

1. Juna käyttää kulkiessaan A:sta B:hen pysähdyksiin väliasemilla  $p\%$  matka-ajastaan, so. A:sta lähdön ja B:hen saapumisen välisestä ajasta. Tämä matka-aika tahdotaan lyhentää  $q\%$ . Kuinka monta prosenttia on nopeutta lisättävä, kun pysähdysaikoja ei voida lyhentää?
2.  $10\%$ :n laina annetaan ehdolla, että se maksetaan takaisin kahtena yhtä suurena eränä, edellinen puolen vuoden ja jälkimmäinen koko vuoden kuluttua. Kuinka monta prosenttia lainasta tämä erä on?
3. Kirjoita se toisen asteen yhtälö, jonka juurina ovat yhtälön  $x^2+px+q=0$  juurien käänteisarvojen (inverssarvojen) summa ja juurien summan käänteisarvo.
4. Pisteestä  $(2, 3)$  piirretään normaali suoralle  $4x - 3y + 1 = 0$ . Laske näiden kahden suoran sekä suoran  $x - 7y - 1 = 0$  rajoittaman suorakulmaisen kolmion kateetit. Piirrä kuvio.
5. Todista että suoran ja tason välinen kaltevuuskulma on pienin niistä kulmista, jotka suora muodostaa leikkauspisteen kautta tasoon piirrettyjen suorien kanssa.
6. Kolmion sivut suhtautuvat toisiinsa kuten  $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ . Osoita että kolmion kaksi keskijanaa (mediaania) on kohtisuorassa toisiaan vastaan.
7. Ympyrä leikkaa  $60^\circ$ :n kulman ASC toisen kyljen pisteissä A ja B sekä toisen kyljen pisteissä C ja D. Laske ympyrän säde, kun  $SA = 4$  cm,  $SB = 6$  cm ja  $SC = 3$  cm. (Kulman kärki S on ympyrän ulkopuolella).
8. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin vastakkaisten sivutahkojen väliset diedrikulmat ovat  $90^\circ$ . Määrää pyramidin sisään piirretyn pallon ja pyramidin tilavuuksien suhde. (Tarkka arvo ja 3-desimaalinen likiarvo.)
9. Laske sen kolmion korkeus, jonka kanta on  $4,69$  dm sekä kantakulmat  $34,3^\circ$  ja  $103,4^\circ$ .
10. Ympyrän  $x^2 + y^2 = 5$  pisteeseen  $(2, -1)$  on piirretty tangentti. Tangentilla oleva piste P on sellaisen ympyrän keskipiste, jonka säde on 3 ja joka kulkee ensiksi mainitun ympyrän keskipisteen kautta. Määrää P:n koordinaatit. Piirrä kuvio.

## P I T K Ä O P P I M Ä Ä R Ä

Tehtävät 1, 5 ja 7 kuten edellä.

Edellä olevat tehtävät 2, 3, 4, 6, 8, 9 ja 10 korvataan seuraavilla:

2. Päättymättömän geometrisen sarjan suhdeluku on  $\sqrt{1/2}$  (lue: kuutiojuuri puolesta). Kuinka monta jäsentä on otettava sarjan alusta lukien, jotta niiden summa olisi yhtä suuri kuin  $\frac{3}{4}$  (lue: 3 neljänneistä) koko sarjan summasta?
3. Määrää  $a$  siten, että funktion  $y = \frac{2x + a}{x^2 + 2a^2}$  maksimi-arvo on 1. Piirrä suurempaa  $a$ :n arvoa vastaava käyrä.
4. Määrää  $m$  siten, että suorien  $y = mx$ ,  $x + 1 = 0$  ja  $4x - 3y - 4 = 0$  rajoittaman kolmion ala on 3 pintayksikköä. Piirrä kuvio.
6. Kolmion ABC sivut AC ja CB hypotenuusoina piirretään tasakylkiset suorakulmaiset kolmiot ACM ja CBN, kumpikin ulospäin. Piirretään jana MN ja yhdistetään AB:n keskipiste O pisteisiin M ja N. Osoita että kolmio MNO on tasakylkinen ja suorakulmainen.
8. Palloon, jonka säde on  $r$ , on piirretty säännöllinen tetraedri, tähän pallo, siihen taas säännöllinen tetraedri jne. loppumattomiin. Laske pallojen tilavuuksien summa, samoin tetraedrien ja määrää näiden summien suhde. (Tarkka arvo ja 3-desimaalinen likiarvo).
9. Laske sen kolmion korkeus, jonka kanta on  $4,687$  km ja kantakulmat  $34^\circ 16' 50''$  ja  $103^\circ 25' 15''$ .
10. Johda pisteestä  $(-1, -2)$  parabelille  $y = x^2 + 1$  piirrettyjen tangenttien yhtälöt. Piirrä kuvio.

1. Erään tuotteen valmistuskustannuksista menee 20 % raaka-aineen ostoon. Tämän raaka-aineen hinta nousee 15 %. Kuinka monella %:lla on myyntihintaa nostettava, jotta voittoprosentti pysyisi muuttumatta?
2. Todista, että murtoluku  $\frac{a+c}{b+d}$  on rajojen  $\frac{a}{b}$  ja  $\frac{c}{d}$  välissä, kun  $b$  ja  $d$  ovat positiivisia lukuja. Millä ehdolla mainittu murtoluku yhtyy jompaankumpaan rajaan?
3. Eräessä logaritmijärjestelmässä on  $\log 3 = 2,372$  ja  $\log 4 = 3$ . Laske tauluja käyttämättä  $\log 4,5$  tässä järjestelmässä.
4. Pisteestä  $A(-1, -2)$  kuljetaan 3 pituusyksikön matka  $AB$  suuntaan, joksi  $y$ -akselin positiivinen suunta muuttuu kääntyessään  $240^\circ$  vastapäivään. Laske pisteen  $B$  koordinaatit. Piirrä kuvio.
5. Todista että kolmion kulman vieruskulman puolittaja jakaa vastaisen sivun ulkopuolisesti viereisten sivujen suhteeseen.
6. Kolmioon, jonka sivut ovat 3 cm, 4 cm ja 5 cm, on piirretty suorakulmio, jonka sivujen suhde on 2 : 1 ja jonka lyhyemmistä sivuista toinen on kolmion pisimmällä sivulla. Laske suorakulmion sivut.
7. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion korkeusjana halkaisijana on piirretty ympyrä. Kuinka suuri osa kolmiosta on ympyrän ulkopuolella? (Tarkka arvo ja 3-desimaalinen likiarvo.)
8. Pallon sisään on piirretty kaksi ympyräpohjaista suoraa kartiota, joilla on yhteinen pohja. Laske kartioiden vaippapintojen suhde, kun pohjaympyrän ala on  $\frac{1}{3}$  sen rajoittaman suuremman kalotin alasta.
9. Pyörähtäessään korkeusjanansa ympäri tasakylkinen kolmio muodostaa kartion jonka tilavuus on  $A$ , ja pyörähtäessään kylkensä ympäri kappaleen jonka tilavuus on  $B$ . Laske kolmion huippukulma, kun  $B = 3A$ .
10. Määrä  $a$  siten, että yhtälön  $2x^3 - 5x^2 + ax + 2a = 0$  vasen puoli on tasan jaollinen binomilla  $2x + 1$ . Laske sen jälkeen yhtälön juuret.

## P I T K Ä    O P P I M Ä Ä R Ä .

Tehtävät 1, 5, 8 ja 9 kuten edellä.

Edelläolevat tehtävät 2, 3, 4, 6, 7 ja 10 korvataan seuraavilla:

2. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $1 + \sin x + \sin x \cos x + \dots + \sin x \cos^n x + \dots$  suppenee? Mikä on sen summa tällöin? Millä  $x$ :n arvoilla sarjan summa on 0?
3. Laske  $\log 3$  siinä järjestelmässä, jossa  $\log 2 = 10$ .
4. Millä  $a$ :n arvoilla käyrillä  $2x + y^2 = 0$  ja  $x^2 - 2ax + y^2 = 0$  on muita yhteisiä pisteitä kuin origo? Millä  $a$ :n arvolla käyrien yhteiset pisteet ovat tasasivuisen kolmion kärkinä? Piirrä kuvio.
6. Tasakylkisen kolmion kanta on  $a$  ja korkeus  $b$ . Määrä suurin kaikista kolmion sisään piirretyistä tasakylkisistä ~~suunnikkaista~~ puolisuunnikkaista  $DEFG$ , joiden sivu  $DE$  on kolmion kannan osana ja kulmat  $D$  ja  $E$  ovat  $120^\circ$ . Osoita, että tässä puolisuunnikkaassa  $DE + FG = a$ .
7. Tasasivuisen kolmion korkeusjana halkaisijana on piirretty ympyrä. Kuinka suuri osa kolmiosta on ympyrän ulkopuolella? (Tarkka arvo ja 3-desimaalinen likiarvo.)
10. Millä  $x$ :n arvoilla funktio  $\frac{\cos 2x}{1 + 2\sin x}$  on positiivinen?