

YLIOPIILASTUTKINTO KEVÄÄLLÄ 1948. MATEMATIIKKA. LYHYT OPPIMÄÄRÄ.

1. Kahdesta positiivisesta luvusta toinen kasvaa $p\%$ ja toinen $q\%$. Kuinka monta $\%$ lukujen keskiarvo tällöin kasvaa? Sovella tulos esimerkkiin $p = 21$, $q = 44$.
2. Paikkakunnat A, B ja C ovat kärkinä suorakulmaisessa kolmiossa, jossa $AC = CB = 100$ km. Kolmion sivuja myöten kulkee autotie. Kolmio kuuluu A:ssa asuvan palotarkastajan alueeseen. Hälytyksen sattuessahan voi joko heti lähteä jossakin tien varrella sijaitsevalle palopaikalle autolla, joka kulkee 80 km/t, tai odottaa tunnin lentokonetta, joka nopeudella 200 km/t vie hänet suoraan B:hen, mistä sitten auto heti vie hänet perille nopeudella 80 km/t. Minkä ajan kuluttua hälytyksestä hän voi olla perillä sijainniltaan epäedullisimmalla palopaikalla?
3. Määrää $a:b$ siten, että yhtälöiden $bx + ay = a^2 - b^2$, $ax + by = a^2 + b^2$ kalla? junnipari toteuttaa myös yhtälön $ax - by = a^2 - b^2$.
4. Osoita, että suorien $2x + y = 3$, $x - y = 3$, $x + y = -1$ ja $x - 2y = -4$ rajoittaman kuperan nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä. Laske ympyrän keskipisteen koordinaatit ja säde. Piirrä tarkistukseksi ympyrä käyttäen keskipisteen koordinaatteja ja laskettua sädettä sekä nelikulmio.
5. Todista yhdenmuotoisiksi kolmiot, joiden kaikki sivut ovat vastaavasti verrannolliset.
6. Kahden toistensa ulkopuolella olevan ympyrän sisäpuoliset yhteiset tangentit leikkaavat niille piirretyn ulkopuolisen yhteisen tangentin pisteissä A ja B. Todista, että jana AB on = sivuamispisteiden välinen sisäpuolisen tangentin osa.
7. Säännöllisen 8-kulmion ABCD... kärjestä A piirretään lävistäjät AC ja AD. Laske kolmioiden ACD ja ABC alojen suhteen tarkka arvo ja 3-desimaalinen likiarvo.
8. Pallon pinta on $3/2$ kertaa niin suuri kuin palloon piirretyn lieriön koko pinta. Määrää lieriön korkeuden ja pohjan säteen suhde, sekä pallon pinnan ja lieriön vaipan alan suhde.
9. Suoran ympyräpohjaisen kartion sivujana on $7,25$ cm ja vastakkaisten sivujanojen välinen kulma $57^{\circ}26'$. Laske kartion tilavuus.
10. Määrää sen logaritmijärjestelmän kantaluku, jossa luvun logaritmi on puolet saman luvun briggsiläisestä logaritmista.

PITKÄ OPPIMÄÄRÄ.

Tehtävät 1, 4, 5, 6 ja 7 kuten edellä.

Edellä olevat tehtävät 2, 3, 8, 9 ja 10 korvataan seuraavilla:

- 2 (HUOM! Siviilikokelaille) Päättymättömän geometrisen sarjan viiden ensimmäisen termin summa on puolet jäljellä olevien jäsenten summasta ja sen kahden ensimmäisen termin summa on $= 2$. Määrää sarjan kolme ensimmäistä jäsentä viidesi-maalisten logaritmitaulujen antamalla tarkkuudella.
- 2 (HUOM! Sotilasyliloppilaskokelaille) Tutki, mitä arvoja funktio $\frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$ saa x :n saadessa kaikki reaaliarvot, sekä määrää funktion ääriarvot. Piirrä funktion kuvaaja.
3. Missä tason osissa sijaitsevat ne pisteet (x, y) , joiden koordinaatit antavat funktiolle $x^2 + y^2 - 1$ samanmerkkisen arvon kuin funktiolle $x + y$?
8. Pallon pinta on k kertaa niin suuri kuin palloon piirretyn lieriön koko pinta. Määrää lieriön korkeuden ja pohjan säteen suhde. Millä k :n arvoilla saadaan yksi lieriö, millä kaksi ja millä ei yhtään lieriötä?
9. Suoran ympyräpohjaisen kartion vastakkaisten sivujanojen välinen kulma on $49^{\circ}40'32''$. Laske kartioon piirretyn pallon ja kartion tilavuuksien suhde.
10. Mitkä terävät kulmat toteuttavat yhtälön $\operatorname{tg} x + \cot x = 4$?

1. Kun juna matkaa AB kulkiessaan pysähtyy väliasemilla, kuluu matkaan 10 % enemmän aikaa kuin jos se kulkisi pysähtymättä. Kuinka monta % olisi nopeutta lisättävä, jotta matkaan AB pysähtymisineen kuluva aika lyhenisi 15 %, jos väliasemilla pysähtymisiin kuluva aika pysyy muuttumatta?
2. Määrää luku, joka lisättynä kuhunkin luvusta a, b, c ja d tekee saadut summat verrannollisiksi. Kuinka käy, jos $a - b = c - d$?
3. Määrää ne x:n arvot, jotka antavat lausekkeelle $\frac{2 - 5x + 2x^2}{3 - 2x - x^2}$ po-sitiivisen arvon.
4. Laske sen kolmion painopisteen (keskijanojen leikkauspisteen) koordinaatit, jonka suora $5x + 3y = 6$ muodostaa yhdessä koordinaattiakselien kanssa. Tarkista tulos graafisesti.
5. Todista, että jos nelikulmion kaksi vastakkaista kulmaa on toistensa supplementtikulmia, niin sen ympäri voidaan piirtää ympyrä.
6. Kaksi yhtäsuurta ympyrää sivuaa toisiaan. Piirrä ympyrä, joka sivuaa annettuja ympyröitä ja toista niiden ulkopuolisista yhteisistä tangenteista.
7. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion piiri puolitetään hypotenuusan suuntaisella suoralla. Mihin suhteeseen tämä suora jakaa kolmion alan (tarkka arvo ja kolmidesim. likiarvo)?
8. Suoran ympyräpohjaisen lieriön sisään on piirretty kaksi kartiota siten, että niiden pohjat yhtyvät lieriön pohjiin ja kärjet ovat lieriön pohjien keskipisteissä. Kuinka suuri osa toisesta kartiosta on toisen sisällä?
9. Ympyränsektoriin, jonka keskuskulma on 120° , piirretään ympyrä, joka sivuaa sektorin kaarta ja säteitä. Laske tämän ympyrän ja sektorin alojen suhde (tarkka arvo ja kolmidesim. likiarvo).
10. Ympyrällä ja neliöllä on yhteinen keskipiste ja sama ala. Laske neliön ulkopuolella olevien ympyrän kaarien asteluku.

PITKÄ OPPIMÄÄRÄ:

Tehtävät 1, 3, 5, 6 ja 7 kuten edellä.

Edellä olevat tehtävät 2, 4, 8, 9 ja 10 korvataan seuraavilla:

2. Suorakulmion ABCD sivun AB keskipiste E yhdistetään C:hen ja D:hen. Sivun CD piste P yhdistetään A:han ja B:hen. Kuinka P on valittava, jotta suorien CE, DE, AP ja BP rajoittaman nelikulmion ala olisi mahdollisimman suuri?
4. Määrää a siten, että parabelit $y = x^2 + 3ax + 4a$ ja $y = -x^2 - ax + 2a$ sivuavat toisiaan. Tarkista tulos graafisesti.
8. Pallon puolisko on piirretty suoraan ympyräpohjaiseen kartioon siten, että niiden pohjat ovat samassa tasossa ja käyrät pinnat sivuavat toisiaan pitkin ympyrää. Näytä, että kappaleiden tilavuuksien suhde on = niiden käyrien pintojen alojen suhde.
9. Ympyränsektoriin, jonka keskuskulma on $= 2v$ (pienempi kuin 180°), piirretään ympyrä, joka sivuaa sektorin kaarta ja säteitä. Määrää tämän ympyrän ja sektorin alojen suhde. Laske taulukkojen antamalla tarkkuudella suhteen arvo, jos $v = 28^\circ 38' 52''$.
10. (SIVIILIKIRJOITTAJILLE) Suunnikkaan lävistäjä, jonka pituus on 1 m, muodostaa sivujen kanssa kulmat $23^\circ 17' 20''$ ja $54^\circ 22' 45''$. Laske suunnikkaan pitempi sivu.
10. (SOTILASYLIOPIILASKOKELAILLE) Neljäkkään (vinoneliön) lävistäjä, jonka pituus on 1 m, muodostaa sivun kanssa kulman $23^\circ 17'$. Laske neljäkkään sivu.