvot sekä kulman suuruus.
 8. Kuution avaruuslävistäjän jakaa sen normaalitaso suhteeseen $1 : 5$. Mihin suhteeseen tämä taso jakaa kuution tilavuuden?
 7. Kulman A puolittajan erään pisteen kautta piirretään kaksi suoraa. Toinen muodostaa A :n kylkien kanssa tasakylkisen kolmion ABC , toinen kolmion ADE , jonka sivu $AD = 2AB$. Laske kolmioiden ABC ja ADE alojen suhde.
 6. Ympyröiden O_1 ja O_2 leikkauspisteiden A ja B kautta piirretään kaksi suoraa, jotka leikkaavat ympyrän O_1 samassa pisteessä P ja ympyrän O_2 pisteissä C ja D . Todista, että jänne CD on yhdensuuntainen O_1 -ympyrän pisteeseen P piirretyn tangentin kanssa.
 5. Todista kaava $\sqrt{\frac{m}{n}a} = \frac{m}{n}\sqrt{a}$, kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja.
 4. Johda käyrän $y = x - x^2$ sen normaalin yhtälö, jonka kulmakerroin on $1/3$. Piirrä kuvio.
 3. Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 + 4ax + 2 = 0$ juuret ovat reaaliset ja positiiviset?
 2. Suorakulmion kolmen sivun summa on 10 cm. Laske alan suurin arvo ja perustelee ääriarvon laatu.
 1. Kiitojuna, jonka pituus on a , käyttää ajan t ohittaakseen samaan suuntaan kulkevan tavarajunan, jonka pituus on b ja nopeus v . Kuinka monta prosenttia kiitojunan nopeus on suurempi kuin tavarajunan? (Ohittamisaika on se aika, jonka kuluessa junat ovat ainakin osittain vierekkäin.)
- YLIOPIPILASTUTKINTO 6. 4. 1964 MATEMATIIKKA LYHYT OPPIMÄÄRÄ

YLIOPPILASTUTKINTO 8.9.1964 MATEMATIIKKA LYHYT OPPIMÄÄRÄ

1. Erään viraston henkilökunnasta erosi vuoden aikana $p\%$ ja uusia otettiin niin monta, että heitä oli vuoden lopussa $q\%$ silloisesta henkilökunnasta. Kuinka monta prosenttia viraston henkilöluku oli muuttunut vuoden kuluessa?

2. Sievennä yksinkertaisimpaan muotoonsa lauseke

$$\sqrt{5} \cdot \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right]$$

3. Osoita, että $\sqrt{2x} \leq 1 + \frac{x}{2}$, kun $x \geq 0$. Milloin yhtäsuuruusmerkki on voimassa?

4. Käyrälle $y = x^2 - 4x + 3$ on piirretty tangentit käyrän ja koordinaattiakselien leikkauspisteisiin. Laske tangenttien rajoittaman kolmion ala. Piirrä kuvio.

5. Johda yhtälön $x^2 + px + q = 0$ juurien lausekkeet. Millä ehdolla juuret ovat reaaliset ja eri suuret?

6. Neliöön ABCD on piirretty kolmio EFG siten, että kärki E on sivun CD keskipisteessä ja kärjet F ja G ovat A-kulman kyljillä yhtä etäällä A:sta. Miten suuri osa neliöstä on kolmio, kun sen ala on mahdollisimman suuri?

7. Kahdella yhtenevällä suorakulmaisella kolmiolla on yhteinen hypotenuusa. Toinen kolmio peittää $\frac{3}{4}$ toisesta. Laske kolmioiden kateettien suhde.

8. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusalla AB olevasta pisteestä P on piirretty kateeteille kohtisuorat PD ja PE. Suorakulmio PDCE pyörrähtää erikseen PD:n ja PE:n ympäri. Laske suhde AP:PB siinä tapauksessa, että muodostuneiden lieriöiden tilavuuksien suhde on $\frac{2}{3}$.

9. Kolmion kaksi sivua ovat 4 cm ja 5 cm sekä kolmas kaksi kertaa niin pitkä kuin sille piirretty keskijana. Laske kolmion pienin kulma.

10. Johda käyrän $y = -4x^2$ niiden tangenttien yhtälöt, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, 3)$ kautta. Piirrä kuvio.

YLIOPPILASTUTKINTO 8.9.1964 MATEMATIIKKA PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

1. Erään viraston henkilökunnasta erosi vuoden aikana p % ja uusia otettiin niin monta, että heitä oli vuoden lopussa q % silloisesta henkilökunnasta. Kuinka monta prosenttia viraston henkilökulu oli muuttunut vuoden kuluessa ?
2. Laske kaikkien niiden ykköistä pienempien positiivisten murtolukujen summa, joiden nimittäjä on $\geq n$ ja $\leq 3n$.
3. Todista, että $x^3 > y^3$, jos x ja y ovat reaalityyppisiä lukuja ja $x > y$.
4. Osoita, että paraabeli $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{c}{2}x + \frac{c}{4}$ sivuaa paraabelia $y = -\frac{1}{2}x^2 + c$:n arvosta riippumatta. (Sivuaamispaikka on sellainen käyrien yhteinen piste, jossa niillä on yhteinen tangentti.) Piirrä käyrät, kun $c = 2$.
5. Johda yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurien lausekkeet. Millä ehdolla juuret ovat reaaliset ja eri suuret ?
6. Suorakulmion ABCD kärjen A kautta on piirretty suora, joka leikkaa BC:n pisteessä E ja DC:n jatkeen pisteessä F. Mikä suhteen BE:BC arvo antaa kolmioiden ABE ja FCE alojen summalle pienimmän arvon ?
7. Jänne jakaa ympyrän kahteen segmenttiin, joiden sisään piirrettyjen neliöiden sivujen suhde on 5:9. Laske jänne ja ympyrän säteen suhde.
8. Tasakylkinen kolmio, jonka piiri on $2p$, pyörittää kantasivunsa ympäri. Kuinka pitkä pitää kannan olla, jotta pyörähdykskappaleen tilavuus olisi mahdollisimman suuri ?
9. Tasakylkisessä kolmiossa ABC, jonka kanta on AB, leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen ja pisteen A kautta kulkeva suora sivun BC pisteessä D siten, että $CD:DB = 2:3$. Laske kolmion kulmat.
10. Määrittää a ja b siten, että funktio $y = ax^4 + bx^3$ saa ääriarvon -1 , kun $x = 1$. Ilmoita funktion nollakohdat, määrittää kuvaajan käännepaikat ja piirrä käyrä.