

1. Henkilö oli ostanut 100 kpl erään yhtiön osakkeita hintaan 2500 mk/kpl. Yhtiön osakepääomaa korotettaessa osakkaille jaettiin ilmaisia osakkeita yksi kappale viittä vanhaa osaketta kohti ja samalla tarjottiin lunastettavaksi uusia osakkeita hintaan 3000 mk/kpl. Kuinka monta uutta osaketta -ilmaisten lisäksi -mainitun henkilön tulee lunastaa saadakseen koko sijoitukselleen korkoa saman prosentin mukaan kuin aikaisemminkin olettaen, että osinko osaketta kohti pysyy samana?
2. Päättymättömän suppenevan geometrisen sarjan viides jäsen on 2. Sarjan ensimmäinen, toinen ja neljäs jäsen muodostavat mainitussa järjestyksessä aritmeettisen sarjan. Laske geometrisen sarjan summa.
3. Millä x :n arvoilla on

$$\frac{1-x}{x-3} < \frac{1}{x-1} ?$$

4. Todista, että kaikki yhtälön $y = x^2 - 2mx + m - 1$ esittämät paraabelit m :n arvosta riippumatta kulkevat saman pisteen kautta. Mitkä ovat tämän pisteen koordinaatit? Piirrä arvoja $m = 0$ ja $m = 1$ vastaavat käyrät.
5. Todista, että jos x_1 on yhtälön $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ juuri, niin yhtälön vasen puoli on jaollinen $(x - x_1)$:llä.
6. Tasasivuisen kolmion ABC kärjet yhdistetään ympäri piirretyn ympyrän kaarella AC olevaan mielivaltaiseen pisteeseen P. Osoita, että $PB = PA + PC$.
7. Janan AB keskipiste keskipisteenä piirretään mielivaltainen ympyrä. Olkoon P ympyrän kehällä oleva piste. Osoita, että $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ on P:n asemasta riippumaton.
8. Kuinka suuri tulee tietystä ympyrästä leikatun sektorin keskuskulman olla, jotta sektori voitaisiin taivuttaa tilavuudeltaan mahdollisimman suuren kartion vaippapinnaksi? Ilmoita tulos minuutin tarkkuudella.
9. Osoita, että teräväkulmaisessa kolmiossa ABC korkeusjanojen AD ja BE kantapisteiden yhdysjana DE jakaa kolmion nelikulmioon ja kolmioon, joiden alojen suhde on $= \operatorname{tg}^2 C$.
10. Määrää ympyränkehän $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ se piste, jossa funktio $x^2 + y^2$ saa pienimmän arvonsa. Laske tämä pienin arvo.

1. Henkilö oli ostanut 100 kpl erään yhtiön osakkeita hintaan 2500 mk/kpl. Yhtiön osakepääomaa korotettaessa osakkaille jaettiin ilmaisia osakkeita yksi kappale viittä vanhaa osaketta kohti ja samalla tarjottiin lunastettavaksi uusia osakkeita hintaan 3000 mk/kpl. Kuinka monta uutta osaketta -ilmaisten lisäksi -mainitun henkilön tulee lunastaa saadakseen koko sijoitukselleen korkoa saman prosentoin mukaan kuin aikaisemminkin olettaen, että osinko osaketta kohti pysyy samana?

2. Supista osamäärä

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^2 - 7x + 10}$$

ja laske tämän jälkeen sen kuutiojuuren arvo, kun $x = 2,57$.

3. Millä x :n arvoilla on

$$\frac{2x + 3}{3x - 6} - \frac{1}{x - 1} < 0?$$

4. Määrää sen janan pituus, jonka paraabeli $y = 2x^2$ leikkaa ympyrälle $x^2 + y^2 = 5$ pisteeseen $(1, 2)$ piirretystä sivuajasta. Tarkista tulos graafisesti.

5. Osoita, että jos x_1 ja x_2 ovat yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuret, on identtisesti (s. o. kaikilla x :n arvoilla)

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

6. Tasasivuisen kolmion ABC kärjet yhdistetään ympäri piirretyn ympyrän kaarella AC olevaan mielivaltaiseen pisteeseen P. Osoita, että $PB = PA + PC$. (Todistusta varten erota BP:stä jana $BD = PA$.)

7. Suorakulmisen kolmion kateetit ovat a ja b . Hypotenuusaa vastaan piirretyn korkeusjanan kantapisteestä piirretään normaalit kateetteja vastaan. Laske näin syntyneen suorakulmion ala.

8. Säännöllisessä tetraedrissa ABCD jakaa kärjen A kautta kulkeva ja särmän CD suuntainen taso tetraedrin koko pinnan kahteen yhtä suureen osaan. Mihin suhteeseen taso jakaa särmän BC?

9. Kuinka suuri osa maapallon pinnasta näkyy 327 km:n korkeudesta? Voidaanko koko Suomi nähdä tästä korkeudesta yht'aikaa? (Maapallon säde on 6378 km; Suomen suurin pituus pitkin maan pintaa on 1160 km.)

10. Janan päätepisteet ovat A $(-1, 2)$ ja B $(2, 1)$. Millä janan osalla sijaitsevat ne pisteet, joiden koordinaattien erotus (siis $x - y$ tai $y - x$) on ≥ 2 ?

1. A ja B kulkevat tietyn matkan. Heillä on vain yksi polkupyörä, jota he käyttävät seuraavasti: A ajaa pyörällä tietyn osan matkasta, jättää pyörän tien varteen ja jatkaa välittömästi kävelen päämäärään saakka, kun taas B kävelee aluksi ja ajaa loppumatkan pyörällä. He sekä lähtevät matkalle että tulevat perille yht'aikaa. Mikä on heidän keskimääräinen nopeutensa koko matkalla, kun kummankin pyöräilynopeus on 20 km/t sekä A:n kävelynopeus 4 km/t ja B:n 6 km/t ?
2. Pankkiin talletetaan viitenä peräkkäisenä vuotena, v.1963 - 67, kunkin vuoden alussa 2000 mk kasvamaan korkoa korolle. Tämän jälkeen näin muodostunut pääoma kasvaa edelleen korkoa korolle. Minkä vuoden lopussa sen vuotuinen korko ensimmäisen kerran ylittää 1000 mk ? Korkoprosentti on $4\frac{1}{2}$.
3. Todista että kahden eri suuren luvun kuutioiden aritmeettinen keskiarvo on suurempi kuin lukujen aritmeettisen keskiarvon kuutio, kun viimeksi mainittu keskiarvo on positiivinen.
4. Millä ehdolla suora $y = mx + b$ kohtaa paraabelin $y = x^2$? Osoita, että paraabelin jänteen keskipiste, kun m on vakio ja b muuttuu, liikkuu pitkin y -akselin suuntaista suoraa. Piirrä kuvio, kun $m = 1$.
5. Johda suoran ympyräpohjaisen katkaistun kartion tilavuuden lauseke.
6. Mielivaltainen suora leikkaa kolmion ABC sivun BC pisteessä D, CA:n pisteessä E ja AB:n jatkeen pisteessä F. Osoita, että jakosuhteiden tulo on 1, s.o. $\frac{BD \cdot CE \cdot AF}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$.
7. Suorakulmion sivut ovat a ja $3a$. Sen ympäri on piirretty toinen suorakulmio, jonka sivujen suhde on 1:2. Laske tämän suorakulmion lyhyemmän sivun pituus.
8. Pallosektoriin, jonka akselileikkauksen keskuskulma on 60° , on piirretty pallo. Laske pallon ja sektorin tilavuuksien suhde.
9. Kolmion kahden kulman suhde on 1 : 2 ja niiden vastaisten sivujen suhde 3 : 4. Laske kolmas kulma logaritmitauluista saatavalla tarkkuudella.
10. Kolmion sivulla olevasta pisteestä P piirretään muiden sivujen suuntaiset suorat. Missä P:n tulee sijaita, jotta näin muodostunut suunnikas olisi pinta-alaltaan mahdollisimman suuri ?

YLIOPPILASTUTKINTO 7. 9. 1962. MATEMATIIKKA LYHYT OPPIMÄÄRÄ

1. A ja B kulkevat tietyn matkan. Heillä on vain yksi polkupyörä, jota he käyttävät seuraavasti: A ajaa pyörällä tietyn osan matkasta, jättää pyörän tien varteen ja jatkaa välittömästi kävellen päämäärään saakka, kun taas B kävelee aluksi ja ajaa loppumatkan pyörällä. He sekä lähtevät matkalle että tulevat perille yht'aikaa. Mikä on heidän keskimääräinen nopeutensa koko matkalla, kun kummankin pyöräilynopeus on 20 km/t sekä A:n kävelynopeus 4 km/t ja B:n 6 km/t ?
2. Määrää kaksi lukua, joiden neliöiden summa on 10 kertaa lukujen summa ja joiden neliöiden erotus on 2 kertaa lukujen erotus.
3. Määrää tuntemattomien suhde $x : y : z$ yhtälöistä

$$6x - 2y + 3z = 0,$$

$$2x + y + 2z = 0.$$
4. Kolmion yksi kärkipiste on y-akselilla ja muut pisteissä (2, 1) ja (5, 4). Sen ala on 6 pintayksikköä. Laske ensiksi mainitun kärkipisteen ordinaatta. Piirrä kuvio.
5. Todista, että jos kolmion kaksi sivua ovat verrannolliset toisen kolmion kahteen sivuun ja niiden väliset kulmat yhtäsuuret, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.
6. ABCD on nelikulmio ja M, N, P, Q, S ja T ovat järjestyksessä janojen AB, CD, AD, BC, AC ja BD keskipisteet. Osoita, että janoilla MN, PQ ja ST on yhteinen keskipiste.
7. Suorakulmion sivut ovat a ja 3a. Sen ympäri on piirretty toinen suorakulmio, jonka sivujen suhde on 1 : 2. Laske tämän suorakulmion lyhyemmän sivun pituus.
8. Suorakulmaisessa suuntaissärmiössä, jonka särmät ovat a, b ja c ($a < b < c$) yhdistetään kaksi kärkipistettä P ja Q, jotka eivät ole samassa sivutahkossa. Laske P:tä lähimpänä olevan kärkipisteen etäisyys PQ:sta
9. Kolmiossa ABC on kulma $A = 72^{\circ}10'$. Kärjestä C sivua AB vastaan piirretty korkeusjana CD jakaa sivun AB siten, että $AD : DB = 1 : 3$. Laske kulma C.
10. Logaritmijärjestelmässä, jonka kantaluku on 5, on erään luvun logaritmi = saman luvun Briggsin logaritmin neliö. Määrää tämä luku.