

1. Astioissa A ja B on samaa suolaliuosta. A:sta otetaan $\frac{1}{5}$ sen sisältämästä liuoksesta ja poistettu määrä korvataan vedellä. Näin menetellään kaikkiaan viisi kertaa. B:stä otetaan vastaavasti kymmenen kertaa $\frac{1}{10}$ sen sisältämästä liuoksesta. Kuinka monta prosenttia viimeisen vedenlisäämisen jälkeen B:ssä oleva liuos on väkevämpi kuin A:ssa oleva?
2. Sarjan ensimmäinen termi on kaksi kolmasosaa toisesta, toinen kolme neljäsosaa kolmannesta, kolmas neljä viidesosaa neljännestä jne. Sarjan n:s termi on u. ilmaise n ensimmäisen termin summa n:n ja u:n avulla.
3. Ratkaise yhtälö $(\frac{3}{4})^x - (\frac{4}{3})^x = 1$. Ilmoita tulos kolmen desimaalin tarkkuudella.
4. Paraabelille $y = x^2 + 1$ on origosta piirretty sivuajat. Laske sivuamispisteiden välisen paraabelinkaaren ja tangenttien rajoittaman kuvion ala. Piirrä kuvio.
5. Johda osamäärän derivoimiskaava.
6. Tasakylkisen kolmion kanta on a ja kylki b. Laske kantakulman puolittajasta kolmion sisään jäävän osan pituus.
7. Kolmion sisäpuolella olevan mielivaltaisen pisteen P kautta piirretään sivujen suuntaiset suorat. Tällöin muodostuu kolme pienempää kolmiota, joiden yhteisenä kärkipisteenä on P. ilmaise alkupe-
räisen kolmion ala A pienten kolmioiden alojen A_1, A_2 ja A_3 avulla.
8. Suoraan ympyräkartiioon on piirretty puolipallo siten, että sen pinta sivuaa kartion vaippaa ja sen pohja on kartion pohjatasossa. Laske puolipallon ja kartion tilavuuksien suhde, kun kartion akselileikkauksen huippukulma on $2v$. Millä v:n arvolla tämä suhde saa suurimman arvonsa? Perustele ääriarvon laatu.
9. Ratkaise täydellisestä yhtälöstä $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
10. Laske funktion $y = \frac{x}{x-2}$ maksimi- ja minimiarvot. Määrää käyrän asymptoottien yhtälöt. Piirrä kuvio.

YLIOPPILASTUTKINTO 5.4.1963 MATEMATIIKKA LYHYT OPPIMÄÄRÄ

1. Astioissa A ja B on samaa suolaliuosta. A:sta otetaan $1/5$ sen sisältämästä liuoksesta ja poistettu määrä korvataan vedellä. Näin menetellään kaikkiaan viisi kertaa. B:stä otetaan vastavasti kymmenen kertaa $1/10$ sen sisältämästä liuoksesta. Kuinka monta prosenttia viimeisen vedenlisäämisen jälkeen B:ssä oleva liuos on väkevämpi kuin A:ssa oleva?
2. Millä x :n arvoilla epäyhtälöt $1 - x - 2x^2 < 0$ ja $\frac{2-x}{x} < 0$ ovat samanaikaisesti voimassa?
3. Millä a :n arvoilla on olemassa kaksi reaali lukua, joiden sekä summa että tulo on a ?
4. Paraabelin $x^2 + y - 2 = 0$ ja suoran $x + y = 0$ leikkauspisteisiin piirretään paraabelin tangentit. Laske näiden tangenttien leikkauspisteen koordinaatit. Piirrä kuvio.
5. Johda tulon ~~derivoimiskaava~~ ^{derivoimiskaava}.
6. Pisteet D ja E jakavat suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusan AB kolmeen yhtä suureen osaan. Osoita, että $CD^2 + CE^2 = 5DE^2$.
7. Kolmion sisäpuolella olevan mielivaltaisen pisteen P kautta piirretään sivujen suuntaiset suorat. Tällöin muodostuu kolme pienempää kolmiota, joiden yhteisenä kärkipisteenä on P. Ilmaise alkuperäisen kolmion ala A pienten kolmioiden alojen A_1, A_2 ja A_3 avulla.
8. Suoraan ympyräkartiioon on piirretty puolipallo siten, että sen pinta sivuaa kartion vaippaa ja sen pohja on kartion pohjatasossa. Laske puolipallon ja kartion tilavuuksien suhde, kun kartion akselileikkauksen huippukulma on $2v$.
9. Ympyrään on piirretty puolisuunnikas, jonka korkeus on h ja jonka yhdensuuntaisten sivujen välisen kaaren asteluku on v . Osoita, että puolisuunnikkaan ala $A = h^2 \cot \frac{v}{2}$, ja laske tämä ala, kun $h = 2,25$ m ja $v = 36^\circ 24'$.
10. Määrää funktion $y = x^3 - 3x + 2$ maksimi- ja minimiarvot sekä nollakohdat. Piirrä kuvio.

1. Maamme kaupunkien ja kauppala-ain väkiluku, joka vuonna 1900 oli 12,5 % ja vuonna 1960 38,5 % koko väestöstämme, kasvoi 412 % vuosina 1900 - 1960. Kuinka monta prosenttia maaseudun väestö lisääntyi mainittuna aikana ?
2. Kaksi kappaletta liikkuu tasaisella nopeudella samaa umpinaista rataa pitkin. Jos ne liikkuvat vastakkaisiin suuntiin, ne kohtaavat toisensa seitsemän kertaa niin usein kuin samaan suuntaan liikkuessaan. Laske kappaleitten nopeuksien suhde.
3. Osoita algebrallisesti ja graafisesti, että epäyhtälö $4x^2 > 4x - 5$ on voimassa kaikilla x :n reaaliarvoilla.
4. Johda niiden pisteiden uran yhtälö, joiden etäisyys origosta on kaksi kertaa niin suuri kuin pisteestä $(3, 0)$. Laske urakäyrän pituus. Piirrä kuvio.
5. Johda summan derivoimiskaava.
6. Kolmiossa, jonka sivut ovat a , b ja c , ovat sivuille a ja b piirretyt keskijanat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita että $a^2 + b^2 = 5c^2$.
7. Tasakylkisen kolmion kyljen suhde kantaan on $2 : 3$. Laske kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden alojen suhde.
8. Pallon sisään piirretyn suoran kartion kärjestä A piirretty pallon halkaisija AB leikkaa kartion pohjan pisteessä C . Laske kartion ja pallon tilavuuksien suhde, kun jana AC on janojen AB ja CB keskiverto.
9. Ympyränsektoriin on piirretty ympyrä, joka sivuaa sektorin kaarta ja säteitä niiden keskipisteissä. Laske sektorin keskuskulma.
10. Määrää $\log_{mn} a$, kun $\log_m a = p$ ja $\log_n a = q$.

1. Maamme kaupunkien ja kauppalaisten väkiluku, joka vuonna 1900 oli 12,5 % ja vuonna 1960 38,5 % koko väestöstämme, kasvoi 412 % vuosina 1900 - 1960. Kuinka monta prosenttia maaseudun väestö lisääntyi mainittuna aikana ?
2. Kulkue liikkuu suoraa tietä (x-akselia) pitkin nopeudella a. Henkilö on matkalla y-akselilla, tien vastakkaisella puolella, olevaan pisteeseen C (0, c) ja kulkee nopeudella b ($\ll$ a). Hänen saapuessaan x-akselille kulkue on juuri menossa ohi ja hänen on odotettava kunnes ylipääseminen on mahdollista. Missä x-akselin pisteessä hänen on odotettava päästykseen mahdollisimman aikaisin C:hen (suoraa viivaa pitkin) ?
3. Suppenevan geometrisen sarjan ensimmäisen ja kahdeksannen jäsenen summa on $127/8$ sekä neljännen ja viidennen tulo -2. Laske sarjan summa.
4. Määrää käyrän $y = x + \frac{1}{2x^2}$ mahdolliset maksimi- ja minimipisteet sekä sen asymptoottien yhtälöt. Piirrä kuvio.
5. Johda paraabelin yhtälö, kun sen huippuna on origo ja akselina positiivinen y-akseli. Paraabeli on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä suorasta ja tämän ulkopuolella olevasta kiinteästä pisteestä.
6. Kolmiossa OAB on kulma $\angle O = 120^\circ$. Kulman O puolittajan ja sivun AB leikkauspiste on C. Osoita että $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OC}$.
7. Tasakylkisen kolmion kyljen suhde kantaan on 2 : 3. Laske kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden alojen suhde.
8. Pallonsektorin akselileikkauksen keskuskulma on $2v$ ja pallon säde r. Laske sektorin kokonaispinta-ala. Millä v:n arvolla se on suurin?
9. Kolmion kaksi sivua ovat 3 cm ja 8 cm. Niiden vastaiset kulmat suhtautuvat toisiinsa niin kuin 1 : 3. Määrää kolmion kulmat.
10. Laske sen äärellisen kaksiosaisen kuvion pinta-ala, jonka rajoina ovat x-akseli ja käyrä $y = x^3 - x^2 - 2x$.