

1. Maamme väestöstä asui kaupungeissa v. 1800 (vuodenlopussa) 5,60 % ja v. 1950 25,8 %. Maaseudun (so. kauppaloitten ja maalaiskuntien) väkiluku kasvoi mainittuna ajanjaksona 280 %. Maan koko väkiluku oli v. 1950 4 030 000. Kuinka
2. Osoita, että jokainen jaoton luku (joka on suuri) on suurempi kuin 3) on 6:n jonkin monikerran viereinen kokonaisluku.
3. Millä x :n arvoilla funktio $\frac{3x}{4x^2 - 1}$ on pienempi kuin 1?
4. Määrää ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ kehän pisteistä se, jolla on lyhin etäisyys suorasta $2x + 3y - 12 = 0$. Laske tämä lyhin etäisyys. Piirrä kuvio ja tarkista
5. Johda yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurien lausekkeet. /tulos mittaamalla.
6. r -säteinen ympyrä c sivuaa sisäpuolisesti R -säteistä ympyrää C . Piirrä C :hen ympyrä, joka sivuaa c :tä ulkopuolisesti ja C :tä sisäpuolisesti ja jonka ala on puolet c :n ulkopuolelle jäävän C :n osan alasta. Milloin tehtävä on
7. Ympyränsektori OAB , jonka kaari AB on 60° , on jaettu kahden yhtäsuureen osaan jänteen AB suuntaisella janalla CD (C on OA :lla). Määrää $AC : CO$ (tarkka arvo ja 2 desimaalinen likiarvo).
8. Kahdesta astiasta, A ja B , on A katkaistu kartio, B katkaistu pallonsegmentti, jonka pohjat ovat yhtäsuuret ja jonka korkeus on = pallon säde. Astioilla on sama tilavuus, sama korkeus ja sama ylemmän pohjan säde. Laske A :n alemman ja ylemmän pohjan säteiden suhde.
9. Suoran särmiön pohja on kolmio, jonka sivut ovat 2, 3 ja 4 cm. Särmiö leikataan pisimmän pohjasärmän kautta asetetulla tasolla, joka muodostaa pohjan kanssa $33^\circ 33'$:n kulman (ja leikkaa kolmannenkin sivusärmän). Laske tason särmiöstä erottaman pyramidin tilavuus.
10. Piirrä funktion $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ kuvaaja ja määrää sen avulla funktion suurin ja pienin arvo sekä niitä vastaavat x :n arvot.

P I T K Ä O P P I M Ä Ä R Ä .

Tehtävät 1, 5, 6 ja 8 kuten edellä.

Edellä olevat tehtävät 2, 3, 4, 7, 9 ja 10 korvataan seuraavilla:

2. Kuoletuslaina maksetaan takaisin samansuuruisina vuotuismaksuina (annuiteetteina) $2n$ vuodessa; korkoprosentti on p . Mikä osa vuotuismaksusta on kuoletusta ensimmäisenä vuonna sen jälkeen, kun puolet laina-ajasta on kulunut? Lausu tulos mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa ja sovelle se tapaukseen $2n = 30$, $p = 6$.
3. Millä positiivisilla x :n arvoilla funktio $\frac{x(1 - a^2)}{1 - a^2x^2}$ on pienempi kuin 1? (a voidaan olettaa positiiviseksi.)
4. Määrää ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ kehän pisteistä se, jolla on lyhin etäisyys suorasta $3x + 4y - 15 = 0$. Laske tämä lyhin etäisyys. Piirrä kuvio ja tarkista tulos mittaamalla.
7. Piste E , joka jakaa neliön $ABCD$ sivun CD suhteessa $1 : 2$, yhdistetään pisteisiin A ja B . FG olkoon AB :n suuntainen jana, jonka päätepisteet ovat neliön piirillä. Janat AE ja BE jakavat FG :n kolmeen osaan. Missä suhteessa FG jakaa sivun BC silloin kun FG :n osat särminä muodostettu suorakulmainen suuntaissärmiö on mahdollisimman suuri?
9. Kolmisivuinen säännöllinen pyramidi, jonka pohjasärmät ovat $= a$ ja korkeus $= h$, jaetaan kahteen osaan yhden pohjasärmän kautta asetetulla tasolla, joka muodostaa pohjan kanssa kulman v . Määrää huipunpuoleisen osan ja pohjanpuoleisen osan tilavuuksien suhde. Sovella tulos tapaukseen $a = 3$ cm, $h = 5$ cm, $v = 30^\circ$.
10. Määrää funktion $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ maksimi- ja minimiarvot sekä piirrä sen kuvaaja. Osoita, että kuvaajalla on asymptoottina suora $y = 1$.

1. Pääoma kasvaa korkoa 2 vuotta, joista toisena korkoprosentti on p ja toisena q . Korko lisätään vuosittain pääomaan. Osoita, että loppupääoma on riippumaton siitä, kumpana vuonna korkoprosentti on p ja kumpana q , sekä että se on pienempi kuin jos korkoprosentti molempina vuosina olisi $p:n$ ja $q:n$ keskiarvo.
2. Laske tauluja käyttämättä lausekkeen $\frac{0,35}{2,4 \cdot 60^2}$ kuutiojuuren logaritmi, kun $\log 2 = 0,3010$, $\log 3 = 0,4771$ ja $\log 7 = 0,8451$.
3. Määrää a siten, että yhtälön $ax^2 + (a+1)x - 2a = 0$ juurien erotuksen itseisarvo on mahdollisimman pieni. Mitkä ovat juuret, kun a :lla on tämä arvo?
4. Ympyrän $x^2 + y^2 = 13$ pisteisiin $(3, 2)$ ja $(2, -3)$ piirretään sivuajat. Johda näiden yhtälöt ja laske sen kuvion ala, jota rajoittavat mainitut sivuajat ja sivuamispisteiden välinen lyhyempi ympyränkaari (tarkka arvo ja 2-desimaalinen likiarvo). Piirrä kuvio.
5. Todista, että kolmion korkeussuorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (Käytä kuviossa tylppäkulmaista kolmiota.)
6. R - ja r -säteiset ympyrät sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Laske yhteisten sivuajien rajoittaman kolmion ala. Sovella tulos tapaukseen $R=9$ cm, $r=4$ cm.
7. Tasakylkiseen kolmioon, jonka kanta on 2 cm, piirretään neliö siten, että sen kaksi kärkeä on kannalla ja yksi kummallakin kyljellä. Esitä graafisesti neliön ja kolmion alojen suhde kolmion korkeuden funktiona. Määrää käyrästä suhteen suurin arvo ja sitä vastaava kolmion korkeus.
8. Säännöllisen tetraedrin ja säännöllisen oktaedrin pinta-alojen suhde merkitään a :lla ja tilavuuksien suhde b :llä. Osoita, että $a^3 = 2b^2$.
9. Ympyrän kehän pisteeseen A piirretystä tangentista erotetaan kehän neljänneksen pituinen jana AB , ja piste B yhdistetään ympyrän keskipisteeseen O . Mihin suhteeseen ympyräviiva jakaa kolmion OAB alan?
10. Millä a :n arvoilla yhtälöillä $x - ay = 1$, $ax - y = 1$ ja $x + y = a$ on yhteinen ratkaisu (x, y) ? Määrää saatuja a :n arvoja vastaavat ratkaisut.

P I T K Ä O P P I M Ä Ä R Ä .

Tehtävät 1, 5, 6 ja 8 kuten edellä.

Edellä olevat tehtävät 2, 3, 4, 7, 9 ja 10 korvataan seuraavilla:

2. Päättymättömän suppenevan geometrisen sarjan kahden ensimmäisen termin summa on 3, ja sen kuuden ensimmäisen termin summa on $19/27$ sen kolmen ensimmäisen termin summasta. Laske koko sarjan summa.
3. Määrää a siten, että yhtälön $3ax^2 + 3(a+1)x + 1 = 0$ juurien erotuksen itseisarvo on mahdollisimman pieni. Mitkä ovat juuret, kun a :lla on tämä arvo?
4. Paraabelin polttopiste on origo ja huippu $(0, -2)$. Missä pisteessä paraabelin ja x -akselin leikkauspisteisiin piirretyt tangentit leikkaavat toisensa? Piirrä kuvio.
7. Tasakylkiseen kolmioon, jonka kanta on a , piirretään neliö siten, että sen kaksi kärkeä on kannalla ja yksi kummallakin kyljellä. Määrää kolmion korkeus siten, että mainitun neliön ja kolmion alojen suhde tulee mahdollisimman suureksi. Esitä graafisesti tämä suhde korkeuden funktiona, kun $a = 2$.
9. Ratkaise täydellisesti yhtälö $\sin 2x = \operatorname{tg} x - \cot x$.
10. Kolmion kahden kulman suhde on $1 : 2$ ja niiden vastaisten sivujen suhde $2 : 3$. Laske kolmion kulmat.