

YLIOPIILASTUTKINTO 6.4.1951.

MATEMATIIKKA.

PITKÄ OPPIMÄÄRÄ, SOTILASKOKELAAT.

Pitkän oppimäärän tehtävät 2, 9 ja 10 korvataan seuraavilla:

2) Määrää a siten, että yhtälöillä $x + y = a$, $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 + \frac{a}{2}$,
 $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 - \frac{a}{3}$ on yhteinen ratkaisu x , y . Määrää tämä ratkaisu.

9) Tasakylkisen kolmion huippukulma on $35^{\circ}42'$. Laske kylkiä vastaan piirrettyjen keskijanojen välinen kulma.

10) Kaikista suorista lieriöistä, jotka voidaan piirtää annettuun suoraan kartioon, siten että pohjien kehät ovat kartion pinnalla, on määrättävä se, jonka vaippapinta on ~~pienin~~ suurin.

1. Yhtiön vuoden 1949 voitto oli 9 % osakepääomasta. V:n 1950 alussa korotettiin osakepääomaa 50 %. V. 1950 olivat sekä tulot että menot 15 % suuremmat kuin 1949. Kuinka monta % korotetusta osakepääomasta oli voitto v. 1950?
2. Kultasepällä on 50 g 900 promillen kultaa ja 200 g 800 promillen kultaa. Kuinka paljon hän voi naista valmistaa 830 promillen kultaa (tietysti erotamatta seeksesta kuparia)?
3. Osoita, että jos reaalityö r on yhtälön $x^2 - ax + 1 = 0$ juuri, missä a on positiivinen, niin $r^3 + \frac{1}{r^3}$ on suurempi tai $= 2$.
4. Määrittä a siten, että paraabeli $y = x^2 - (a+2)x + 3a + 1$ sivuaa x -akselia. Kuvio!
5. Todista, että jos tason leikkaava suora on kohtisuorassa kahta leikkauspisteen kautta kulkevaa tason suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa jokaisesta leikkauspisteen kautta kulkevaa tason suoraa vastaan.
6. Piirrä käyttämättä astelevyä ympyränsäktori, jonka kaari on 72° ja jonka ala on $=$ annetun ympyrän ala.
7. Pistestä P ympyrälle piirrettyjen tangenttien sivuamispisteiden välinen jänne on $\frac{2}{3}$ sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivusta. Missä suhteessa P (ulkopuolisesti) jakaa sen halkaisijan, jonka jatkeella se on? (Tarkka arvo ja 3-desimaalinen likiarvo).
8. Pallon pinta kulkee kuution yhden sivuneliön kärkipisteiden kautta ja sivuaa vastakkaista sivuneliötä. Laske pallon ja kuution tilavuuksien suhde.
9. Tasakylkisen kolmion huippukulma on $35^\circ 42'$. Laske kylkiä vastaan piirrettyjen keskijanojen välinen kulma.
10. Kahden luvun Briggsiläisten logaritmien erotus on $\frac{2}{3}$ ja lukujen erotuksen Briggsiläinen logaritmi on -1 . Määrittä luvut ja niiden 4-desimaaliset likiarvot.

P I T K Ä O P P I M Ä Ä R Ä

Tehtävät 1, 3, 5, 6 ja 7 kuten edellä.

Edellä olevat tehtävät 2, 4, 8, 9 ja 10 korvataan seuraavilla:

2. Kuoletuslainan vuotuismaksu (annuiteetti) on 6 % lainasummasta. Tästä vuotuismaksusta on osa korkoa ja loput kuoletusta; korko on 5 % kulloinkin vielä maksamatta olevalle lainamäärälle. Kuinka monen vuoden kuluttua kuoletus ensimmäisen kerran on suurempi kuin korko? (Vuotuismaksu suoritetaan ensimmäisen kerran vuoden kuluttua lainan ottamisesta.)
4. Kolmion kahden sivun yhtälöt ovat $3x - 4y + 6 = 0$ ja $x + 3y + 2 = 0$. Mikä on kolmannen sivun yhtälö, kun sen keskipiste on $(1, 1)$? Piirrä kuvio.
8. Suoran pyramidin korkeus on 1 dm ja sen pohja on neliö, jonka sivu on 1 dm. Yhden pohjasärmän kautta asetetaan taso kohtisuoraan vastakkaista sivutahoa vastaan. Laske pyramidin tästä tasosta leikkaaman kuvion ala.
9. Määrittä kaikki kulmat x , jotka toteuttavat yhtälön $\sin(x + 45^\circ) = \cos(30^\circ - x)$.
10. Suorakulmion muotoisen levyn sivut ovat a ja $2a$. Levyn kaikista nurkista leikataan pois yhteneväiset neliöt ja levy taivutetaan neliöiden sivujen jatkeita myöten siten, että siitä muodostuu suorakulmaisen suuntaissärmiön muotoinen kanneton astia. Määrittä poistettavien neliöiden sivu siten, että muodostuvan astian tilavuus on mahdollisimman suuri.

1. Eräässä lukujoukossa on m lukua, joitten keskiarvo $= a$, ja toisessa joukossa n lukua, joitten keskiarvo $= b$. Näytä, että molempien joukkojen kaikkien lukujen keskiarvo on sama kuin $a:n$ ja $b:n$ keskiarvo silloin ja vain silloin, kun $m = n$ tai $a = b$ (tai samanaikaisesti $m = n$ ja $a = b$).
2. Puutarhuri kylvää kahta lajia tomaatin siemeniä suhteessa 2:3. Edellisen lajin itävyys on 72%, jälkimmäisen 84%. Edelliseen lajiin kuuluva taimi antaa keskimäärin 8, jälkimmäiseen keskimäärin 6 tomaattia. Kuinka monta % suurempi on satona saatujen tomaattien lukumäärä kuin kylvetettyjen siementen?
3. Määrää a ja b siten, että trinomi $ax^2 + bx - 6$ on jaollinen $(x - 3):lla$ ja $(2x + 1):llä$.
4. Todista, että positiivisen luvun ja sen käänteisluvun summa on suurempi tai $= 2$, ja todenna tämä graafisesti.
5. Mikä on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kahdesta saman tason suorasta ja kuuluvat mainittuun tasoon? Suorita todistus.
6. Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä P ja Q . $P:n$ kautta piirretään suora, joka leikkaa ympyrät paitsi $P:ssä$ myös pisteissä A ja B . Todista, että kolmion ABQ muoto ei riipu suoran suunnasta.
7. Lausu annetun ympyrän ympäri piirretyn suorakulmaisen kolmion ala toisen kateetin funktiona.
8. Kuution kärjestä A lähtevien särmien keskipisteiden kautta asetetaan taso. Mihin suhteeseen tämä jakaa kuution $A:sta$ lähtevän lävistäjän?
9. Ympyrään, jonka säde on 4 cm, on piirretty säännöllinen 7-kulmio $ABCDEFG$. Laske kolmion ACD ala.
10. Määrää a siten, että paraabelit $x^2 = 2y + 1 - \frac{1}{4a}$ ja $x^2 = a - 4y$ leikkaavat toisensa x -akselilla. Piirrä kuvio.

P I T K Ä O P P I M Ä Ä R Ä .

Tehtävät 1, 4, 5, 6 ja 8 kuten edellä.

Edellä olevat tehtävät 2, 3, 7, 9 ja 10 korvataan seuraavilla:

2. Millä $x:n$ arvoilla suppenee päättymätön geometrinen sarja $1 + \frac{2x}{x+1} + (\frac{2x}{x+1})^2 + \dots$ ja mikä sen summa on tällöin?
3. Minkä yhtälön tulee vallita kertoimien p ja q välillä, jotta yhtälöillä $x^2 + px + q = 0$ ja $x^2 + qx + p = 0$ olisi yksi ja vain yksi yhteinen juuri? Määrää yhteinen juuri ja muut juuret yksinkertaisimmassa muodossaan.
7. Lausu annetun ympyrän ympäri piirretyn suorakulmaisen kolmion ala toisen kateetin funktiona ja määrää alan minimiarvo.
9. Kolmion ABC sivut AB , BC ja CA suhtautuvat toisiinsa kuten 7:5:3. Sivun AB piste P jakaa tämän sivun siten, että $AP:PB = 3:10$. Laske kulmat ACP ja BCP .
10. Määrää a siten, että paraabelit $x^2 = 2y + 1$ ja $x^2 = a - 4y$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti (s.o. leikkauspisteeseen piirretyt sivuajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan). Piirrä kuvio.