

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.- Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Ratkaise yhtälö  $(2 + \frac{3}{x})(4 - \frac{1}{5x}) = 0$ .
2. Näytä, että kokonaislukujen  $n-1$ ,  $n$  ja  $n+1$  kuutioiden keskiarvo on kokonaisluku, joka saadaan myös siten, että näiden lukujen summaan lisätään samojen lukujen tulo.
3. Määrä funktion  $(x+1)^3 - (x-1)^3$  pienin arvo.
4. Tasakylkisen kolmion kylkiä vastaan piirretyt mediaanit leikkaavat toisensa kohtisuorasti. Määrä kolmion kyljen ja kannan suhde ja kolmion huippukulma  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.
5. Suorakulmaisen kolmion kaksi kärkeä ovat  $B = (4, 0)$  ja  $C = (1, -2)$  sekä sen kateettien  $AC$  ja  $BC$  suhde  $1:2$ . Laske pisteen  $A$  koordinaatit.
6. Suorakulmaisen kolmion pienempää kateettia  $a$  jatketaan janalla  $2a$  ja suurempaa kateettia  $b$  lyhennetään janalla  $a$ . Määrä  $a:b$  siten, että saadun kolmion hypotenuusa kulkee annetun kolmion hypotenuusan keskipisteen kautta.
7. Pistemäinen valonlähde on annetulla etäisyydellä  $c$  pallon keskipisteestä ja valaisee kuudennen osan sen pinnasta. Laske pallon säde.
8. Funktio  $f$  saa kohdassa  $x = 0$  arvon  $a$  ja sen derivaatta  $f'$  arvon  $b$ . Muodosta funktion  $y = f^2$  erotusosamäärä lähtien  $x$ :n arvosta  $0$  ja määrä sen avulla tämän funktion derivaatta kohdassa  $x = 0$ .
9. Funktio  $f$  toteuttaa kaikilla  $x$ :n positiivisilla arvoilla epäyhtälöt
$$f(x) \leq \frac{1}{x} \quad \text{ja} \quad f(x) \leq 8x + 2.$$
Osoita, että kaikilla näillä arvoilla on  $f(x) \leq 4$ .
10. Osoita, että polynomin  $x^3 + (3-a)x^2 - 2ax$  ( $a > 0$ ) nollakohdat ovat lukujen  $-3$  ja  $a$  välissä.
11. Millä  $a$ :n arvolla paraabeli  $y = 2x^2 - x + 2$  sekä suorat  $y = 0$ ,  $x = a$  ja  $x = a+1$  rajoittavat mahdollisimman pienen alueen? Laske tämän alueen pinta-ala.
12. Luokassa on 6 poikaa ja 12 tyttöä. Luokan edustajiksi valitaan arpomalla kaksi oppilasta. Mikä on todennäköisyys sille, että ainakin toinen valituista on tyttö?

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.- Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Määrää  $a$  ja  $b$  siten, että  $f(x) = ax^4 + bx^3$  täyttää ehdot  $f(1) = 4$  ja  $f'(2) = 28$ .
2. Määrää ne kokonaiskerttoimiset kolmannen asteen polynomit, joiden nollakohdat ovat  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2} + 2i$  ja  $\frac{1}{2} - 2i$ .
3. Määrää  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{2 - \sqrt{x}}$ .
4. Ratkaise jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Ympyrä kulkee neliön kahden kärjen kautta ja sivuaa yhtä neliön sivua. Laske ympyrän säteen ja neliön sivun suhde.
  - b) Vektorit  $\vec{a}_1$  ja  $\vec{a}_2$  toteuttavat ehdot  $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$  ja  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ . Määrää vakiolle  $k$  sellainen arvo, että vektorin  $\vec{r} = \frac{1}{2} \vec{a}_1 - (1-k) \vec{a}_2$  pituus on  $ka$ .
5. Tiedetään, että  $f'(x) = \frac{1}{3x - 2}$  ja  $f(1) = 1$ . Laske  $f''(2)$  ja  $f(2)$ .
6. Määrää niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä  $x$ -akselista ja ympyrästä  $x^2 + y^2 = 1$ . Piirrä kuvio.
7. Lukujonon  $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  luvut muodostavat suppenevan geometrinen sarjan, jonka summa on 10. Laske lukujonon  $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \dots, \log a_n, \dots$  (kantaluku = 10) sadan ensimmäisen luvun summa (tarkka arvo).
8. Tutki, mitä arvoja funktio  $y = + \sqrt{2x + 1 + x^{-2}}$  saa, kun  $-1 \leq x \leq 3$ .
9. Osoita, että  $x$ :n arvoilla  $0 < x < \pi/3$  on  $\tan x < 2x$ .
10. Nelitahokkaassa ABCD on  $AC = BC = AD = BD = s$ . Mikä on nelitahokkaan suurin mahdollinen tilavuus?
11. Tarkastellaan kaikkia funktioita  $y = f(x)$ , joilla on seuraavat ominaisuudet:  $f(0) = 1$ ;  $f(2) = 4$ , ja välillä  $0 \leq x \leq 2$  on  $0 \leq f'(x) \leq 2$ . Määrää tämän perusteella mahdollisimmat ahtaajat rajoille  $f(1)$ . Esitä jokin mainitunlainen funktio, jolle  $f(1)$  yhtyy edellä saatuun alarajaan.
12. Olkoon  $E$  äärellinen tulosjoukko, jossa on annettu todennäköisyysfunktio  $P$ , sekä  $A$  ja  $\bar{A}$  tämän joukon komplementtitapauksia. Todista oikeaksi yhtälö  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ . - Mikä on todennäköisyys sille, että veikkaessa umpimähkään yksi kahdentoista ottelun sarake (vaihtoehdot 1, X ja 2) saadaan vähintään yksi ottelu oikein?

Käsitteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Laske ympyrän  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  keskipisteen etäisyys suorasta  $x + y = 2$ .
2. Ratkaise yhtälö  $2z + 3i\bar{z} + i = 0$  ( $z = x+iy$ ,  $\bar{z} = x-iy$ ,  $x$  ja  $y$  reaalilukuja).
3. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:  
a) Sievennä lauseke  $\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(\alpha - \frac{2\pi}{3})$  yksinkertaisimpaan muotoonsa.  
b) Laske vektoreiden  $\vec{u} = \cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j}$ ,  $\vec{v} = \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \vec{i} + \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \vec{j}$  ja  $\vec{w} = \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \vec{i} + \sin(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \vec{j}$  summa.
4. Suorakulmaisen kolmion suoran kulman puolittaja leikkaa hypotenuusan pisteessä P. Osoita, että P on yhtä etäällä hypotenuusan vastaisesta mediaanista (keskijanasta) ja korkeusjanasta.
5. Yhdensuuntaisten sivujen a ja b suuntainen jana jakaa puolisuunnikkaan kahteen yhtä suureen osaan. Laske tämän janan pituus.
6. Ensimmäisessä akselikulmassa olevan pisteen (a,b) kautta piirretään suora, joka erottaa positiivisista koordinaattiakseleista janat OP ja OQ. Määrä summan OP + OQ pienin arvo.
7. Laske käyrän  $y^2 = 2x + 1$  ja suoran  $x - y - 1 = 0$  rajoittaman alueen pinta-ala. Piirrä kuvio.
8. Laske ympyränsektorin sisäänpiirretyn ympyrän säteen ja sektorin kaaren pituuden suhde, kun keskuskulma on  $2\alpha$  ( $< \pi$ ). Mitä raja-arvoa tämä suhde lähestyy, kun kulma  $\alpha$  lähestyy nollaa?
9. Määrä vakiot A ja B siten, että
$$\int \sqrt{4x^2 + 3} dx = A x \sqrt{4x^2 + 3} + B \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 3}) + \text{integroimisvakio}.$$
10. Piirrä käyrä  $y = + \sqrt{|x|}$  sekä määrä pisteen (1,-2) lyhin etäisyys käyrästä.
11. Funktio  $f$  on derivoituva ja  $f'(x) = \frac{1}{2} f(x) - 1$  kaikilla  $x$ :n arvoilla; edelleen on  $f(0) = 2$ . Osoita, että  $f(x)$  on identtisesti 2.
12. Akselien joukkotuotannossa halkaisijan valmistusvirhe  $x$  on välillä  $(-a, +a)$ ; virhejakautuman tiheysfunktio on  $\frac{3}{4a} (1 - (\frac{x}{a})^2)$ . Kuinka monta prosenttia akseleista on sellaisia, joiden halkaisijan virhe on välillä  $(-a/2, +a/2)$ ?

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Määrää yhtälön  $(1 + x)^3 = 1$  reaaliuuret.
2. Määrää sen logaritmijärjestelmän kantaluku, jossa  $\log 4 = -2$ .
3. Käyrien  $y = x^3$  ja  $y = x^2$  leikkauspisteeseen  $(1,1)$  piirretään normaalit molemmille käyrille. Laske normaalien ja x-akselin rajoittaman kolmion pinta-ala.
4. Määrää luku  $a$  ( $\neq 0$ ) siten, että yhtälöparilla
 
$$\begin{cases} xy = 1/2 \\ x + ay = -2 \end{cases}$$
 on vain yksi ratkaisu.
5. Todista, että positiivisilla  $a$ :n ja  $b$ :n arvoilla on  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ , mutta  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .
6. Ympyrä, jonka säde on  $r$ , sivuaa kulman toista kylkeä ja erottaa toisesta kyljestä säteen pituisen jänteen. Ympyrän keskipiste on kulman sisällä ja etäisyydellä  $3r$  sen kärjestä. Laske kulma  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.
7. Kahden toistensa ulkopuolella olevan pallon säteet ovat  $R$  ja  $r$  ja keskipisteiden välimatka  $a$ . Missä pallojen keskipisteiden yhdyssuoralla olevissa pisteissä pallot näyttävät yhtä suurilta? Jos pallot ovat Maa ja Kuu:  $R = 6,4 \cdot 10^3$  km,  $r = 1,7 \cdot 10^3$  km ja  $a = 3,8 \cdot 10^5$  km, niin kuinka kaukana ko. pisteet ovat Maan keskipisteestä?
8. Kuinka suuri on paraabelin  $y = x^2 - 4x + 7$  lyhin etäisyys suorasta a)  $y = 1$ , b)  $y = x$ ?
9. Mikä positiivinen kokonaisluku  $n$  antaa lausekkeelle  $n^3 - 12n^2 + 42n$  pienimmän arvon?
10. Olkoot  $A$  ( $x = 0$ ),  $B$  ( $x = 2$ ) ja  $C$  ( $x = 3$ ) x-akselin kiinteitä pisteitä sekä  $P$  sen liikkuva piste (abskissa  $= x$ ). Olkoon  $y = f(x)$  funktio, joka ilmoittaa  $P$ -pisteen pisteistä  $A$ ,  $B$  ja  $C$  laskettujen etäisyyksien summan. Piirrä funktion  $f$  kuvaaja ja määrää funktion pienin arvo.
11. Funktio  $f(x)$  saa arvon 2, kun  $x = 1$ , ja arvon -4, kun  $x = 4$ , ja lisäksi on  $f''(x) = 0$  kaikilla  $x$ :n arvoilla. Laske  $f(3)$  ja  $f'(3)$ .
12. Millä todennäköisyydellä kolmesta umpimähkään valitusta henkilöstä ainakin kaksi on syntynyt samana viikonpäivänä?



1. Määrää vakio  $a$  siten, että yhtälön  $x^2 - x + 5a + 4 = 0$  juuret ovat toistensa käänteislukuja.
2. Millä  $x$ :n arvoilla funktio  $x^4 + 4x^3$  on kasvava?
3. Ratkaise yhtälöpari
$$(2x + 1)(3y - 2) = 0, \quad 2x + 3y + 4 = 0.$$
4. Laske yhdensuuntaisten suorien  $x - 2y = 3$  ja  $x - 2y = -1$  välinen etäisyys.
5. Ympyrään, jonka säde on 5, piirretään samalle puolelle keskipistettä yhdensuuntaiset jänteet  $AB = 5$  ja  $CD = 7$ . Laske pisteisiin  $A$  ja  $C$  piirrettyjen säteiden muodostama kulma  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella. (Pisteet  $A$  ja  $C$  ovat jänneiden keskinormaalin samalla puolella.)
6. Olkoon  $0 < a < 1/4$ . Todista, että  $1 - a > \frac{1}{1 + 2a}$ .
7. Montako prosenttia on positiivista lukua  $a$  suurennettava, jotta sen Briggsin logaritmi saisi lisäyksen  $0,1$ ? (Tarkka arvo ja likiarvo kahden numeron tarkkuudella.)
8. Säännöllisen kolmisivuisen särmiön pohjasärmän ja sivusärmän summa on  $s$ . Laske särmiön suurin mahdollinen tilavuus.
9. Määrää pienin positiivinen kokonaisluku  $a$ , jolla yhtälön  $x^2 + (a-2)x + a = 0$  juuret ovat reaalisia.
10. Paraabelilta  $y = x^2/2$  on valittu pisteet  $P = (1, 1/2)$  ja  $Q = (a, a^2/2)$  ( $a > 1$ ). Pisteiden  $P$  kautta piirretään paraabelin tangentti ja  $x$ -akselin suuntainen suora. Edellinen leikkaa suoran  $x = a$  pisteessä  $R$  ja jälkimmäinen pisteessä  $S$ . Määrää suhde  $RQ:SR$  sekä sen raja-arvo, kun  $a \rightarrow 1$ .
11. Osoita, että käyrän  $y = x + 1 + \frac{1}{x}$  tangentin ja asymptoottien rajoittaman kolmion ala ei riipu siitä, mihin käyrän pisteeseen tangentti on piirretty.
12. Arpakuutiota heitetään 10 kertaa. Mikä on todennäköisyys sille, että silmäluku 6 sattuu enintään yhden kerran? (Tarkka arvo ja likiarvo yhden numeron tarkkuudella.)

Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta

Huom. Puhtaaksikirjoitetussa kokeessa saa olla enintään 10 tehtävän käsittely.

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Millä  $x$ :n arvoilla funktio  $e^{-x} + x$  on kasvava?
2. Millä kertoimen  $m$  arvoilla suoralla  $y = mx + 2$  ja käyrällä  $y = x^3 - 3x + 2$  on vain yksi yhteinen piste?
3. Ympyrät, joiden säteet ovat 2, 3 ja 10, sivuavat toisiaan ulkopuolelta. Laske sen kolmion suurin kulma, jonka kärkinä ovat ympyröiden keskipisteet.
4. Tasakylkisen kolmion kanta on  $2a$  ja korkeus  $a$ . Määrä korkeusjanalta piste, jonka etäisyyksillä kolmion kärjistä on suurin mahdollinen summa, ja laske tämä summa.
5. Laske umpinaisen käyrän  $y^2 = x^2(1-x^2)$  ( $x \geq 0$ ) rajoittaman alueen pinta-ala.
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Suorakulmaisen suuntaissärmiön pinta-ala on  $2a^2$  ja samasta kärjestä lähtevien särmien summa  $2a$ . Laske särmiön lävistäjä.
  - b) Samasta pisteestä lähtevät vektorit  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$  ja  $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j}$  ovat suuntaissärmiön särminä. Osoita, että vektorin  $\vec{a}$  alku- ja loppupisteestä piirretyt särmiön lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
7. Määrä se piste, jossa ellipsin  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  pisteeseen  $(x_0, y_0)$  ( $y_0 > 0$ ) piirretty normaali leikkaa  $x$ -akselin. Mitä pistettä tämä piste lähestyy, kun  $(x_0, y_0)$  lähestyy pistettä  $(a, 0)$ ?
8. Funktio  $f$  on määritelty kaikilla reaaliarvoilla, ja yhtälö  $f(a+b) = f(a)f(b)$  toteutuu kaikilla arvopareilla  $a, b$ . Lisäksi on  $f(1) = 3$ . Määrä  $f(4)$ .
9. Osoita, että käyrä  $x^4 + y^2 = 1$  on ympyrän  $x^2 + y^2 = 3/2$  sisällä.
10. Luku  $a$  on yhtälön  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  juuri. Osoita, että myös  $a^2$  on sen juuri.
11. Osoita, ettei käyrän  $x = e^{2t} \cos t$ ,  $y = e^{2t} \sin t$  mikään normaali kulje origon kautta.
12. Yhtälön  $x^2 + px + q = 0$  kertoimiksi  $p$  ja  $q$  valitaan umpimähkään ja toisistaan riippumatta reaaliluvut väleiltä  $|p| \leq 2$ ,  $|q| \leq 2$ . Mikä on todennäköisyys sille, että yhtälön juuret ovat reaaliset?

Endast tio uppgifter får behandlas. Uppgifterna 11 och 12 fordrar kunskaper utöver den egentliga skolkursen. - Endast en lösning per papper.

1. Lös ekvationssystemet

$$x : y = 1 : 2, \quad x + 2y = 4.$$

2. Visa att det större av talen  $a$  och  $b$  är  $= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|$ .
3. Antag  $a > b > 0$ . Visa att  $a^3 - b^3 > (a-b)^3$ .
4. Definiera trianglars likformighet och bevisa satsen: Om triangeln  $\Delta_1$  är likformig med triangeln  $\Delta_2$  i skalan  $h$  och triangeln  $\Delta_2$  är likformig med triangeln  $\Delta_3$  i skalan  $k$ , så är triangeln  $\Delta_1$  likformig med triangeln  $\Delta_3$  i skalan  $hk$ .
5. Punkterna  $A = (2, -3)$  och  $B = (4, 5)$  avgränsar en båge på kurvan  $y = x^2 - 2x - 3$ . Bestäm den punkt på bågen, i vilken kurvans tangent är parallell med sekanten  $AB$ . Vilken är tangentens ekvation?
6. I kvadraten  $ABCD$  är sidans längd  $a$ . På sidorna  $AB$  och  $AD$  toges punkterna  $E$  och  $F$  så att  $AE = b$  och  $AF = c$  ( $b < a$ ,  $c < a$ ). Bestäm arean av den kvadrat i vilken en vinkel sammanfaller med den ursprungliga kvadrats vinkel  $C$  och det motsatta hörnet ligger på sträckan  $EF$ .
7. Kurvorna  $y = x^2 - x$  och  $y = -2x^3 + 3x^2 - x$  möts i två punkter. Huru stora vinklar bildar kurvorna (dvs. deras tangenter) med varandra i dessa punkter?
8. Funktionen  $f$  definieras på följande sätt:  $f(x) = x + 2$  då  $x < 0$ ;  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$  då  $x \geq 0$ . Bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet  $-2 \leq x \leq 2$ .
9. Bestäm volymen av det största rätta prismet med kvadratisk bas som kan inskrivas i en rät cirkelkon med höjden  $h$  och basradien  $r$ .
10. Visa att om  $x > 3$  så är
- $$x(x-4) + 4\log\{x(x+1)\} > 1 \quad (\text{logaritmsystemets bas} = 10).$$
11. Bestäm arean av området mellan kurvorna  $y = |x-2|$  och  $y = x^2 - 4x + 2$ .
12. Variablerna  $x, y, z$  antar följande åtta värdesystem:
- |       |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ : | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $y$ : | 1 | 1 | 2 | 4 | 0 | 7 | 3 | 1 |
| $z$ : | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 |
- Sätt ut punkterna  $(x, y)$ ,  $(y, z)$  och  $(z, x)$  i motsvarande koordinatsystem och bedöm av figurerna vilka två variabler som har den största inbördes korrelationen. Beräkna den motsvarande korrelationskoefficienten.

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Ratkaise yhtälöpari  $x+y = 3$ ,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ .
2. Laske suorien  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ,  $y = 2x-3$  ja  $y = -3x + 12$  rajoittaman kolmion pinta-ala.
3. Olkoot A, B ja C kolmion kulmat. Osoita, että  $\sin(A+B) + \sin(B+C) + \sin(C+A) = \sin A + \sin B + \sin C$ .
4. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) R-säteisen pallon sisään on piirretty suora särmiö, jonka pohja on tasasivuinen kolmio. Laske särmiön tilavuus, kun pohja-särmä on  $R\sqrt{2}$ .
  - b) Samasta pisteestä lähtevät vektorit  $\vec{a} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}$  ja  $\vec{c} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}\vec{j} - \vec{k})$  ovat tetraedrin särminä. Osoita, että tetraedri on säännöllinen.
5. Osoita, että funktio  $f(x) = \cos \alpha - \cos(2x + \alpha)$  ( $\alpha$  vakio) saa kuvaajansa kaikissa käännepisteissä saman arvon.
6. Yhtälö  $3x - 5 = |y - 1|$  määrittelee kaksi jatkuvaa funktiota  $y = f(x)$  ja  $y = g(x)$ , joiden kuvaajilla on yhteinen piste. Piirrä funktioiden kuvaajat ja laske se kulma, jonka ne muodostavat mainitussa pisteessä.
7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että
 
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < 1.$$
8. Laske käyrän  $y = \frac{1}{x}$  ja suoran  $x + ey + 1 + e = 0$  rajoittaman alueen pinta-ala (e Neperin luku).
9. Osoita, että funktio  $f(t) = \int_0^{\pi/2} (3t + 2 \sin x)^2 dx$  on toisen asteen polynomi, joka on kaikilla t:n arvoilla positiivinen.
10. Yhtälöiden  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$  ja  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$  kertoimet ovat reaaliset ja nollasta eroavat sekä toteuttavat yhtälön  $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$ . Osoita, että ainakin toisen yhtälön juuret ovat reaaliset.
11. Laske integraali  $\int_0^1 x(1-x)^p dx$  ( $p > 0$ ).
12. Lukujoukon  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  aritmeettinen keskiarvo on  $\bar{x}$  ja keskihajonta s. Osoita, että  $s^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \bar{x}^2$ .

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. Vain yksi tehtävä kullekin paperille

1. Laske lausekkeen  $\log 2 + \log 0,5$  tarkka arvo.
2. Kaksi  $r$ -säteistä ympyrää kulkee toistensa keskipisteiden kautta. Määrää ympyröiden yhteisen jängteen pituus.
3. Ensimmäisen asteen polynomi  $P(x)$  saa arvon  $-1$ , kun  $x = 0$ , ja arvon  $3$ , kun  $x = 1$ . Minkä arvon se saa, kun  $x = -1$ ?
4. Kuinka suuren terävän kulman suora  $3x - 2y - 6 = 0$  muodostaa pisteiden  $(-1, -2)$  ja  $(3, 1)$  yhdistysjanan kanssa? ( $0,1^\circ$  tarkkuus.)
5. Tutki käyttämättä taulukkoja, kumpi luvuista  $\sqrt{30}$  ja  $\sqrt[3]{165}$  on suurempi.
6. Kolmion  $ABC$  sivuilta valitaan pisteet  $D$ ,  $E$  ja  $F$  siten, että  $D$  puolittaa sivun  $BC$ ,  $E$  jakaa sivun  $AC$  suhteessa  $1:2$  ja  $F$  sivun  $AB$  samassa suhteessa. Määrää kolmioiden  $DEF$  ja  $ABC$  alojen suhde.
7. Osoita, että yhtälön  $x^2 - 2ax + b = 0$  ( $b \neq 0$ ) juurien käänteisluvut toteuttavat yhtälön  $bx^2 - 2ax + 1 = 0$ .
8. Määrää sellaiset vakion  $a$  arvot, että funktiolla
$$x^3 + 3ax^2 + 3(a+1)x + 1$$
ei ole ääriarvoja.
9. Osoita, että yhtälö  $2y - 2ax + a^2 = 0$  esittää kaikkia paraabelin  $2y = x^2$  tangentteja, kun vakio  $a$  vaihtelee saaden kaikki reaaliarvot.
10. Määrää vakiot  $a$  ja  $b$  siten, että epäyhtälö  $\frac{2x+a}{b-x} > 1$  toteutuu, jos ja vain jos  $-1 < x < 2$ .
11. Laske käyrän  $y(y-3) = 2x$  ja  $y$ -akselin rajoittaman alueen pinta-ala.
12. Lukujoukossa on 20 lukua  $= a$ ,  $k$  lukua  $= a-2$  ja loput  $k$  lukua  $= a+2$ . Kuinka suuri luvun  $k$  tulee vähintään olla, jotta lukujoukon keskiarjonta olisi  $> 1$ ?

Käsitteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Laske yhtälön  $x^2 + 2p^2x - p^4 = 0$  juurien erotuksen itseisarvo.
2. Ratkaise yhtälöpari  $2x + y = 1$ ,  $(2x + y)(x^2 - y^2) = 0$ .
3. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Olkoon  $AB$  se ympyrän  $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$  halkaisija, jonka jatke kulkee origon kautta. Määrittää pisteiden  $A$  ja  $B$  koordinaatit.
  - b) Määrittää reaalityyppinen  $r$  siten, että vektorien  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{b} = \vec{i} + r\vec{j}$  summa ja erotus ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
4. Laske käyrän  $y(y - 3) = 2x$  ja  $y$ -akselin rajoittaman alueen pinta-ala.
5. Määrittää vakio  $a$  siten, että funktiolla  $\frac{ax^2 - 6x + 4}{x^2 - x - 2}$  on äärellinen raja-arvo, kun  $x \rightarrow 2$ . Mikä tämä raja-arvo on?
6. Olkoon  $K_1$  kappale, joka syntyy kolmion  $ABC$  pyörähtäessä suurimman sivunsa  $AB$  ympäri, ja  $K_2$  kappale, joka syntyy saman kolmion pyörähtäessä kärjen  $C$  kautta sivun  $AB$  suuntaiseksi piirretyn suoran ympäri. Osoita, että kappaleiden  $K_1$  ja  $K_2$  tilavuuksien suhde ei riipu kolmion muodosta. Kuinka suuri on tämä suhde?
7. Määrittää  $\alpha$  (tarkka arvo) siten, että suorien  $\alpha x - y - 5 = 0$  ja  $x - 2y + 4 = 0$  välinen kulma on  $60^\circ$ .
8. Geometrisen sarjan ensimmäinen termi on 1 ja toinen  $\frac{1}{1-x}$ . Millä  $x$ :n arvoilla sarja suppenee? Olkoon  $x \geq 3$ ; kuinka suuri virhe (itseisarvoltaan) tällöin enintään tehdään, jos sarjan summan  $S$  sijasta käytetään sen viiden ensimmäisen termin summaa  $S_5$ ?
9. On tehtävä suorakulmion muotoinen aitaus, jonka yhtenä sivuna tai sivun osana on 10 metrin pituinen valmis suora seinä tai osa siitä ja jonka muun osan tekemiseen on käytettävissä 26 metriä aita. Kuinka suuri aitauksen ala enintään voi olla?
10. Osoita, että välillä  $-1 \leq x \leq 1$  on
 
$$x^4 - 6x^2 + 9x + 20 \geq 12 \cdot 2^x.$$
11. Osoita, että suoran  $x + y = 0$  jokainen piste on differentiaaliyhtälön  $y' - y = x$  jonkin integraalikäyrän minimipiste.
12. Eräs laatikko voi sitä heitettäessä jäädä kolmeen erilaiseen asentoon, joiden todennäköisyydet ovat 0,6, 0,3 ja 0,1. Mikä on todennäköisyys sille, että laatikkoa kolmesti heitettäessä ainakin yksi näistä tapauksista jää esiintymättä?

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Ratkaise yhtälö  $(2x + 1)^2 = 1$ .
2. Määrää origon etäisyys ympyrän  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$  keskipisteestä. Piirrä kuvio.
3. Suorakulmion sivujen keskipisteet ovat suunnikkaan kärkinä, ja tämän suunnikkaan sivujen keskipisteet ovat toisen suorakulmion kärkinä. Määrää suorakulmioiden alojen suhde.
4. Origosta lähtevillä xy-tason janoilla, joiden pituudet ovat 1 ja 2, on x-akselilla sama projektio, jonka pituus on 1/2. Määrää janojen välinen kulma  $0,1^{\circ}$ :n tarkkuudella.
5. Ratkaise yhtälö  $\frac{2ax + 1}{a + 1} = \frac{x + 1,5}{2}$  (a vakio ja  $\neq -1$ ). Onko yhtälö jollakin a:n arvolla identtinen?
6. Suora  $3x - 4y = 0$  leikkaa käyrän  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$  kahdessa pisteessä. Osoita, että näihin pisteisiin käyrälle piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
7. Olkoon  $f(x) = 1 - k^{-x}$  ( $k > 0$  ja  $\neq 1$ ). Osoita, että lausekkeen  $\frac{2f(1) - f(2)}{(f(1))^2}$  arvo on kantaluvusta k riippumaton.
8. Määrää a siten, että käyrän  $y = x^3 + ax^2 + 1$  pisteeseen  $(-1, a)$  piirretty tangentti kulkee origon kautta. Määrää saatua a:n arvoa vastaavan käyrän maksimi- ja minimipisteet. Piirrä kuvio.
9. Yhtälön  $x^2 + px + q = 0$  toinen juuri pysyy muuttumattomana ja toinen tulee kaksinkertaiseksi, kun kertoimiin p ja q lisätään 1. Määrää p ja q.
10. Ympyrään on piirretty kaksi yhtäsuurta jännettä AB ja CD, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Jänne AB jakaa CD:n kahteen osaan a ja b ( $a \neq b$ ). Laske ympyrän ala.
11. Määrää toisen asteen polynomi P, jolla on seuraavat ominaisuudet:  
 $P(0) = P'(1) = 1$  ja  $\int_{-1}^{+1} P(x) dx = 0$
12. Lottopelissä arvotaan lukujoukosta  $\{1, 2, \dots, 40\}$  kuusi eri lukua. Mikä on todennäköisyys sille, että kahdessa arvonnassa luku 1 saadaan kumpaankin arvottuun lukujoukkoon?

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Missä pisteessä suoran  $2y - x + 2 = 0$  suuntainen käyrän  $y = x^2$  tangentti leikkaa y-akselin?

2. Osoita, että  $\frac{-1 - \ln x}{x}$  on eräs funktion  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

integraalifunktio (eli kantafunktio), kun  $x > 0$ . Mitkä ovat muut funktion  $f$  integraalifunktiot?

3. Suorakulmaisen kolmion ABC kateetti BC halkaisijana piirretty ympyrä leikkaa hypotenuusan AB pisteessä D siten, että  $BD:DA = 5$ . Laske kulma A ( $0,1^\circ$ :n tarkkuus).

4. Ratkaise yhtälö  $\frac{\sin 2x}{\sin^2 x + \cos 2x} = 2$ .

5. Ratkaise yhtälö  $x|x| = 2x - 1$ .

6. Suoran  $y = x + 3$  ja käyrän  $y = 3 - x^2$  rajoittama äärellinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

7. Hyperbelin  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  pisteeseen  $P = (x_0, y_0)$ ,  $y_0 \neq 0$ , asetetaan normaali. Missä suhteessa  $P$  jakaa koordinaattiakselien väliin jäävän normaalin osan?

8. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

a) Säännöllisen kolmisivuisen pyramidin korkeus = pohjakolmion sivu (=a). Kuinka suuri enintään on pyramidin sisään mahtuvan pallon säde?

b) Toisiaan vastaan kohtisuorat vektorit  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  ja  $\vec{OC}$  ovat kolmisivuisen pyramidin OABC sivusärminä. Osoita, että O:sta pohjakolmiota ABC vastaan piirretyn korkeusjanan OD kantapiste D on kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste.

9. Oletetaan, että funktio  $f$  kaikilla muuttujan  $x$  reaaliarvoilla täyttää ehdon  $|f(x)| \leq \frac{|x|}{2}$ . Olkoon  $a_0$  reaaliluku. Merkitään  $a_1 = f(a_0)$  ja yleisesti  $a_n = f(a_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Todista, että lukujonolla  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  on äärellinen raja-arvo.

10. Määrää yhtälön  $x^4 + 2x^3 - 3 = 0$  reaalijuuret.

11. Etsi differentiaaliyhtälön  $y'' - 4y' + 4y = 4x$  yleinen ratkaisu sekä se yksityisratkaisu, joka arvolla  $x = 0$  saa arvon  $y = 0$  ja arvolla  $x = 1$  arvon  $y = 2$ .

12. Kuusinumeroinen puhelinnumero alkaa 4:llä ja muut numerot ovat määrättyneet sattumanvaraisesti. Millä todennäköisyydellä luvussa esiintyy ainakin kerran peräkkäin numerot 1 ja 3 tässä järjestyksessä?



Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Ratkaise yhtälö  $(2x + 3)^2 = 4x^2$ .

2. Määritä vakio  $a$  siten, että yhtälöparilla

$$2x - 5y + 5 = 0, \quad 2x - y + a = 0$$

on ratkaisu, joka täyttää ehdon  $x = y$ .

3. Ratkaise epäyhtälö  $(x - 2)^2 < 1$ .

4. Määritä vakio  $a$  siten, että paraabelin  $y = x^2 + ax + 2$  huippu on paraabelilla  $y = x^2$ . Piirrä kuvio.

5. Määritä polynomin  $P(x) = 3x - x^3$  suurin ja pienin arvo välillä  $0 \leq x \leq 2$ .

6. Piirrä käyrä  $y = + \sqrt{(1 - x)^2} + 1 + x$ .

7. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

a) Ympyrän säde on 5, ja pisteen  $A$  etäisyys ympyrän keskipisteestä on 8. Pisteen  $A$  kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän kehän pisteissä  $B$  ja  $C$  siten, että  $AB:BC = 1:2$ . Laske kaaren  $BC$  asteluku  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.

b) Olkoon  $O$  kolmion  $ABC$  sisällä oleva piste sekä  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  sivujen  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  keskipisteet. Osoita, että vektorisummat

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

ovat yhtäsuuret.

8. Kuinka suuri lisäys  $x$ :lle on arvosta  $1/2$  lähtien annettava, jotta funktion  $1/x$  lisäyksen itseisarvo olisi puolet  $x$ :lle annetusta lisäyksestä?

9. Suorakulmaisen kolmion  $ABC$  kateetin  $BC$  ( $= a$ ) keskipiste olkoon  $D$ . Piste  $E$  jakaa hypotenuusan  $AB$  siten, että  $AE:EB = 1:2$ . Lausu jana  $ED$  kateettien  $a$  ja  $b$  avulla.

10. Osoita, että lauseke  $16^r - 2 \cdot 8^r + 4^r$  on kaikilla  $r$ :n reaaliarvoilla  $\geq 0$ . Onko lauseke  $= 0$  jollakin  $r$ :n arvolla?

11. Funktio  $f$  määritellään seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{kun } x \leq 1, \\ -\frac{3}{8}x^2 + a, & \text{" } x > 1. \end{cases}$$

Määritä vakio  $a$  siten, että  $f$  on jatkuva kaikilla  $x$ :n reaaliarvoilla, sekä laske näin määrätyn funktion kuvaajan ja koordinaatti-akselien rajoittaman alueen pinta-ala.

12. Rahaa heitetään 10 kertaa. Mikä on todennäköisyys sille, että kruunu esiintyy enintään 8 kertaa? Tarkka arvo ja likiarvo laskuviivaimen antamalla tarkkuudella.

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

- Määritä vakiot  $a$  ja  $b$  siten, että funktio  $f(x) = a \sin x + b$  täyttää ehdot  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$ .
- Millä vakion  $a$  arvoilla yhtälöllä  $\frac{a}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 0$  ei ole reaali juuria?
- Ratkaise epäyhtälö  $\ln(2-x) + 1 < 0$ .
- Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - Tasakylkisen kolmion kannan suuntainen suora puolittaa sekä kolmion alan että sen piirin. Laske kolmion kyljen ja kannan suhde.
  - Paikkavektorit  $\vec{r}_1 = (a + \cos \phi)\vec{i} + \sin \phi \vec{j}$  ja  $\vec{r}_2 = (a - \sin \phi)\vec{i} + \cos \phi \vec{j}$  ( $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$  ja  $|a| < 1$ ) ovat kolmion sivuina. Laske kolmannen sivun pituus.
- Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - Olkoot  $x$  ja  $y$  reaalitykijät. Merkinneillä  $xoy$  tarkoitetaan tässä tehtävässä lauseketta  $2x+y+1$ . Osoita: On olemassa reaalitykijä  $a$  siten, että  $aoy = y$  kaikilla reaalitykijöillä  $y$ .
  - Ympyränsektorin säde on 1 ja keskuskulma  $60^\circ$ . Määritä se keskuskulman puolittajasäteeseen piste, joka on kauimpana sektorin piiristä. Perustelu.
- Olkoon  $(x_0, y_0)$  käyrän  $y = e^x$  piste. Osoita, että pisteiden  $(x_0 + y_0, e^{x_0 + y_0})$  ja  $(x_0 - y_0, e^{x_0 - y_0})$  välimatka on yhtä suuri kuin näiden pisteiden ordinattojen summa.
- Käyrän  $y = \frac{x+1}{x^2}$  ja suorien  $y = 0$ ,  $x = 1$  ja  $x = a$  ( $a > 1$ ) rajoittama alue pyörii  $x$ -akselin ympäri. Osoita, että syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on  $a$ :sta riippumattoman äärellisen rajan alapuolella.
- Määritä funktion  $e^{-x} \sin x$  ( $x \geq 0$ ) ääriarvot. Osoita, että funktion peräkkäiset maksimi- ja minimiarvot muodostavat geometrisen jonon (geometrisen sarjan).
- Laske käyrien  $x^2 + y^2 = 1$  ja  $y = |x-a|$  ( $|a| < 1$ ) leikkauspisteiden yhdistysjanan pituus.
- Jana  $a$  liikkuu siten, että sen toinen päätepiste on positiivisella  $y$ -akselilla ja toinen puolisuoralla  $2y = x$  ( $x \geq 0$ ). Määritä janan keskipisteen ordinatan suurin arvo.
- Määritä differentiaaliyhtälön  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$  yleinen ratkaisu. Osoita, että integraalikäyrillä on seuraava ominaisuus: Käyrän pisteeseen  $P = (x_0, y_0)$ ,  $x_0$  ja  $y_0 \neq 0$ , asetettu tangentti erottaa positiivisista koordinaattiakseleista janan, joiden summa pysyy muuttumattomana  $P$ :n liikuessa samalla integraalikäyrällä pitkin.
- Erään jatkuvan satunnaismuuttujan tulosjoukko on  $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$  ja jakautuman tiheysfunktio  $f(x) = \frac{C}{\sqrt{4-x^2}}$ . Laske vakio  $C$  ja jakautuman keskiarvo (odotusarvo).

Käsitteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietojen ja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Laske lausekkeen  $1 + 8^{-1/3} + 8^{-2/3}$  arvo.
2. Määritä vakio  $a$  siten, että polynomi  $x^2 + 2ax + a$  tulee jaolliseksi binomilla  $x - 1$ .
3. Olkoon  $D$  suorakulmaisen kolmion  $ABC$  hypotenuusan  $AB$  keskipiste. Missä suhteessa  $AD$  halkaisijana piirretty ympyrä jakaa kateetin  $AC$ ?
4. Ratkaise yhtälö  $|2x + 1| = 2$ .
5. Määritä ne suoran  $x = 3$  pisteet, joista pisteiden  $(1, -1)$  ja  $(5, 2)$  yhdistysjana näkyy suorassa kulmassa.
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

a) Ympyrän sisään piirretyn tasakylkisen kolmion kanta on  $a$  ja korkeus  $h$ . Laske ympyrän säde.

b) Taso peilataan  $x$ -akselin suhteen, ja sen jälkeen suoritetaan  $90^\circ$ :n kierto origo keskuksena. Mikä tulee olemaan pisteen  $(1, -2)$  kuvapiste?

7. Määritä vakiot  $a$ ,  $b$  ja  $c$  siten, että lauseke

$$ax(x - 1) + bx(x + 1) + c(x - 1)(x + 1)$$

saa arvoilla  $x = -1$ ,  $x = 0$  ja  $x = 1$  arvon 1. Sievennä lauseke, kun vakioilla on saadut arvot.

8. Kolmion yhtenä kärkenä on origo ja sen vastaisena sivuna käyrälle  $y = 6 - \frac{x^2}{2}$  piirretty  $x$ -akselin suuntainen, sen yläpuolella oleva jänne. Kuinka suuri kolmion ala enintään voi olla?
9. Määritä funktion  $\left(\frac{5}{4} - x\right)x^4$  ääriarvot. Piirrä funktion kuvaaja.
10. Millä vakion  $a$  arvoilla yhtälöillä  $x^2 + 3ax - 1 = 0$  ja  $x^2 + 2ax - 2 = 0$  on yhteinen juuri? Määritä tämä juuri.
11. Määritä

$$\lim_{a \rightarrow 1} \frac{1}{a - 1} \int_1^a (x^2 + 1) dx.$$

12. Lukujoukosta  $\{1, 2, \dots, 15\}$  otetaan umpimähkään kaksi lukua. Määritä todennäköisyys sille, että toinen niistä on pienempi ja toinen suurempi kuin 10.

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Osoita, että jos kaksi positiivilukua kumpikin jaetaan niiden keski-  
verrolla, niin saadut luvut ovat toistensa käänteislukuja.
2. Ympyrän sisään piirretyn tasakylkisen kolmion kanta on  $a$  ja korkeus  
 $h$ . Laske ympyrän säde.
3. Määritä funktion  $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$  suurin arvo välillä  $0 \leq x \leq 1$ .
4. Tehtaassa ryhdytään valmistamaan kannetonta litran vetoista suora-  
kulmaisen särmiön muotoista peltiastiaa, jonka pohja on neliö. Kuin-  
ka suureksi on valittava astian korkeuden ja pohjasärmän suhde, jotta  
peltiä kuluisi mahdollisimman vähän?
5. Origosta suoralle  $L$  piirretyn normaalin pituus on  $p$  ( $> 0$ ), ja nor-  
maali muodostaa positiivisen  $x$ -akselin kanssa kulman  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ).  
Mikä on suoran  $L$  yhtälö?
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:  
a) Säännöllisen kolmisivuisen pyramidin sivusärmät ( $= a$ ) ovat koh-  
tisuorassa toisiaan vastaan. Laske pyramidin korkeus.  
b) Pisteestä  $P$  lähtevät vektorit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{c}$  ovat kolmisivuisen pyra-  
midin sivusärminä. Määritä  $P$ :stä pohjakolmion painopisteeseen piir-  
retty vektori.
7. Määritä ne  $xy$ -tason pisteet, joissa on voimassa epäyhtälö  
 $x^2 \leq 4y(x - y)$ . Esitä tulos graafisesti.
8. Olkoot  $x$  ja  $a$  reaalitykkuja ja  $|x - a| < 1$ . Todista, että  
 $|x + 2a| < 1 + 3|a|$ .
9. Funktiosta  $f$  oletetaan, että  $f''(x) = e^x + e^{-x}$  ja  $f'(0) = 3/2$ .  
Millä  $x$ :n arvoilla  $f$  on kasvava?
10. Olkoon  $f$  annettu funktio,  $f''(x_0) > 0$ . Määritellään funktio  $g$  seu-  
raavasti:  $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ . Osoita, että  $g(x)$ :n  
itseisarvolla on ääriarvo pisteessä  $x_0$ , ja tutki ääriarvon laatua.
11. Määritä se differentiaaliyhtälön  $xy' + (x + 2)y = 0$  ratkaisu,  
joka arvolla  $x = 1$  saa arvon  $y = 2$ . Onko yhtälöllä ratkaisu, joka  
arvolla  $x = 0$  saa arvon  $y = 1$ ?
12. Piste liikkuu neliöruudukossa askeleittain ruudusta toiseen, suo-  
raan tai vinottain, niin että kaikki kahdeksan lähiruutua ovat yhtä  
todennäköisiä. Millä todennäköisyydellä piste on kolmen askeleen  
jälkeen jälleen lähtöruudussa? (Lähtöruutu on valittu siten, että  
piste ei liikkuessaan voi joutua reunaruutuun.)

1. Ratkaise yhtälöpari  $\frac{1}{x} + y = 1$ ,  $\frac{1}{x} - y = 2$ .
2. Ratkaise yhtälö  $(3x + 2)(2x - 3) = 3x + 2$ .
3. Ratkaise epäyhtälö  $2x < x^2$ .
4. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Mikä on sen logaritmijärjestelmän kantaluku (kanta), jossa  $\log 18 = \log 9 + 1$ ?
  - b) Eräässä havaintojoukossa esiintyi luku -1 viisi kertaa, luku 0 neljä kertaa, luku 1 kaksi kertaa ja luku 3 yhden kerran. Laske jakautuman keskihajonta.
5. Yhtälön  $x^2 + bx + c = 0$  toinen juuri on 1. Määritä vakiot  $b$  ja  $c$  siten, että juurien keskiarvo on  $5/2$ .
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Laske sen ympyrän säde, jonka keskipiste on suoralla  $x - y + 2 = 0$  ja joka sivuaa suoraa  $2x - y - 10 = 0$  pisteessä  $(6, 2)$ .
  - b) Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat suora  $x + y - 2 = 0$  ja paraabeli  $y = x^2$ .
7. Suorakulmaisen kolmion terävä kulma on  $\alpha$ . Sen vastainen kateetti halkaisijana piirretään ympyrä. Missä suhteessa tämän kehä jakaa kolmion hypotenuusan? Mikä on tulos erikoistapauksessa  $\alpha = 30^\circ$ ?
8. Millä  $x$ :n arvoilla funktio  $\lg(x - x^2)$  on määritelty? Mikä on funktion suurin arvo?
9. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Olkoot A ja B suoria ympyräpohjaisia kartioita. A:n korkeus on  $h$  ja pohjan säde  $r$ . Kartio B on asetettu A:n sisään siten, että B:n kärki on A:n pohjaympyrän keskipisteessä ja B:n pohjaympyrän kehä on A:n vaipalla. Kuinka suuri voi B:n tilavuus enintään olla?
  - b) Funktio  $f$  määritellään seuraavasti:
$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kun } x \leq 0, \\ 2x - x^2, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$
Mikä on funktion suurin arvo välillä  $|x| \leq 2$ ?
10. Olkoot  $a$  ja  $b$  positiivisia lukuja sekä  $a > b^2$  ja  $b > a^2$ . Osoita, että  $a < 1$  ja  $b < 1$ .

1. Suora  $L$  on suoran  $3x + 4y = 5$  suuntainen ja kulkee pisteen  $(3, -2)$  kautta. Missä pisteessä  $L$  leikkaa  $x$ -akselin?
2. Yhtälöllä  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$  on juuri  $-2$ . Mitkä ovat muut juuret?
3. Määritä lausekkeen  $-2x^3 + 3x^2 + 12x + 5$  suurin ja pienin arvo välillä  $-2 \leq x \leq 0$ .
4. Määritä yhtälön  $5 \cos^2 \frac{x}{10} = 0$  kaikki juuret absoluuttimitassa (radiaaneissa).
5.  $AB = 2r$  on ympyrän halkaisija ja  $AC$  sen jänne. Kuinka suuri jänteen  $AC$  keskipisteen kohtisuora etäisyys halkaisijasta  $AB$  voi enintään olla?
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Kahden toisiaan vastaan kohtisuoran tason muodostamassa kourussa on kaksi palloa  $A$  ja  $B$ . Pallon  $A$  säde on  $r$ . Kuinka suuri on  $B$ :n säde, jos se voi vieriiä kourussa  $A$ :n ohi tätä koskettamatta?
  - b) Samasta pisteestä lähtevät vektorit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{c}$  toteuttavat yhtälön  $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . Osoita, että vektorien loppupisteet ovat samalla suoralla.
7. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Missä  $xy$ -tason pisteissä luku  $z + z^{-1}$  on reaalinen? ( $z = x + iy$ )
  - b) Olkoot  $p$  ja  $q$  mielivaltaisesti valitut positiiviset kokonaisluvut. Millä todennäköisyydellä luvut  $2p + q$  ja  $p + 2q$  ovat kolmella jaollisia?
8. Määritä sellainen lukupari  $(x, y)$ , että lauseke  $x^2 + y^2 - 2x$  saa pienimmän mahdollisen arvonsa.
9. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Suora  $L$  kulkee puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspisteen kautta ja on yhdensuuntaisten sivujen  $a$  ja  $b$  suuntainen. Laske  $L$ :stä puolisuunnikkaan sisään jäävän janan pituus.
  - b) Olkoon  $y(x)$  se differentiaaliyhtälön  $y' = 4xy^2$  ratkaisu, joka täyttää ehdon  $y(1) = -1/4$ . Laske
$$\int_{-1}^1 y(x) dx .$$
10. Funktiosta  $f$  oletetaan, että  $f'(x) = |x - 2|$  ja  $f(3) = 1$ . Laske
$$\int_0^3 f(x) dx .$$

1. Lausu  $x/y$  mahdollisimman yksinkertaisena murtolukuna, kun
$$x = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24}.$$
2. Minkä luvun logaritmi on  $-3$  siinä järjestelmässä, jonka kantaluku (kanta) on  $2$ ? Tarkka arvo.
3. Kuinka monta juurta on yhtälöllä  $|x - 2| + 1 = 0$ ?
4. Suora  $y = kx$  leikkaa paraabelit  $y = px^2$  ja  $y = qx^2$  ( $p > 0$ ,  $q > 0$ ). Määritä paraabelien tästä suorasta erottamien jänneiden pituuksien suhde. Tarkista tulos piirtämällä kuvio, kun  $p = 1$ ,  $q = 1/2$  ja  $k$  saa arvot  $1/2$  ja  $1$ .
5. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Laske pisteen  $(5, 4)$  lyhin etäisyys ympyrästä
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0.$$
Tarkka arvo ja kaksinumeroinen likiarvo.
  - b) Millä  $x$ :n arvoilla on funktio  $f$ :  $f(x) = +\sqrt{x-1}$  määritelty? Millä välillä on olemassa käänteisfunktio  $f^{-1}$ ? Laske  $f^{-1}(2)$ .
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Ympyrä, jonka keskipiste on tasasivuisen kolmion yhdellä sivulla, sivuaa kolmion muita sivuja. Laske ympyrän alan suhde kolmion alaan.
  - b) Laske sen alueen ala, jota rajoittavat paraabeli  $y = x^2 - 2x - 3$  ja  $x$ -akseli.
7. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Pisteen  $(8, -1)$  kautta asetetaan normaali suoralle  $5x - 2y + 16 = 0$ . Laske sen kuperan nelikulmion ala, jota rajoittavat mainitut suorat ja koordinaattiakselit.
  - b) Perheessä on kolme lasta. Mikä on todennäköisyys sille, että lapset ovat syntyneet kaikki eri viikonpäivinä?
8. Määritä  $y$ -akselin suuntainen suora, joka leikkaa käyrät  $y = x^3 - 4x$  ja  $y = x^2/2$  siten, että leikkauspisteisiin asetetut tangentit ovat yhdensuuntaiset. Kaikki ratkaisut.
9. Luvut  $a_1, a_2, a_3$  ovat rajojen  $m$  ja  $M$  välissä:
$$m \leq a_1 \leq M, \quad m \leq a_2 \leq M, \quad m \leq a_3 \leq M.$$
Luvut  $p_1, p_2, p_3$  ovat positiivisia. Todista, että
$$m \leq \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3}{p_1 + p_2 + p_3} \leq M.$$
Millä ehdolla jompikumpi yhtäsuuruusmerkki on voimassa?
10. Määritä kaksi peräkkäistä  $k$ :n kokonaislukuarvoa, jotka antavat lausekkeelle  $(k-2)/(k^2-k)$  saman arvon.

1. Ratkaise yhtälö  $x^2 + 4x + 4 = x^2(x + 2)$ .
2. Mitkä reaaliset lukuparit  $x, y$  toteuttavat yhtälön  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$ ?
3. Ratkaise yhtälö  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{3}{2} \cos x$ , kun  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
4. Kolmiossa on yksi kulma  $60^\circ$  ja tämän viereisten sivujen suhde 1:3. Laske kolmion muut kulmat ( $0,1^\circ$ :n tarkkuudella).
5. Piste P on kolmion ABC sivulla AB, Q sivulla BC ja R sivulla CA siten, että  $AP:PB = BQ:QC = CR:RA = 1:2$ . Laske kolmioiden PQR ja ABC alojen suhde.
6. Funktio  $f$  on määritelty rationaalilukujen joukossa, ja  $f(a+b) = f(a) + f(b)$  kaikilla rationaaliluvuilla  $a, b$ ; lisäksi  $f(2) = 3$ . Laske  $f(3/2)$ .
7. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Erään suppenevan geometrisen sarjan summa ( $\neq 0$ ) on kolmasosa sen termien neliöiden muodostaman sarjan summasta. Minkä lukujen välissä on ensinmainitun sarjan ensimmäinen termi?
  - b) Samasta pisteestä lähtevät vektorit  $\vec{PA} = \vec{a}$  ja  $\vec{PB} = \vec{b}$  ovat kolmion sivuina ja BC on kolmion korkeusjana. Lausu vektori  $\vec{BC}$  vektorien  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  avulla.
8. Määritä vakio  $\alpha$  ( $> 0$ ) siten, että  $\int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\ln x}{x} dx = 0$ .
9. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Määritä funktion 
$$f(x) = \frac{|2x - 1|}{|2x - 1| + 2x + 1} \quad (x \geq 0)$$
 suurin ja pienin arvo.
  - b) Erään siemenlajikkeen itämistodennäköisyys on  $2/3$ . Kuinka monta siementä on vähintään kylvettävä, jotta todennäköisyys sille, että niistä ainakin kaksi itää, olisi yli 95 %?
10. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Osoita, että tasossa on piste, joka on yhteinen kaikille ( $a$ :n ja  $b$ :n eri arvopareja vastaaville) ympyröille 
$$x^2 + y^2 - ax - by + 2a + b - 5 = 0.$$
  - b) Osoita, että differentiaaliyhtälöiden  $2xyy' - 1 - y^2 = 0$  ja  $(x^2 + 1)y' - 2xy = 0$  integraalikäyräparvet ovat toistensa kanssa symmetriset suoran  $y = x$  suhteen.



1. Laske  $3^0 - 3^{-2}$ .
2. Määritä vakio  $k$  siten, että luku 2 on yhtälön  $x^2 - 5kx + 4k^2 = 0$  juuri.
3. Ratkaise yhtälö  $(1 + \frac{1}{x})^2 = 1$ .
4. Määritä funktion  $x^3 - 3x^2$  suurin ja pienin arvo välillä  $-1/2 \leq x \leq 4$ . Piirrä kuvio.
5. Laske lausekkeen  $\lg 0,069 - \lg 0,00069$  tarkka arvo (Briggsin logaritmit).
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Laske pallon ympäri ja sisään piirrettyjen kuutioiden tilavuuksien suhde.
  - b) Kun tasossa toimitetaan ensin eräs yhdensuuntaissiirto ja sen jälkeen peilaus  $x$ -akselissa, niin piste  $(2, 1)$  joutuu pisteeseen  $(6, -3)$ . Mihin pisteeseen joutuu piste  $(-1, -3)$ ?
7. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Laske origosta ympyrälle  $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$  piirrettyjen tangenttien välinen kulma  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.
  - b) Kaksi miestä harjoittaa savikiekkoammuntaa. Sääntöjen mukaan jokainen kilpailija ampuu vuorollaan ilmassa lentävää savikiekkoa kohti laukauksen, ja mikäli kiekko ei säry, vielä toisen laukauksen. Miesten todennäköisyydet särkeä kiekko yhdellä laukauksella ovat  $2/5$  ja  $1/3$ . Mikä on todennäköisyys sille, että kummankin ampuessa yhtä kiekkoa ainakin toinen heistä saa kiekkonsa särjetyksi?
8. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Millä vakion  $a$  arvoilla yhtälön  $x^2 + 2(a-2)x + 1 = 0$  juuret ovat reaalisia, millä positiivisia?
  - b) Laske sen alueen ala, jota rajoittavat käyrä  $y = x^2 + 1$  ja  $x$ -akseli sekä suorat  $x = a$  ja  $x = a + 1$ . Määritä  $a$  siten, että mainittu ala on 2. Tarkka arvo ja likiarvo kahdella desimaalilla.
9. Määritä funktion  $(\frac{x}{2})^2 - \frac{|x-1|}{2}$  derivaatta ja piirrä derivaatan kuvaaja.
10. Tasakylkisen puolisuunnikkaan ABCD yhdensuuntaiset sivut ovat  $AB = 3a$  ja  $DC = 2a$  sekä korkeus  $= h$ . Puolisuunnikkaan sisään on piirretty tasakylkinen kolmio siten, että sen huippu on sivun AB keskipisteessä ja kanta AB:n suuntainen. Kuinka suuri kolmion ala enintään on?

1. Määritä se toisen asteen polynomi  $P$ , joka toteuttaa yhtälön  $P(x) - P'(x) = x^2$ .
2. Laske  $\cos x$  (tarkka arvo), kun  $\sin x = \frac{12}{13}$  ja  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ .
3. Piirrä käyrät  $y = |2x + 1|$  ja  $y = |3x - 2|$  sekä laske niiden leikkauspisteiden koordinaatit.
4. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Suora  $3x - 2y + 4 = 0$  leikkaa paraabelin  $y = \frac{1}{2}x^2$  pisteissä A ja B. Kuinka suuressa kulmassa jana AB näkyy origosta?
  - b) Millä muuttujan  $t$  arvoilla paikkavektorin  $\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + (3t + \frac{1}{2})\vec{j}$  loppupiste on paraabelilla  $y = \frac{1}{2}x^2$ ? Laske saatuja  $t$ :n arvoja vastaavien vektoreiden välinen kulma.
5. Ympyrän sisään piirretyn puolisuunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, ja sen yhdensuuntaiset sivut ovat  $a$  ja  $2a$ . Laske ympyrän säde.
6. Olkoon  $A = (-1,1)$  ja  $B = (1,1)$ . Määritä  $x$ -akselin piste  $P$  siten, että murtoviiva  $APB$  on mahdollisimman lyhyt.
7. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat koordinaattiakselit, käyrä  $y = \frac{1}{x+1}$  ja suora  $x = 2$ . Määritä tämän alan likiarvo korvaamalla käyrä sillä paraabelilla  $y = ax^2 + bx + c$ , joka kulkee käyrän pisteiden  $(0,1)$ ,  $(1, \frac{1}{2})$  ja  $(2, \frac{1}{3})$  kautta.
  - b) Ratkaise differentiaaliyhtälö  $\frac{dy}{dx} + y^2 = (\frac{y}{x})^2$  sekä piirrä pisteen  $(2,2)$  kautta kulkeva integraalikäyrä.
8. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Olkoon  $k > 1$  ja  $x \geq 0$ . Osoita, että  $x^k - 1 \geq k(x - 1)$ .
  - b) Erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio  $f(x) = ax + b$  välillä  $0 \leq x \leq 3$ ; muualla  $f(x) = 0$ . Määritä vakiot  $a$  ja  $b$  siten, että jakautuman keskiarvo (odotusarvo) on 1. Laske lisäksi todennäköisyyksille, että tämän satunnaismuuttujan arvo on vähintään 1.
9. Funktio  $f$  toteuttaa välillä  $-1 < x < 1$  yhtälön  $f(x) = 1 + 2x + x^2 f(x^2)$ , ja lisäksi  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Määritä  $f'(0)$  derivaatan määritelmän nojalla.
10. Olkoon  $z$  yhtälön  $x^2 + x + 2 = 0$  juuri. Määritä rationaaliluvut  $a$  ja  $b$  siten, että  $\frac{1}{z^2 - z + 1} = az + b$ .

1. Laske  $f(-5/2)$ , kun  $f(x) = \frac{-x/5 + 1/2}{4x/5 - 5/2}$ .
2. Suorakulmion kanta on 25 cm sekä kannan ja lävistäjän välinen kulma  $16,0^\circ$ . Laske suorakulmion pinta-ala.
3. Pisteen  $(5,0)$  kautta kulkeva suora muodostaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa kolmion, jonka ala on 5. Mikä on suoran yhtälö?
4. Ratkaise yhtälöpari  $x + 2y + 3 = 0$ ,  $2x + py + 1 = 0$ . Onko jokin vakion  $p$  arvo sellainen, että yhtälöparilla ei ole ratkaisua?
5. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Ratkaise epäyhtälö  $-2x^2 + 3x - 4 < 0$ .
  - b) Kirjahyllyssäni olevista viidestä jännityskirjasta olen lukenut kaksi, mutta en muista, mitkä kaksi. Lomalukemiseksi otan mainituista viidestä kirjasta kaksi umpimähkään. Mikä on todennäköisyys sille, että en ole lukenut näistä kumpaakaan?
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Tasakylkisen kolmion kannan vastainen korkeusjana halkaisijana piirretty ympyrä jakaa kolmion kyljet suhteessa 4:1 (huipusta lukién). Laske huippukulma  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.
  - b) Vektoreilla  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  on yhteinen alkupiste  $(2,1)$ . Vektorin  $\vec{a}$  loppupiste on  $(5,1)$  ja vektorin  $\vec{b}$   $(6,5)$ . Laske vektorien skalaaritulo.
7. Määritä vakio  $a$  siten, että käyrän  $y = ax - \frac{x^3}{3}$  ääriarvopisteet ovat suoralla  $y = 2x$ . Piirrä saatua  $a$ :n arvoa vastaava käyrä.
8. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Määritä suoralta  $x = 3$  ylemmästä puolitasosta sellainen piste  $P$ , että ympyrä  $x^2 + y^2 - 3x = 0$  jakaa origosta pisteeseen  $P$  piirretyn janan suhteessa 1:3.
  - b) Suoran  $y = kx$  ( $k > 0$ ) ja käyrän  $y = x^2$  leikkauspisteet olkoot  $O$  (origo) ja  $P$ . Olkoon  $Q$  pisteen  $P$  projektio  $x$ -akselilla. Käyrä  $y = x^2$  jakaa kolmion  $OPQ$  kahteen alueeseen. Osoita, että näiden alueiden alojen suhde on riippumaton vakion  $k$  arvosta.
9. Olkoon  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . Määritä  $f'(0)$  derivaatan määritelmän nojalla.
10. Pisteiden  $A = (-1,6)$  ja  $B = (3,-8)$  väliseltä janalta on määritettävä piste  $(x,y)$  siten, että  $|x + y|$  on mahdollisimman suuri.

1. Ratkaise yhtälö  $\sqrt{x+1} = x - 5$ .
2. Laske integraali  $\int_0^1 (x-1)^3 dx$ .
3. Muunna lauseke  $\sin(x - \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4})$  sellaiseen muotoon, josta näkyy lausekkeen suurin arvo. Mikä on tämä suurin arvo?
4. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Laske sen kolmion ala, jonka kärjet ovat  $A = (3, -2)$ ,  $B = (2, 1)$  ja  $C = (-1, 3)$ .
  - b) Laske sen kolmion ala, jonka kahtena sivuna ovat samasta pisteestä lähtevät vektorit  $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j}$  ja  $\vec{b} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$ .
5. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Funktio  $f$  toteuttaa kaikilla  $x$ :n arvoilla epäyhtälön  $f'(x) > kf(x)$  ( $k$  vakio). Olkoon  $g(x) = e^{-kx}f(x)$ . Osoita, että funktio  $g$  on kaikkialla kasvava.
  - b) Ratkaise differentiaaliyhtälö  $x \frac{dy}{dx} = 2y - 1$  sekä piirrä pisteen  $(-2, 1)$  kautta kulkeva integraalikäyrä.
6. Osoita, että lausekkeen  $\frac{a \log b}{ac \log b} - \frac{a \log d}{c \log d}$  arvo on riippumaton luvuista  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$ .
7. Määritä se puoliympyrässä kulkeva käyrä, jonka pisteet ovat yhtä etäällä puoliympyrän kaaresta ja halkaisijasta. Laske niiden osien alojen suhde, joihin käyrä jakaa puoliympyrän.
8. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
  - a) Olkoot  $A$  ja  $B$   $y$ -akselin suuntaisen suoran ja ympyrän  $x^2 + y^2 = 9$  leikkauspisteet sekä  $C$  piste  $(7, 0)$ . Kuinka suuri kolmion  $ABC$  ala on enintään?
  - b) Olkoot  $x$  ja  $y$  positiivisia kokonaislukuja. Määritä kokonaisluku  $n$  siten, että ehdon  $x < y < n$  täyttävien lukuparien  $(x, y)$  määrä on  $10(n-1)$ . Mikä on todennäköisyys sille, että näistä umpimähkään valittu lukupari  $(x, y)$  toteuttaa lisäehdon  $x + y \leq n$ ?
9. Laske integraali  $I(x) = \int_0^x |\sin t| dt$ , kun a)  $0 \leq x \leq \pi$ , b)  $\pi < x \leq 2\pi$ .  
Piirrä käyrä  $y = I(x)$  välillä  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
10. Säännöllisen 7-kulmion sivu on  $s$  ja erisuuret lävistäjät  $d_1$  ja  $d_2$ . Osoita, että  $1/d_1 + 1/d_2 = 1/s$ .

Tehtävissä 6, 8 ja 10 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä taulukon avulla terävä kulma  $x$ , kun  $\cos x = 0,167$ .
2. Millä  $x$ :n arvoilla polynomifunktion  $5x^2 + 2x + 1$  derivaatta on  $= -1/2$  ?
3. Ratkaise epäyhtälö  $2(3x - 2)^2 - \frac{1}{2} < 0$  .
4. Määritä  $x$ , kun  $\lg(x - 2) + \lg(x + 3) = \lg 14$  .
5. Ratkaise yhtälöryhmä  $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 2$ ,  $\frac{2}{y} - \frac{1}{x} = 2$ ,  $x + y = 0$  .
6. a) Eräässä havaintosarjassa esiintyi  $n$  kertaa luku 1,  $2n$  kertaa luku 2 ja  $n$  kertaa luku 4. Laske havaintosarjan keskiarvo ja keskihajonta (tarkka arvo ja likiarvo kahdella desimaalilla).  
b) Laske pallon sisään piirretyn kuution pinta-ala, kun pallon halkaisija on 5,11 cm.
7. Määritä polynomifunktion  $3x^4 + 4x^3$  derivaatan suurin ja pienin arvo välillä  $-2 \leq x \leq 0$  .
8. a) Funktio  $f$  määritellään seuraavasti:  
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 2)^2, & \text{kun } -2 \leq x \leq 0, \\ 2 - \frac{x^2}{2}, & \text{kun } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$
  
Piirrä käyrä  $y = f(x)$  sekä laske sen ja  $x$ -akselin rajoittaman alueen ala.  
b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan vastainen korkeus on 2 ja kateettien suhde 2:3. Laske hypotenuusa.
9. Määritä vakio  $a$  lukujen 0 ja 2 välistä siten, että suoran  $(2a + 1)x + (a - 2)y - 1 = 0$  ja koordinaattiakselien rajoittaman kolmion ala on mahdollisimman pieni. Kuinka suuri on tämä ala?
10. a) Vektoreille  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{c}$  pätee:  $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$ ,  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ . Määritä  $|\vec{c}|$ .  
b) Tasakylkiseen kolmioon ABC on piirretty suorakulmio DEFG siten, että kärjet D ja E ovat kannalla AB, F sivulla BC ja G sivulla AC. Määritä kolmion ABC kannan ja korkeuden suhde siten, että suorakulmion DEFG piiri on riippumaton pisteen D valinnasta.

Tehtävissä 5, 6, 7 ja 8 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä luku  $a$  siten, että  $\int_{-a}^a (x^2 + ax)dx = 1/12$ .
2. Neliön sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, keskipiste origossa ja kärjet käyrällä  $x^2 + 2y^2 = 4$ . Laske neliön sivu.
3. Millä vakion  $a$  arvoilla polynomifunktion  $x^3 + ax^2 + 3x$  derivaatta on kaikkialla positiivinen?
4. Ratkaise yhtälö  $1 + \sin 2x = \cos 2x$ .
5. a) Olkoon  $A$  joukko  $\mathbb{R} - \{2\}$ ,  $B$  joukko  $\mathbb{R} - \{1\}$  ja  $f$  kuvaus  $A \rightarrow B$ :  
 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  ( $\mathbb{R}$  reaalilukujen joukko). Osoita, että  $f$  on bijektio.  
 b) Ratkaise yhtälöpari  $x + y = 5$ ,  $x^3 + y^3 = 35$ .
6. a) Pisteestä  $P$  kolmion  $ABC$  kärkiin piirretyt vektorit ovat  $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$  ja  $\overrightarrow{PC} = 3(\vec{b} - \vec{a})$ . Lausu  $P$ :stä mediaanin  $AD$  keskipisteeseen  $Q$  piirretty vektori vektoreiden  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  avulla.  
 b) Ympyränsektorin  $OAB$  sisään piirretty ympyrä sivuaa sädettä  $OA$  pisteessä  $P$ , ja  $OP:PA = 2:1$ . Laske sektorin keskuskulma  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.
7. a) Pisteiden  $(0,1)$  ja  $(t,0)$  kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän  $x^2 + y^2 - y = 0$  pisteissä  $(0,1)$  ja  $(u,v)$ . Lausu  $u$  ja  $v$   $t$ :n funktioina.  
 b) Kolmihenkisen toimikunnan jäsenet valitaan arvalla kolmen naisen ja viiden miehen joukosta. Millä todennäköisyydellä ainakin kaksi miestä joutuu toimikuntaan?
8. a) Käyrän  $y = a/\sqrt{x}$  ( $a > 0$ ) pisteiden  $P = (x_1, y_1)$  ja  $Q = (x_2, y_2)$  kautta piirretyt  $y$ -akselin suuntaiset suorat rajoittavat käyrän ja  $x$ -akselin kanssa alueen  $A$ . Vastaavasti  $P$ :n ja  $Q$ :n kautta piirretyt  $x$ -akselin suuntaiset suorat rajoittavat käyrän ja  $y$ -akselin kanssa alueen  $B$ . Osoita, että  $A$ :n ja  $B$ :n alojen suhde on pisteistä  $P$  ja  $Q$  riippumaton.  
 b) Määritä ne käyrät, jotka leikkaavat positiivisen  $y$ -akselin ja joiden jokaisessa pisteessä  $(x,y)$  tangentin kulmakerroin on  $x/4y$ . Millä välillä ovat tämän kulmakertoimen kaikki arvot?
9. Piirrä  $xy$ -tasoon alue, jonka määrittelevät epäyhtälöt  $|y| < x + 2$ ,  $|y| > 3x$ . Mitkä arvot lauseke  $|x - y|$  saa tässä alueessa?
10. Osoita, ettei mikään kokonaislukupari  $(x,y)$  toteuta yhtälöä  $x^2 - y^2 + x - y + 1 = 0$ .

Tehtävissä 2 ja 8 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $ax^2 + 2a^2x - 3a^3 = 0$  ( $a \neq 0$ ).

2. a) Kolmio  $A'B'C'$  on yhdenmuotoinen kolmion  $ABC$  kanssa kaavassa (mittakaavassa)  $3/4$ , ja sivu  $A'B' = 3,15$  cm. Laske  $A'B'$ :n vastinsivu  $AB$ .

b) Laske  $\int_{-1}^0 3x^2 dx$ .

3. Ratkaise yhtälöpari  $x(2x + y) + y = 0$ ,  $2x + y = 1$ .

4. Kolmion kaksi kärkeä ovat  $A = (-1, 2)$  ja  $B = (2, 4)$ , ja kolmas kärki  $C$  on  $x$ -akselilla. Määritä  $C$  siten, että sivujen  $AC$  ja  $BC$  neliöiden summa saa pienimmän arvonsa.

5. Osoita, että paraabelin  $y = \frac{1}{2}x^2 + ax + 1$  huippu on paraabelilla  $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$  kaikilla kertoimen  $a$  arvoilla. Piirrä käyrät, kun  $a = 2$ .

6. Kumpi arvo,  $x = 0,751234$  vai  $x = 0,751235$ , antaa funktiolle  $2x^2 - 3x + 1$  suuremman arvon?

7. Määritä  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 36}$ .

8. a) Eräässä 30 oppilaan luokassa on matematiikan arvosanojen summa 219 ja niiden neliöiden summa 1637. Laske arvosanojen keskihajonta.

b) Puoliympyrän halkaisijan päätepisteestä  $P$  piirretään jänneet  $PA = a$ ,  $PB = b$  ja  $PC = c$  siten, että pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  jakavat puoliympyrän kaaren neljään yhtäsuureen osaan. Osoita, että keskimäinen jänne

$$b = \sqrt{(a^2 + c^2)/2}.$$

9. Määritä pisteen  $(2, 2)$  peilikuva (symmetrinen piste) suoran  $x - 2y - 2 = 0$  suhteen.

10. Millä reaalilla  $x$ :n arvoilla  $\sqrt{|x - 2| - 2x + 5}$  on reaalinen?

Tehtävissä 6, 7 ja 8 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske käyrien  $y = x^2$  ja  $y = \sqrt{x}$  rajoittaman alueen ala.
2. Jana AB halkaisijana piirretään ympyrä ja siihen jänne AP, joka muodostaa AB:n kanssa kulman  $\alpha$  ( $\pi/4 < \alpha < \pi/2$ ). Kuinka suuren kulman ympyrälle pisteeseen P piirretty tangentti muodostaa suoran AB kanssa?
3. Tutki, onko  $+\sqrt{90 - 60\sqrt{2}} = +\sqrt{30} - 2\sqrt{15}$ .
4. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä  $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0$  on kolme erisuurta reaaliuurta?
5. Ratkaise yhtälöpari  $x + y = 1$ ,  $|x| + |y| = 4$ .
6. a) Kartiopinta sivuaa R-säteistä palloa pitkin ympyrää. Kartion kärki on etäisyydellä 2R pallosta. Missä suhteessa sivuamisympyrän taso jakaa pallon sen halkaisijan, joka on kartion akselilla?  
 b) Olkoot  $\vec{a}$  ( $\neq \vec{0}$ ) ja  $\vec{b}$  ( $\neq \vec{0}$ ) kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa xy-tason vektoria. Saman tason vektori  $\vec{r}$ , jonka alkupiste on origo, muuttuu siten, että se toteuttaa yhtälön  $\vec{a} \cdot (\vec{r} + \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{r}$ . Kuinka vektorin  $\vec{r}$  loppupiste liikkuu? Piirrä kuvio.
7. a) Funktio f on määritelty kaikilla reaaliarvoilla ja täyttää seuraavat ehdot:  $1^\circ$  on olemassa äärellinen raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ,  $2^\circ f(x+y) = f(x) + f(y)$  kaikilla reaaliarvoilla x, y. Osoita, että funktiolla f on derivaatta jokaisella arvolla x.  
 b) Määritä differentiaaliyhtälöä käyttäen ne käyrät, joilla on seuraava ominaisuus: suora  $y = 1$  puolittaa käyrän jokaisen tangentin sen osan, joka on sivuamispisteen ja y-akselin välissä. Piirrä näistä käyristä se joka kulkee pisteen (2,-1) kautta.
8. a) Laske funktion  $\sin^6 x + \cos^6 x$  suurin ja pienin arvo.  
 b) Lukujoukon  $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  keskiarvo on  $\bar{x}$  ja keskihajonta  $s_x$ . Laske määritelmistä lähtien lukujen  $z_i = a + cx_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) keskiarvo  $\bar{z}$  ja keskihajonta  $s_z$ . Olkoon erityisesti  $\bar{x} = 5$ ,  $s_x = 3$ . Määritä a ja c siten, että  $\bar{z} = 0$ ,  $s_z = 1$ .
9. Olkoot  $\alpha$  ja  $\beta$  yhtälön  $x^2 - x - 1 = 0$  juuret ( $\alpha > \beta$ ) ja  $c_n = \alpha^n - \beta^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Osoita, että  $c_n + c_{n+1} = c_{n+2}$ , ja laske  $c_3$ .
10. Olkoon P = (0,t) ( $t \geq 0$ ) paraabelin  $x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) akselilla oleva piste ja Q = (u,v) sitä lähinnä oleva paraabelin piste. Lausu v t:n funktiona ja piirrä tämän funktion kuvaaja.



Tehtävissä 5, 7 ja 9 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise epäyhtälö  $4(x - 10) < 3(x - 12)$ .
2. Ratkaise yhtälö  $|2x - 3| = 4x$ .
3. Määritä funktio  $f$ , kun tunnetaan sen derivaatta  $f'(x) = \frac{4x - 5}{3}$  ja arvo  $f(3) = 2$ .
4. Määritä funktion  $f$ :  $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + \frac{5}{2}$  suurin ja pienin arvo välillä  $0 \leq x \leq 2$ .
5. a) Kuusi samankokoista palloa, joiden halkaisija on 10 cm, pakataan pyörähdyslieriöön, jonka pituus on 60 cm ja pohjaympyrän halkaisija 10 cm. Kuinka suuri osa lieriön tilavuudesta jää pallojen ulkopuolelle?  
b) Oletetaan, että Suomen itsenäisyyspäivä (6.12.) on satunnaisesti eri viikonpäivinä. Millä todennäköisyydellä itsenäisyyspäivä, joulupäivä (25.12.) ja tapaninpäivä (26.12.) sattuvat samana vuonna kaikki arkipäiviksi maanantaista perjantaihin?
6. Millä positiivisen vakion  $k$  arvolla paraabelin  $y = x^2 - k^2$  ja  $x$ -akselin väliin jäävän alueen ala on 36 ?
7. a) Kääntöpuolen taulukot esittelevät kevään 1976 ylioppilastutkinnon lyhyen matematiikan kokeiden tuloksia verrattuna helmikuisiin kouluarvosanoihin. 1) Mikä on tyypillisin kouluarvosana (tyyppi-arvo) erikseen pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittaneilla sekä koetta suorittamattomilla? 2) Millä todennäköisyydellä kokeeseen osallistunut sai laudaturin, jos hänen kouluarvosanansa oli 10 ? 3) Millä todennäköisyydellä hän sai pakollisessa kokeessa hyväksytyn arvosanan, jos kouluarvosana oli vähintään 5 ?  
b) Vektorin  $\vec{a}$  alkupiste on (3,2) ja loppupiste (0,6) ja vektorin  $\vec{b}$  alkupiste (3,2) ja loppupiste (6,1). Laske vektorien  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  välisen kulman kosini sekä itse kulma asteen tarkkuudella.
8. Määritä raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ .
9. a) Funktio  $f$  on määritelty seuraavasti:  
$$f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & \text{kun } 0 \leq x < a, \\ 4 - x, & \text{kun } a \leq x \leq 6. \end{cases}$$
Määritä  $a$  siten, että funktiosta tulee jatkuva. Piirrä funktion kuvaaja sekä määritä funktion suurin ja pienin arvo välillä  $0 \leq x \leq 6$ .  
b) Laske kuution kahden avaruuslävistäjän välinen (terävä) kulma  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.
10. Funktiosta  $f$ :  $f(x) = Ck^x$  tiedetään, että  $f(0) = 10^3$  ja  $f(5) = 10^4$ . Laske  $f(50)$ . Millä muuttujan arvolla funktio saa arvon  $0,1$  ?

# MATEMATIIKAN KOE K 1976

- - -

Taulukko 4. Lyhyen matematiikan pakollinen koe, varsinaiset oppilaat

| Arvosana   | Kouluarvosana |     |      |      |      |      |     | Yhteensä | Arvosanojen ka. |
|------------|---------------|-----|------|------|------|------|-----|----------|-----------------|
|            | 4             | 5   | 6    | 7    | 8    | 9    | 10  |          |                 |
| L          | 1             | 6   | 24   | 50   | 201  | 486  | 210 | 978      | 8,80            |
| M          | 5             | 9   | 60   | 158  | 312  | 330  | 56  | 930      | 8,13            |
| C          | 6             | 30  | 115  | 228  | 275  | 172  | 11  | 837      | 7,55            |
| B          | 7             | 52  | 113  | 176  | 133  | 47   | 5   | 533      | 7,01            |
| A          | 10            | 35  | 74   | 69   | 48   | 12   | 0   | 248      | 6,59            |
| i          | 3             | 37  | 56   | 31   | 11   | 1    | 0   | 139      | 6,09            |
| yht.       | 32            | 169 | 442  | 712  | 980  | 1048 | 282 | 3665     | 7,83            |
| %          | 0,9           | 4,6 | 12,1 | 19,4 | 26,7 | 28,6 | 7,7 |          |                 |
| $r = 0,57$ |               |     |      |      |      |      |     |          |                 |

Taulukko 5. Lyhyen matematiikan ylimääräinen koe, varsinaiset oppilaat

| Arvosana        | Kouluarvosana |      |      |      |      |      |     | Yhteensä | Arvosanojen ka. |
|-----------------|---------------|------|------|------|------|------|-----|----------|-----------------|
|                 | 4             | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10  |          |                 |
| L               | 0             | 0    | 2    | 21   | 80   | 164  | 70  | 337      | 8,83            |
| M               | 1             | 5    | 26   | 103  | 211  | 237  | 60  | 643      | 8,28            |
| C               | 0             | 14   | 94   | 229  | 324  | 245  | 32  | 938      | 7,84            |
| B               | 5             | 43   | 203  | 335  | 294  | 124  | 16  | 1020     | 7,28            |
| A               | 7             | 73   | 256  | 292  | 190  | 56   | 6   | 880      | 6,88            |
| i               | 17            | 304  | 429  | 312  | 144  | 36   | 0   | 1242     | 6,30            |
| Yht.            | 30            | 439  | 1010 | 1292 | 1243 | 862  | 184 | 5060     | 7,30            |
| %               | 0,6           | 8,7  | 20,0 | 25,5 | 24,6 | 17,0 | 3,6 |          |                 |
| ei kirj. matem. | 215           | 1900 | 2146 | 1431 | 818  | 361  | 71  | 6942     | 6,30            |
| %               | 3,1           | 27,4 | 30,9 | 20,6 | 11,8 | 5,2  | 1,0 |          |                 |
| $r = 0,58$      |               |      |      |      |      |      |     |          |                 |

- - -

Tehtävissä 4, 5, 6 ja 7 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä vakiot  $a$  ja  $b$  siten, että suora  $2x - y - 2 = 0$  sivuaa paraabelia  $y = ax^2 + bx + 2$  pisteessä  $(2, 2)$ .

2. Ratkaise epäyhtälö  $x - \frac{1}{4x} > 0$ .

3. Määritä  $f(x)$ , kun  $f'(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$  ja  $f(0) = \frac{3}{2}$ .

4. a) Määritä  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \sqrt[n]{ax} dx$  ( $a > 0$ ).

b) Laske  $\int_1^2 (x-1) \ln x dx$ .

5. a) Olkoon  $f$  kuvaus  $A \rightarrow \mathbb{R}$ :  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\tan x}$ , missä  $A$  on mahdollisimman laaja reaalilukujen joukon  $\mathbb{R}$  osajoukko. Mikä on  $A$  ja sen kuva  $f(A)$ ?

b) Ympyrän  $x^2 + y^2 = 1$  ympäri on piirretty kolmio  $ABC$ , jonka kaksi kärkeä ovat  $A = (1, 3)$  ja  $B = (1, -2)$ . Määritä kolmas kärki  $C$  ja kolmion ala.

6. a) Vektoreiden  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{a} - \vec{b}$  pituudet ovat:  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 6$  ja  $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ . Määritä  $|\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}|$ .

b) Kolmion  $ABC$  kulma  $A$  on  $60^\circ$ . Sen sivulta  $BC$  valitaan piste  $D$  siten, että tämän sivuista  $AB$  ja  $AC$  laskettujen etäisyyksien suhde on  $1:2$ . Laske kulma  $BAD$   $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.

7. a) Miten sijaitsevat kompleksitasossa ne pisteet  $z = x + iy$ , jotka toteuttavat ehdon  $|2z - \bar{z}| \leq 1$ ? Piirrä kuvio.

b) Kahta noppaa heitettäessä saadut pisteluvut olkoot  $x$  ja  $y$ . Määritä satunnaismuuttujan  $|x - y|$  todennäköisyysjakautuma ja odotusarvo (keskiarvo).

8. Osoita, että  $xy$ -tason piste  $x = \frac{1}{2 + \sin^2 t}$ ,  $y = \frac{e^{-|t|}}{1 + e^{-|t|}}$  pysyy suorakulmiossa  $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ , kun  $t$  muuttuu reaalilukujen joukossa.

9. Piste  $(x_0, y_0)$  liikkuu tasossa siten, että siitä paraabelille  $y = x^2$  piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Minkä käyrän piste  $(x_0, y_0)$  tällöin piirtää?

10. Määritä funktion  $f$ :  $f(x) = \int_1^2 \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x} \right| dt$  suurin ja pienin arvo välillä  $1 \leq x \leq 2$ .

Tehtävissä 3, 5 ja 7 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Erään tuotteen hinta nousi tammikuussa 10 % ja joulukuussa 12 %. Kuinka monta prosenttia sen hinta nousi kaikkiaan?
2. Ratkaise yhtälö  $4x(x + 1) = 1$ .
3. a) Olkoon C kolmion OAB sivun OA ja D sivun OB keskipiste. Lausu vektori  $\overline{CD}$  vektorien  $\vec{a} = \overline{OA}$  ja  $\vec{b} = \overline{OB}$  avulla.  
b) Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on  $30^\circ$ . Missä suhteessa hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan?
4. Määritä kulma  $\alpha$ , joka on välillä  $[180^\circ, 360^\circ]$  ja jolle  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ . Määritä lisäksi  $\sin \alpha$ .
5. a) Määritä vakio  $a$  siten, että pisteistä  $(-1,1)$  ja  $(0,3)$  suoralle  $ax + (1-a)y = 1$  piirretyt kohtisuorat yhtyvät.  
b) Millä väleillä funktio  $f: f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  on vähenevä?
6. Määritä se funktion  $2x^3 + x^2$  kantafunktio (integraalifunktio), joka saa arvon  $\frac{2}{3}$ , kun  $x = -2$ .
7. a) Oletetaan seuraavien todennäköisyyksien vallitsevan:  
1<sup>o</sup> Jos jonakin päivänä ei sata, niin seuraavana päivänä sataa todennäköisyydellä  $\frac{1}{3}$ .  
2<sup>o</sup> Jos jonakin päivänä sataa, niin seuraavana päivänä sataa todennäköisyydellä  $\frac{1}{2}$ .  
Laske, millä todennäköisyydellä ylihuomenna sataa, jos tänään sataa.  
b) Säännöllisen pyramidin pohja on neliö, jonka sivu on 5,0 m. Sivusärmien pituus on 10,0 m. Laske pyramidin korkeus.
8. Osoita, että käyrät  $y = -x^2$  ja  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$  sivuavat toisiaan. Mikä on niiden yhteisen tangentin yhtälö?
9. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} < 1$ .
10. Määritä käyrältä  $y^2 = 2 - x^3$  ( $y \geq 0$ ) se piste, joka on lähinnä origoa. Piirrä kuvio.

Tehtävissä 4, 5, 6 ja 7 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{x^2 - x}$ .
2. P on ensimmäisen asteen polynomi. Osoita, että lukujonon  $P(1)$ ,  $P(2), \dots, P(n), \dots$  kahden peräkkäisen luvun erotus on vakio.
3. Osoita, että funktion  $x^2(2x-1)^2$  derivaatalla on nollakohta lukujen 0 ja  $\frac{1}{2}$  välissä.
4. a) Määritä joukon  $\{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y < 2\}$  alkukuva kuvauksessa  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  ( $\mathbb{R}$  reaalilukujen joukko).  
b) Millä  $x$ :n arvoilla funktion  $4x^2 - 4x + 2$  arvo kuuluu väliin  $1 < y < 2$ ?
5. a) Funktio  $f$  on jatkuva ja toteuttaa epäyhtälöt  $x^{3/2} \leq f(x) \leq x^{1/2}$  välillä  $0 \leq x \leq 1$ . Arvioi ylös- ja alaspäin integraalia  $\int_0^1 f(x) dx$ .  
b) Nelikulmion OABC kärjestä O muihin kärkiin piirretyt vektorit ovat  $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = x\vec{i} + y\vec{j}$  ja  $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ . Määritä  $x$  ja  $y$  siten, että kulmat OAB ja OCB ovat suorita.
6. a) Kolminumeroisten positiivisten kokonaislukujen joukosta valitaan umpimähkään yksi luku. Millä todennäköisyydellä tämä on jaollinen 3:lla tai 5:llä?  
b) Miten sijaitsevat kompleksitasossa ne pisteet  $z = x + iy$ , jotka toteuttavat yhtälön  $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0$ ?
7. a) Kolmion kärjet ovat  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  ja  $(a,a^2)$ . Minkä käyrän piirtää kolmion mediaanien leikkauspiste  $a$ :n vaihdellessa?  
b) Funktio  $f$ , joka on derivoituva kaikilla  $x$ :n positiivisilla arvoilla, täyttää ehdot:  $f(x) + x \cdot f'(x) = 2$  ja  $f(2) = 1$ . Osoita, että  $f(x) < 2$ , kun  $x > 0$ .
8. Tasakylkisessä kolmiossa on kyljen vastainen mediaani  $= m$ . Mikä on kolmion alan suurin mahdollinen arvo?
9. Määritä piste, jossa käyrillä  $y = 1 + x + x^2$  ja  $y = \frac{1}{1-x}$  ( $x < 1$ ) on yhteinen tangentti. Osoita, että käyrät ovat tangentin samalla puolella ja toinen käyrä kulkee sivuamispisteessä toisen alapuolelta yläpuolelle.
10. Funktio  $f$  on jatkuva ja toteuttaa epäyhtälöt  $0 < f(x) < 1$  välillä  $0 \leq x \leq 1$ . Osoita: On olemassa luku  $a$  siten, että  $0 < a < 1$  ja  $f(a) = a$ .

Tehtävissä 7 ja 10 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Yksinkertaista lauseke  $(\frac{2}{3x} + \frac{3}{2y}) : \frac{5}{6xy}$  ja laske sen arvo, kun  $x = -0,2$  ja  $y = 0,3$ .
2. Olkoon  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 30x + 37$ . Ratkaise yhtälö  $f'(x) = 30$ .
3. Ratkaise epäyhtälö  $3(x + 2a) > 2x$ . Millä luvun  $a$  arvolla ratkaisu on täsmälleen:  $x > 5$ ?
4. Suunnikkaan samasta kärjestä lähtevinä sivuina ovat vektorit  $\vec{i} + \vec{j}$  ja  $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ . Laske suunnikkaan lävistäjien pituudet.
5. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 1000 metriä ja toinen terävä kulma  $50^\circ$ . Ilmoita metrin tarkkuudella, kuinka kaukana suoran kulman kärki on hypotenuusasta.
6. Laske sen äärellisen alueen ala, jota rajoittavat käyrä  $y = x^2 - 2x + 2$ , suora  $2x - y = 2$  sekä  $y$ -akseli.
7. a) Johda sen janan keskinormaalin yhtälö, jonka koordinaattiakselit erottavat pisteen  $(4,5)$  kautta kulkevasta, suoran  $2x - 3y + 6 = 0$  suuntaisesta suorasta.  
b) Olkoon  $\{2,3,3,4,5,5,6,6,8,8\}$  otos satunnaismuuttujasta  $X$ . Laske otoskeskiarvo, otoskeskihajonta (perusjoukon keskihajonnan estimaatti) sekä keskiarvon keskivirhe (otoksen antama estimaatti).
8. Laatikosta, jossa on 15 mustaa ja 5 punaista palloa, nostetaan umpimähkään ja samanaikaisesti 2 palloa. Millä todennäköisyydellä ainakin toinen näistä on punainen?
9. Määritä funktion  $|x^2 - 1| + x$  suurin ja pienin arvo välillä  $-2 \leq x \leq 2$ . Piirrä kuvio.
10. a) Olkoon  $P$  tasasivuisen kolmion sisällä oleva piste. Osoita, että  $P$ :n kolmion sivuista mitattujen etäisyyksien summa on riippumaton  $P$ :n sijainnista.  
b) Funktion  $f: f(x) = \frac{4x}{|x|+1}$  määrittelyjoukko on  $\mathbb{R}$  (reaalilukujen joukko). Piirrä funktion kuvaaja, ilmoita sen arvojoukko sekä laske  $f^{-1}(\frac{1}{2})$  ja  $f^{-1}(-\frac{11}{3})$ , missä  $f^{-1}$  on  $f$ :n käänteisfunktio.

Tehtävissä 5, 6 ja 7 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)^2}$ .
2. Ratkaise yhtälö  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} = \frac{1}{2}$ .
3. Ratkaise epäyhtälö  $3x - 1 > 2|x|$ .
4. Osoita: Jos  $x + y = 2a$ , niin  $xy \leq a^2$ , ja  $xy = a^2$ , jos ja vain jos  $x = y = a$ .
5. a) Kolmion kahtena sivuna ovat samasta pisteestä lähtevät vektorit  $\vec{a} = t\vec{i} + 2\vec{j}$  ja  $\vec{b} = -2\vec{i} + (t-2)\vec{j}$  ( $t$  reaaliluku). Osoita, että kaikilla  $t$ :n arvoilla kolmion kolmas sivu on pisin.  
b) Kolmion kärjet ovat  $A = (0,0)$ ,  $B = (5,0)$  ja  $C = (6,3)$ . Laske lausekkeen  $\tan A + \tan B + \tan C$  tarkka arvo.
6. a) Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)^n$  suppenee, ja mikä on tällöin sen summa?  
b) Kymmenestä henkilöstä, joiden joukossa on kaksi veljestä, muodostetaan arpomalla kaksi viisihenkistä työryhmää. Millä todennäköisyydellä veljekset joutuvat eri ryhmään?
7. a) Osoita, että kuvauksella  $f: [-2,0] \rightarrow [0,16]$ ,  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$  on käänteiskuvaus, ja johda sille lauseke.  
b) Funktio  $f$  on positiivinen ja derivoituva, kun  $x > 0$ , ja  $f(2) = 1$ . Sen kuvaajan pisteeseen  $(x,y)$  piirretty tangentti leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $(\frac{3}{2}x, 0)$ . Määritä  $f$ .
8. Piste  $P$  liikkuu  $xy$ -tasossa pisteestä  $O = (0,0)$  pisteeseen  $A = (10,5)$ .  $P$ :n nopeus  $x$ -akselin ulkopuolella on  $v$  ( $=$  vakio) ja  $x$ -akselilla  $1,25 v$ . Mikä reitti  $O$ :sta  $A$ :han on nopein?
9. Määritä käyrän  $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$  sekä suorien  $y = 0$ ,  $x = 0$  ja  $x = -a$  ( $a > 0$ ) rajoittaman alueen ala sekä tämän alan raja-arvo, kun  $a \rightarrow \infty$ .
10. Funktio  $f$ , joka ei ole vakio, toteuttaa kaikilla lukupareilla  $(x,y)$  yhtälön  $f(x+y) = f(x)f(y)$ . Lisäksi on  $f'(0)$  olemassa ja  $= m$ . Osoita, että  $f'(x)$  on olemassa kaikilla  $x$ :n arvoilla, ja määritä  $f'(x)/f(x)$ .

Tehtävissä 6, 8 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske integraali  $\int_{-1}^4 (2x - 3)dx$ .
2. Laske  $k^{5/3}$ , kun  $k^{-1/3} = 2$ .
3. Laske suorien  $x = 5$ ,  $y = 4$  ja  $x + 3y = 9$  rajoittaman kolmion ala.
4. Määritä funktion  $f: f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 12$  suurin ja pienin arvo välillä  $0 \leq x \leq 3$ .
5. Puolue P sai eräissä vaaleissa 36 % annetuista äänistä. Näissä vaaleissa äänesti 85 % äänioikeutetuista. Seuraavissa vaaleissa puolueen P osuus annetuista äänistä nousi kahdella prosenttiyksiköllä. Tällöin äänesti 80 % äänioikeutetuista. Monellako prosentilla puoluetta P äänestäneiden lukumäärä oli noussut tai laskenut edellisiin vaaleihin verrattuna olettaen, että äänioikeutettujen määrä oli pysynyt muuttumattomana?
6. a) Millä vakion  $a$  arvoilla  $x = -1$  on yhtälön  $ax^2 + (a^2 - 1)x + 1 = 0$  juuri? Mikä on tällöin yhtälön toinen juuri?  
 b) Henkilön 40:llä peräkkäisellä veikkauskierroksella saavuttamat parhaat tulokset ilmenevät taulukosta:
 

|                   |     |   |   |   |    |    |    |    |    |
|-------------------|-----|---|---|---|----|----|----|----|----|
| tulos             | 0-5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| esiintymiskertoja | -   | 3 | 9 | 9 | 12 | 5  | 2  | -  | -  |
- Ilmoita tulosjakautuman keskiarvo, mediaani ja tyyppi-arvo (moodi).
7. Kolmion kärkinä ovat pisteet  $A = (-2,0)$ ,  $B = (4,-2)$  ja  $C = (1,6)$ . Näytä, että pisteestä B piirretty korkeusjana kulkee origon kautta.
8. a) Määritä kaikki vektorit  $\vec{c}$  siten, että vektoreista  $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$  ja  $\vec{c}$  voidaan muodostaa kolmio.  
 b) Millä  $x$ :n arvoilla käyrä  $y = (x - 1)^3(x + 2)^4$  on laskeva?
9. a) Kolme R-säteistä palloa koskettaa toisiaan. Kuinka suuri on korkeintaan sellaisen pallon säde, joka mahtuu kolmen pallon välisestä aukosta?  
 b) Kääntöpuolella on valtion tuloveroasteikko verovuodelta 1977. Tutki, onko veron määrä tulon funktiona jatkuva välillä 18 000 mk ... 35 000 mk eli onko sen kuvaaja tällä välillä yhtenäinen murtoviiva. Kuinka suuri on valtionvero 50 000 mk:n vuositulosta?
10. Ratkaise yhtälö  $|x| - |x - 2| = -2$ .



## Tuloveroasteikko

| Verotettava tulo<br>mk | Veron<br>vakioerä<br>tulon<br>alarajan<br>kohdalla,<br>mk | Vero- %<br>alarajan<br>yli<br>menevästä<br>tulon<br>osasta |
|------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 6 960— 9 280           | 23                                                        | 10                                                         |
| 9 280— 11 580          | 255                                                       | 13                                                         |
| 11 580— 13 930         | 554                                                       | 16                                                         |
| 13 930— 17 400         | 930                                                       | 23                                                         |
| 17 400— 23 200         | 1 728                                                     | 28                                                         |
| 23 200— 34 800         | 3 352                                                     | 29                                                         |
| 34 800— 46 400         | 6 716                                                     | 33                                                         |
| 46 400— 69 600         | 10 544                                                    | 38                                                         |
| 69 600— 116 000        | 19 360                                                    | 44                                                         |
| 116 000— 232 000       | 39 776                                                    | 50                                                         |
| 232 000—               | 97 776                                                    | 51                                                         |

Tehtävissä 5, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_{-\pi}^{\pi} (x - \cos x) dx$ .
2. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{4x^2 + 1}{x} \geq 4$ .
3. Osoita: Funktiolla  $Ax + e^{-x}$  on yksi minimikohta, jos  $A > 0$ , mutta ei lainkaan ääriarvokohtia, jos  $A \leq 0$ .
4. Ratkaise yhtälö  $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{2}{5}$ .
5. a) Vektorit  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = x\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  ja  $\vec{c} = -2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  ovat suuntaissärmiön erisuuntaisina särminä. Määritä kertoimet  $x$ ,  $y$  ja  $z$  siten, että särmiö on suorakulmainen, ja laske tämän särmiön tilavuus.  
b) Ratkaise yhtälö  $\sin 2x - \tan x = 0$ .
6. a) Erään teollisuustuotteen laaduntarkkailussa löytyy viallisia kappaleita keskimäärin 3 %. Kuinka monta kappaletta on tutkittava, jotta todennäköisyys sille, että löytyy ainakin yksi viallinen kappale, olisi vähintään 0,90 ?  
b) Piste  $z$  liikkuu kompleksitasossa siten, että se toteuttaa yhtälön  $z = i\bar{z}$ . Osoita, että piste  $z$  piirtää erään suoran. Osoita, että myös piste  $w = 2z + i$  piirtää erään suoran. Piirrä kuvio.
7. a) Kuvaus  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on injektio ( $\mathbb{R}$  reaalilukujen joukko). Osoita, että myös kuvaus  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (f(x))^3 + 3f(x)$  on injektio.  
b) Millä välillä lauseke  $\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2}$  määrittelee reaaliarvoisen funktion? Määritä funktion suurin ja pienin arvo tällä välillä.
8. Osoita, että  $\frac{3^n - 1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{3^n - 1}{3^n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).
9. a) Osoita, että epäyhtälöstä (a)  $|x| \leq 1$  seuraa epäyhtälö (b)  $|x^2 - x| \leq 2$ . Etsi jokin piste, jossa (b) on voimassa, mutta (a) ei ole voimassa.  
b) Funktio  $f$  on kaikkialla jatkuva, ja  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f(t) dt$ . Määritä  $f$ .
10. Osoita, ettei mikään käyrän  $y^2 = \frac{x^3 - 1}{3x}$  piste  $(x, y)$  ole ympyrän  $x^2 + y^2 = 1$  sisällä.

Tehtävissä 4 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Totea sijoittamalla, että  $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  on yhtälön  $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$  juuri.
2. Osoita, että funktion  $f: f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 12$  derivaatta ei ole missään negatiivinen.
3. Kolmion kärjestä O lähtevinä sivuina ovat vektorit  $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$ . Muodosta kolmion O:sta lähtevän mediaanin (keskijanan) vektorilauseke.
4. a) Määritä kaikki vakion a arvot, joilla yhtälöllä  $|x+5| + |x+a| = 0$  on ratkaisu.  
b) Määritä seuraava 99:n tekijän tulo:  
 $(1 + 1)(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \dots (1 + \frac{1}{99})$ .
5. Suorakulmaista kolmiota rajoittavat positiiviset koordinaattiakselit sekä pisteen (2,3) kautta kulkeva suora. Kolmion terävä kulma, jonka kärki on x-akselilla, on  $30^\circ$ . Muodosta sen suoran yhtälö, jolla hypotenuusa on, ja laske hypotenuusan pituus (tarkka arvo ja 2-desimaalinen likiarvo).
6. Kahden ympyrän säteet ovat 3 ja 4 sekä keskipisteiden väli 5. Laske ympyröiden yhteisten tangenttien välinen terävä kulma.
7. Kuinka monta reaalijuurta on yhtälöllä  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ ? Minkä peräkkäisten kokonaislukujen välissä kukin niistä sijaitsee?
8. a) Suoran ympyräpohjaisen kartion sivujana on s ja pohjaympyrän säde s/4. Määritä kartion sisään mahtuvan suurimman pallon säde.  
b) Rasiassa on kuusi palloa, joista kolmessa on numero 1 ja kolmessa numero 2. Rasiasta nostetaan samanaikaisesti kolme palloa. Tällöin saatujen lukujen summa on satunnaismuuttuja. Laadi tämän muuttujan frekvenssitaulukko sekä laske suhteelliset frekvenssit.
9. Määritä funktion  $f: f(x) = \frac{1}{x^2}$  derivaatta pisteessä  $x = 1$  derivaatan määritelmän nojalla.
10. Piirrä funktion  $f: f(x) = |x^2 - 1|$  kuvaaja sekä laske  $\int_0^{-5} |x^2 - 1| dx$ .

Tehtävissä 4, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\sin x + \cos x) dx$ .
2. Määritä yhtälöiden  $(1-2x^2)(1+2x^2) = 1$  ja  $(1-2x^2)(1+2x^2) = 0$  kaikki juuret.
3. Piirrä käyrä  $y = |x| + |x-1|$  sekä ratkaise sen avulla epäyhtälö  $|x| + |x-1| < 2$ .
4. a) Määritä funktion  $f: f(x) = \cos x + \cos 2x$  suurin ja pienin arvo (tarkat arvot).  
b) Satunnaismuuttujan tiheysfunktio on  $xe^{-x^2/2}$ , kun  $x \geq 0$ , ja  $= 0$ , kun  $x < 0$ . Määritä kertymäfunktio ja laske  $P(1 < x < 2)$ .
5. Piste P liikkuu tasossa siten, että sen etäisyys pisteestä  $(6,0)$  on aina kaksi kertaa niin suuri kuin sen etäisyys pisteestä  $(0,3)$ . Määritä pisteen P piirtämän käyrän yhtälö. Piirrä kuvio.
6. Hyperbeli  $x^2 - y^2 = 16$  ja suora  $x = 8$  rajoittavat äärellisen alueen. Alueeseen piirretään suorakulmio siten, että sen kaksi kärkeä ovat suoralla ja kaksi muuta kärkeä hyperbelillä. Määritä suurimman tällaisen suorakulmion kanta.
7. Suunnikkaassa ABCD on  $\vec{AB} = \vec{a}$  ja  $\vec{AD} = \vec{b}$ . Sivulta CD valitaan piste E siten, että  $CE:ED = 1:3$ . AE ja BD leikkaavat toisensa pisteessä F. Esitä  $\vec{AF}$  vektorien  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  avulla.
8. a) Osoita: Pisteestä  $(a,0)$  voidaan piirtää paraabelille  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) kolme normaalia, jos  $a > p$ , mutta vain yksi normaali, jos  $a \leq p$ .  
b) Funktiot  $f$  ja  $g$  määritellään seuraavasti:  $f: f(x) = 5x + 3$ ,  $g: g(x) = 3x + k$ , missä  $k$  on vakio. Määritä  $k$  siten, että  $f \circ g$  ja  $g \circ f$  ovat sama funktio.
9. Osoita, että funktio  $f: f(x) = (1+x)^k - 1 - kx - \frac{k(k-1)}{2} x^2$  on kasvava funktio, kun  $x > 0$  ja  $k > 2$ .
10. a) Määritä funktion  $f: f(x) = 2 - |x^4 + 1,8x + 1|$  suurin arvo.  
b) Joukossa  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  määriteltä reaaliarvoinen funktio  $f$  täyttää seuraavat ehdot:  
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| < \frac{1}{|x|},$$
  
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$
  
Osoita: On olemassa luku  $M$  siten, että  $|f(x)| < M$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Tehtävissä 3 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä polynomin  $2x^3 - 3x^2$  derivaatan nollakohdat.
2. Määritä se funktion  $f: f(x) = 3x^2 - 2$  integraalifunktio  $F$ , jolle  $F(1) = 1$ .
3. a) Ratkaise yhtälö  $\lg x^3 - \lg x^5 + 1 = 0$ .  
b) Seuraavasta taulukosta ilmenee kymmenen lapsen syntymäpituus (cm) sekä pituus yhden vuoden ikäisenä:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 50 | 51 | 52 | 50 | 51 | 53 | 52 | 49 | 50 | 52 |
| 79 | 74 | 77 | 78 | 75 | 78 | 77 | 77 | 74 | 77 |

Kuinka suuri oli näiden lasten keskimääräinen pituuskasvu kuukautta kohden ensimmäisen elinvuoden aikana ?

4. Suorakulmaisen särmiön särmien suhdeluvut ovat 1, 1 ja 2. Särmiön koko pinnan ala on 14,4. Laske särmiön tilavuus.
5. Ratkaise epäyhtälöpari  $\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} + \left|\frac{1}{x}\right| > 0$ ,  $x < 0$ .
6. Kolmion kärjet ovat  $(x,0)$ ,  $(a,a)$  ja  $(0,x)$ , missä  $a$  on positiivinen vakio ja  $0 < x < 2a$ . Määritä kolmion alan suurin mahdollinen arvo.
7. Määritä vakio  $p$  siten, että vektorien  $\vec{a} = 2\vec{i} + 2p\vec{j}$  ja  $\vec{b} = 3p\vec{i} - \frac{3}{2}p^2\vec{j}$  välinen kulma on suora.
8. Määritä  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$ .
9. Noppaa heitetään neljä kertaa. Millä todennäköisyydellä kaikki silmäluvut ovat erisuuria ?
10. a) Kolmion kahden keskijanan (mediaanin) pituudet ovat 6 ja 9 sekä niiden välinen terävä kulma  $55^\circ$ . Laske kolmion ala.  
b) Piirrä funktion  $f: f(x) = |x-1| + |x-4|$  kuvaaja ja laske  $\int_0^5 f(x)dx$ .

Tehtävissä 7 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä polynomin  $P(x) = ax^3 + x^2 + bx$  kertoimet  $a$  ja  $b$  siten, että  $P(-1) = P'(-1) = 1$ .
2. Määritä lausekkeen  $\cos x$  tarkka arvo ja 3-desimaalinen likiarvo, kun  $\sin x = -\frac{1}{5}$  ja  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .
3. Määritä ympyrän  $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$  keskipiste ja säde sekä origon lyhin etäisyys tästä ympyrästä.
4. Määritä  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ .
5. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku  $n$ , joka toteuttaa epäyhtälön  $n - \sqrt{n^2 - 1} < 10^{-2}$ .
6. Määritä vektorin  $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$  vektorikomponentti suoralla  $y = 2x + 2$ .
7. a) Laske  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ .  
  
b) Noppaa heitetään viisi kertaa. Millä todennäköisyydellä ensimmäisen heiton silmäluku esiintyy täsmälleen kahdesti ?
8. a) Osoita, että funktion  $f: f(x) = \sin x \sin(x+\alpha)$  suurimman ja pienimmän arvon erotus on kulmasta  $\alpha$  riippumaton.  
  
b) Osoita, että kuvaus  $f: 3\mathbb{N} \setminus \{0,3\} \rightarrow 5\mathbb{N}$ ,  $f(n) = \frac{5}{3}(n-6)$  on bijektio ( $p\mathbb{N} = \{0,p,2p,3p,\dots\}$ ).
9. Palloon, jonka säde on 1, on asetettu säännöllinen kolmisivuinen särmiö. Laske sen tilavuuden suurin mahdollinen arvo.
10. Piirrä funktion  $f: f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1+x^2-2xt}}$  kuvaaja.

Tehtävissä 5, 6 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $(4-x)(4+x) = (4-x)^2$ .

2. Ratkaise epäyhtälö  $3(x+1) + 1 < 5(x+2)$ .

3. Laske  $\int_{1/2}^2 (2x-1)^2 dx$ .

4. Nelikulmiossa OABC on  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OC} = \vec{b}$  ja  $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ . Määritä  $\vec{OB}$ ,  $\vec{BC}$  ja  $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CO}$ .

5. a) Erästä otoksesta mitattiin seuraavat muuttujan arvot: 512, 516, 518, 516, 515, 513, 516, 515, 512, 517. Laske näiden keskiarvo, tyyppiarvo ja keskihajonta  $s_{n-1}$ .

b) Tasakylkisen kolmion kanta on  $a$  ja kantakulma  $\alpha$ . Laske kolmion ala ja piiri. Millä  $\alpha$ :n arvolla piiri on  $3a$ ?

6. a) Jos tulitikkurasia heitetään ilmaan, todennäköisyys, että se pudotessaan jää jommallekummalle raapaisupinnalleen, on 0,2. Kaksi samanlaista rasiaa heitetään samanaikaisesti ilmaan. Mikä on todennäköisyys sille, että täsmälleen yksi rasia pudotessaan jää raapaisupinnalleen?

b) Tuotteen hinta nousee 10 % vuodessa. Kuinka monen (kokonaisen) vuoden kulluttua sen hinta on tullut yli kaksinkertaiseksi?

7. Funktio  $f$  on määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & \text{kun } x \leq 1, \\ -x^2 + 4x + q, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Määritä  $q$  siten, että funktion kuvaaja on yhtenäinen. Piirrä tämä kuvaaja sekä laske sen ja  $x$ -akselin rajoittaman alueen ala.

8. Olkoon  $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}$ , kun  $x \neq \pm 3$ . Tutki, voidaanko  $f(3)$  valita siten, että funktio  $f$  on jatkuva pisteessä  $x = 3$ .

9. Osoita, että  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ , kun  $x \geq -1$ . Milloin yhtäsuuruusmerkki on voimassa? Piirrä kuvio.

10. a) Tiedetään, että luku  $\sqrt{2}$  on irrationaalinen. Osoita, että myös luku  $\frac{1 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$  on irrationaalinen, ts. sitä ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä.

b) Millä väleillä funktio  $f: f(x) = (x^2 - 3x + 2)^6$  on kasvava?

Tehtävissä 6, 8 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_0^4 (\sqrt{x} + 1)^2 dx$ .

2. Määritä  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right)^2$ .

3. Millä vakion  $a$  arvolla jakolasku

$$(x^3 + 2x^2 + ax) : (x - 3)$$

päättyy tasan? Määritä saadulla vakion arvolla polynomin  $x^3 + 2x^2 + ax$  kaikki nollakohdat.

4. Ratkaise epäyhtälö  $\sqrt{x+2} < |x|$ .

5. Ratkaise yhtälö  $2\cos(x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} = 0$ .

6. a) Määritä vektori, joka on kohtisuorassa sekä vektoria  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  että vektoria  $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$  vastaan ja jonka pituus on 1.

b) Funktio  $f$  on määritelty koko  $\mathbb{R}$ :ssä, ja  $\mathbb{R}$ :n kuva  $f(\mathbb{R}) = [-1, 2]$ . Määritä funktion  $g: g(x) = (3 + |f(x)|)^2$  suurin ja pienin arvo.

7. Yhtälön  $\sqrt{x} + \frac{4}{x} = \sqrt{3} + \frac{4}{3}$  yksi juuri on 3. Osoita, että yhtälöllä on toinenkin reaali-juuri.

8. a) Määritä käyrältä  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , missä  $x \geq 0$  ja  $y \geq 0$ , piste  $(x, y)$  siten, että summa  $x + y$  on mahdollisimman suuri. Mikä on tämä suurin arvo?

b) Määritä luvun  $(1/2)^{2000}$  likiarvo kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

9. a) Osoita, että kaikki käyrät

$$y = px^2 - 2pqx + 5 - 4p + 4pq,$$

missä  $p$  ja  $q$  ovat vapaasti valittavia reaalilukuja, kulkevat saman pisteen kautta. Mikä on tämä piste?

b) Huoneessa on 4 naista ja 5 miestä. Huoneesta kutsutaan umpimähkään 4 henkilöä. Satunnaismuuttuja  $\underline{x}$  ilmaisee, kuinka monta kutsutuista on miehiä. Laske todennäköisyydet  $P(\underline{x} = 0), P(\underline{x} = 1), \dots, P(\underline{x} = 4)$  ja  $\underline{x}$ :n odotusarvo.

10. Funktio  $f$  määritellään koko  $\mathbb{R}$ :ssä kaavalla

$$f(x) = \int_{-1}^1 |x - t| dt.$$

Määritä tämän funktion esitys integroidussa muodossa ja piirrä funktion kuvaaja.



Tehtävissä 6 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Millä vakion  $a$  arvoilla yhtälön  $x^2 + x + a = 0$  juuret ovat yhtä suuret? Mikä on tällöin juurien yhteinen arvo?
2. Mikä luku korotettuna potenssiin  $3/2$  antaa tulokseksi  $27/8$ ?
3. Määritä se funktio  $f$ , jolle  $f'(x) = x^4 - x^3$  ja  $f(0) = 1$ .
4. Neliö jaetaan saman kärjen kautta kulkevilla suorilla kolmeen yhtä suureen osaan. Laske suorien välinen kulma  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.
5. Helmikuun 1. päivänä 1980 pankkien käyttötilin korko nousi  $4,25\%$ :sta  $5,00\%$ :iin. Laske, kuinka monta  $1^\circ$  prosenttiyksikköä,  $2^\circ$  prosenttia korko tällöin nousi.
6. a) Millä  $x$ :n arvoilla lauseke  $\lg(x^2 - x) - \lg(x + 2)$  on määritelty?  
b) Koulut päättyvät keväisin 31.5. tai, jos tämä on sunnuntai, sitä edeltävänä päivänä. Millä todennäköisyydellä umpimähkään valittuna keväänä koulu päättyy lauantaina?
7. Määritä  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2}$ .
8. a) Vektorit  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  ovat pituudeltaan  $= 1$ , ja niiden välinen kulma on  $45^\circ$ . Määritä vektorin  $\vec{a} + \vec{b}$  pituus sekä sen ja vektorin  $\vec{a}$  välinen kulma (tarkat arvot).  
b) Määritä se kasvava ensimmäisen asteen polynomifunktio  $f$ , joka kuvaa välin  $[1,5]$  välille  $[2,4]$ , sekä tämän käänteisfunktio  $f^{-1}$ .
9. Käyrä  $y = -x^2 + 2x + 2$  ja suora  $x - y = 0$  rajoittavat äärellisen alueen. Laske tämän alueen ala.
10. Määritä funktion  $f: f(x) = \frac{1}{|x + 1| + x^2}$  suurin arvo.

Tehtävissä 5, 7 ja 8 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä yhtälön  $x^4 - x^3 + x^2 - x = 0$  kaikki juuret.
2. Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on  $(2,3)$  ja joka sivuaa suoraa  $y = 2x + 2$ .
3. Määritä  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{\frac{2}{x}} - 1}{2 - x}$ .
4. Suora  $y = \frac{1}{2}x$  ja paraabeli  $y = kx^2$  ( $k > 0$ ) rajoittavat äärellisen alueen A. Määritä vakio k siten, että A:n ala on 3.
5. a) Määritä pisteitä  $A = (4,7)$  ja  $B = (-5,3)$  yhdistävältä janelta piste C siten, että  $AC:CB = 2:3$ .  
b) Määritä differentiaaliyhtälön  $y' + 3y = 2$  se ratkaisu, joka toteuttaa ehdon  $y(0) = 1$ .
6. Suoran ympyräkartion korkeus on h ja pohjaympyrän säde r. Määritä kartion sisään piirretyistä suorista ympyrälieriöistä tilavuudeltaan suurin. Mikä on maksimitilavuuden ja kartion tilavuuden suhde?
7. a) Osoita, että funktio  $f: f(x) = \sin \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$  on positiivinen välillä  $0 < x < \pi$ .  
b) Joukossa  $A = 2\mathbb{Z} \times \{0\}$ , jonka alkiot ovat siis muotoa  $(2n,0)$  ( $n \in \mathbb{Z} =$  kokonaislukujen joukko), määritellään laskutoimitus kaavalla  $(2m,0) + (2n,0) = (2(m+n),0)$ . Osoita, että kuvaus  $f: \mathbb{Z} \rightarrow A$ ,  $f(n) = (-2n,0)$  on bijektio (eli surjektio ja injektio) ja lisäksi toteuttaa ehdon  $f(m+n) = f(m) + f(n)$ .
8. a) Määritä kompleksiluvut z, jotka toteuttavat samanaikaisesti ehdot  $|z - 0,5| = |z - 1|$  ja  $|z - i| = \frac{5}{4}$ .  
b) Laatikossa on 2 valkoista ja 3 mustaa palloa. Siitä otetaan umpimähkään kaksi palloa samanaikaisesti. Mikä on todennäköisyys sille, että  $1^0$  pallot ovat eriväriset,  $2^0$  molemmat pallot ovat valkoisia,  $3^0$  molemmat ovat mustia?
9. Millä arvoilla sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} (xe^{-(x+1)})^n$  suppenee? Mikä on tällöin sen summa?
10. Osoita, että  $0 < \int_1^n \frac{dx}{x} - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) < 1 - \frac{1}{n}$ , kun  $n = 2,3,\dots$ .

Tehtävissä 4, 5, 6 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_{-1}^1 (x^4 - x^3) dx$ .
2. Laske lausekkeen  $\left(\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2$  tarkka arvo.
3. Ratkaise yhtälö  $36x(x - 1) + 5 = 0$ .
4. a) Erään nesteen tuotanto väheni kolmena peräkkäisenä kuukautena 10 % kunakin. Kuinka monta prosenttia tuotanto väheni kaikkiaan tuona aikana?  
b) Laske suorien  $y - x = 1$ ,  $y + x = 3$  ja  $3y - x = 1$  rajoittaman kolmion ala.
5. a) Monikulmiossa ABCDEA on  $\vec{AB} = 5\vec{i}$ ,  $\vec{BC} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{CD} = -6\vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{DE} = \vec{i} - 7\vec{j}$ . Määritä pisteiden B, C, D ja E etäisyydet pisteestä A.  
b) Tutkittaessa 25 tavaraerää löydettiin niistä virheellisiä kappaleita seuraavat määrät: 0, 0, 1, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 5, 0, 1, 8, 0, 5, 0, 1, 1, 6, 1, 2, 6. Esitä graafisesti eri arvojen suhteelliset frekvenssit ja määritä tyyppi-arvo, mediaani ja keskiarvo.
6. a) Jalkapalloilija tekee rangaistuspotkulla maalin 80 % todennäköisyydellä. Kuinka monta kertaa hänen on suoritettava rangaistuspotku, jotta hän tekisi maalin yli 99 % todennäköisyydellä?  
b) Ratkaise yhtälö  $\lg(2x) = 2 \lg x$ .
7. Jaa luku 1 kolmeen osaan siten, että ensimmäinen osa on kaksi kertaa niin suuri kuin toinen ja kaikkien osien neliöiden summa on mahdollisimman pieni.
8. a) Kuinka monta kuutiometriä maata on poistettava, kun kaivetaan 60 m pitkä oja, jonka tasainen pohja on 10 cm leveä ja 80 cm syvyydellä maanpinnasta ja sivuseinämät ovat  $40^\circ$  kulmassa vaakatasoon nähden?  
b) Määritä  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x}{x-2} + \frac{x+10}{4-2x} \right)$ .
9. Millä  $a$ :n arvoilla yhtälöllä  $a(x+1)^2 = x^2 + 1$  on täsmälleen yksi juuri?
10. Mitkä arvot saa funktio  $f: f(x) = 3^{x^2-2x}$ , kun  $-3 < x < 2$ ?

Tehtävissä 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä  $\cos 4x$ , kun  $\cos x = \frac{1}{2}$ .
2. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{1}{x} < -|x|$ .
3. Määritä vakiot  $a$  ja  $b$  siten, että

$$F(x) = \int_0^x (ae^t + b) dt$$

täyttää ehdot  $F(1) = 0$  ja  $F(2) = 1$ .

4. Määritä sen suoran yhtälö, joka puolittaa  $x$ -akselin ja suoran  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$  välisen terävän kulman.
5. Osoita, että yhtälöllä  $x - \ln x = 0$  ei ole reaalijuuria.
6. a) Laske käyrän  $y^2 = x(x - 2)^2$  rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala. Piirrä käyrä pääpiirteittäin.  
b) Vektorit  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  ja  $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  lähtevät origosta. Laske niiden kärkipisteiden määräämän kolmion ala.
7. a) Osoita, että yhtälöllä  $x^3 + x + 1 = 0$  on yksi ja vain yksi reaalijuuri. Määritä tämän juuren likiarvo 4:n desimaalin tarkkuudella ja selosta lyhyesti käyttämäsi menetelmä.  
b) Määritä yhtälön  $z + \bar{z}^2 = 0$  kaikki nollasta eroavat ratkaisut. Osoita, että nämä ovat tasasivuisen kolmion kärkinä kompleksitasossa.
8. Puolisuunnikkaassa on kolmen sivun pituus  $a$ . Määritä neljännen sivun pituus siten, että puolisuunnikkaan ala on mahdollisimman suuri.
9. a)  $S_1$  on pallo, jonka keskipiste on  $O$  ja jonka säde on 1. Piste  $O$  on  $R$ -säteisen pallon  $S_2$  pinnalla. Määritä näiden pallojen yhteisen osan tilavuus ja tämän raja-arvo, kun  $R \rightarrow \infty$ .  
b) Arpajaisiin on hankittu 10000 arpaa, joiden joukossa on 100 voitonumeroa. Montako arpaa vähintään on nostettava, jotta todennäköisyys sille, että saataisi ainakin yksi voitto, olisi  $\geq 0,5$ ?
10. Funktio  $f$  määritellään välillä  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$  siten, että
$$f(x) = \frac{1}{x} \left( 1 - \sqrt{1 - 4x^2} \right), \text{ kun } x \neq 0, \text{ ja } f(0) = 0.$$
Määritä  $f'(x)$ . Millä muuttujan  $x$  arvoilla on  $-1 < f(x) < 1$ ?

Tehtävissä 5, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $(2-x)^2 = 4$ .
2. Määritä se funktio  $f$ , jolle  $f'(x) = \frac{1}{2} - x$  ja  $f(-2) = 3$ .
3. Ratkaise epäyhtälö  $x(x+8) + 16 \leq 0$ .
4. Määritä funktion  $f: f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$  suurin ja pienin arvo välillä  $-1 \leq x \leq 4$ .
5. a) Tasakylkisessä kolmiossa, jonka ala on  $240 \text{ cm}^2$ , kyljen suhde kantaan on 13:10. Laske kolmion kanta ja korkeus.  
b) Tavarahan hintaa nostettiin ensin  $p\%$  ja alennettiin sitten  $2p\%$ . Tällöin saatu hinta oli  $94,5\%$  alkuperäisestä. Määritä  $p$ .
6. a) Tehtaan valmistamien ruuvien pituudeksi ilmoitettiin  $100,0 \text{ mm}$ . Kymmenen ruuvin otoksessa oli seuraavan pituiset ruuvit:  
 $99,2 \quad 98,6 \quad 100,1 \quad 98,8 \quad 98,7 \quad 98,5 \quad 99,0 \quad 98,5 \quad 100,2 \quad \text{ja} \quad 98,4 \text{ mm}$ .  
Laske otoskeskiarvo  $\bar{x}$  ja -keskihajonta  $s_{n-1}$ . Mitä arvelet tämän otoksen perusteella tehtaan ilmoittamasta pituudesta?  
b) Nelikulmiossa ABCD on  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$  ja  $\vec{CD} = -\frac{3}{4}\vec{a}$ . Olkoon sivun AB keskipiste R, BC:n S, CD:n T ja DA:n U. Määritä vektorit  $\vec{RT}$  ja  $\vec{US}$  sekä  $\vec{RT} + \vec{US}$  ja  $\vec{RT} - \vec{US}$ . Vertaa tuloksia nelikulmion lävistäjävektoreihin  $\vec{AC}$  ja  $\vec{BD}$ .
7. a) Tiedetään, että  $(\sqrt{17} - 3)^{1981} > 7,6 \cdot 10^{99}$ . Tutki tämän nojalla, onko  $(\sqrt{17} - 3)^{1984} > 10^{100}$ .  
b) Ratkaise yhtälö  $\frac{4^{1-2x}}{2^{x+10}} = 128$ .
8. Kuinka korkea on (tilavuudeltaan) suurin niistä suorakulmaisista särmiöistä, joiden kokonaispinta-ala on  $200 \text{ cm}^2$  ja joiden pohjan pituuden ja leveyden suhde on 3:1?
9. a) Määritä  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1}$ .  
b) Neljälle henkilölle arvotaan neljä tehtävää siten, että kukin tehtävä arvotaan muista riippumatta jollekulle. Millä todennäköisyydellä kukin saa täsmälleen yhden tehtävän?
10. Suorakulmaisen huoneen  $275 \text{ cm}$  pituista seinää varten valmistettiin mahdollisimman tarkasti sopiva jalkalista. Tätä varten sahattiin ensin hiukan liian pitkä lista, jolloin se lattiaa pitkin paikalleen sovitettaessa jäi toisesta päästään  $16,0 \text{ cm}$  päähän nurkasta. Paljonko listaa oli vielä lyhennettävä (vastaus  $0,1 \text{ mm}$  tarkkuudella)?

Tehtävissä 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä lausekkeen  $2\sqrt[4]{3} a^{3/2} - a^3$  tarkka arvo, kun  $a = \sqrt[6]{3}$ .
2. Ratkaise yhtälöpari  $x^2 = xy$ ;  $x - y = 1$ .
3. Laske sen äärellisen kuvion pinta-ala, jota rajoittavat käyrät  $y = x^2$  ja  $y = x^3$ .
4. Osoita, että  $x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  on funktion  $2\sqrt{x^2 + 1}$  integraalifunktio.
5. Mikä on laajin joukko, jossa  $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$  määrittelee funktion? Millä  $x$ :n arvoilla tämä funktio on kasvava?
6. Suunnikkaan ABCD sivulla BC oleva piste E jakaa BC:n siten, että  $BE:EC = 1:2$ . Missä suhteessa AE jakaa lävistäjän BD?
7. a) Osoita oikeaksi kaava  $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ . Osoita tämän nojalla, likiarvoja käyttämättä, että  $x = \cos \frac{\pi}{9}$  on kolmannen asteen yhtälön  $8x^3 - 6x - 1 = 0$  juuri.  
b) Kaksitoista henkilöä asettuu jonoon umpimähkäisesti. Millä todennäköisyydellä henkilöt A ja B asettuvat niin, että heidän välissään on korkeintaan kaksi henkilöä?
8. Ratkaise epäyhtälö  $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < k$ , kun  $0 < k < 1$ .
9. a) Lauseke  $\frac{ax}{x-1} + \frac{x^3 + b}{(x-1)^2}$  määrittelee jatkuvan funktion arvoilla  $x \neq 1$ .  
Miten vakiot  $a$  ja  $b$  on valittava, jotta kyseinen funktio voitaisiin saada jatkuvaksi myös pisteessä  $x = 1$ ?  
b) Funktio  $f$  määritellään seuraavasti:  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ , kun  $x > 0$ . Osoita, että käänteisfunktio  $f^{-1}$  on olemassa, ja määritä  $(f^{-1})'(0)$ .
10. Määritä polynomin  $(3x - 1)^6 + (2 - 5x)^6$  suurin arvo välillä  $0 \leq x \leq 1$ .

Tehtävissä 5, 7 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä lausekkeen  $\frac{\frac{1}{x} + x}{x^{-1} + 1}$  arvo sievennettynä, kun  $x = \frac{1}{3}$ .
2. Ratkaise yhtälö  $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = 6$ .
3. Määritä se funktion  $x^3 - x$  integraalifunktio, joka saa arvon 1 pisteessä  $x = 1$ .
4. Pisteiden (2,1) ja (-2,6) kautta kulkeva suora sekä koordinaattiakselit rajoittavat kolmion. Määritä kolmion pinta-ala ja hypotenuusan pituus (liikiarvo kahdella desimaalilla).
5. a) Positiivinen luku  $a$  kasvaa 25% ja saatu luku pienenee 25%. Montako prosenttia viimeksi saatu luku on lukua  $a$  pienempi?  
b) Laatikossa A on 3 valkoista ja 2 mustaa palloa sekä laatikossa B 4 valkoista ja 4 mustaa palloa. Laatikosta A siirretään yksi pallo laatikkoon B. Tämän jälkeen otetaan laatikosta B yksi pallo. Millä todennäköisyydellä tämä pallo on valkoinen?
6. Määritä ne  $x$ :n arvot, joita vastaavat paraabelin  $y = x^2 + x$  pisteet ovat suorien  $y = 0$  ja  $y = 2$  välissä.
7. a) Vektorit  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$  ovat suunnikkaan viereisinä sivuina. Laske lävistäjien välinen terävä kulma (liikiarvo yhdellä desimaalilla).  
b) Neliön A sivu on  $a$ . Neliö B saadaan kiertämällä neliötä A  $45^\circ$  keskipisteensä ympäri. Määritä monikulmioiden  $A \cup B$  ja  $A \cap B$  pinta-alat.
8. Millä  $x$ :n arvoilla funktio  $f: f(x) = x^3 + x^2 - 5x$  on vähenevä ja millä kasvava? Tutki tämän perusteella, kumpi funktion arvoista  $f(-1,666667)$  ja  $f(-1,666668)$  on suurempi.
9. Suora  $y = ax$  leikkaa paraabelin  $y = a^2x^2$  origossa O ja pisteessä A sekä paraabelin  $y = x^2$  origossa ja pisteessä B. Määritä  $a$  siten, että janojen OA ja OB pituuksien suhde on 1:4.
10. a) Muodosta funktion  $f: f(x) = \sqrt{2x - 1}$  erotusosamäärä pisteessä  $x = 2$ . Määritä tämän avulla  $f'(2)$ .  
b) Määritä likiarvoja käyttämättä funktion  $f: f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  suurin ja pienin arvo välillä  $[0,3]$ .

Tehtävissä 3, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 19)^2$ .
2. Laske  $\int_0^{\pi/2} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x) dx$ .
3. a) Määritä funktion  $f: f(x) = xe^{-x}$  ensimmäisen ja toisen derivaatan nollakohdat.  
b) Ratkaise yhtälö  $x + \sqrt{x} - 2 = 0$ .
4. Määritä lausekkeen  $(3^x)^y - (\frac{1}{3})^x (\frac{1}{3})^y$  tarkka arvo, kun  $x$  ja  $y$  ovat yhtälön  $x^2 + 2x - 1 = 0$  juuret.
5. Ratkaise epäyhtälö  $a^2 + x^2 < 1 + a^2 x^2$ , kun vakio  $a$  toteuttaa ehdon  
 $1^\circ |a| < 1, 2^\circ |a| > 1, 3^\circ |a| = 1$ .
6. Mitkä kompleksitason pisteet  $z$  toteuttavat yhtälön  $iz + \bar{z} + 1 + i = 0$ ?
7. a) Suoran ympyräkartion pohjan säde on  $R$  ja korkeus  $H = 3R$ . Kartion sisään on asetettu ympyrälieriö, jonka akseli on kartion akselin osa. Määritä lieriön pohjan säde  $x$  siten, että lieriön vaipan ja pohjien alojen summa on mahdollisimman suuri.  
b) Olkoot  $f: A \rightarrow B$  ja  $g: B \rightarrow A$  sellaisia kuvauksia, että  $(g \circ f)(x) = x$  kaikilla  $A$ :n pisteillä  $x$ . Osoita, että  $f$  on injektio (so.  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ) ja  $g$  surjektio (so.  $g(B) = A$ ).
8. a) A ja B heittävät noppaa. Jos pisteluvuksi tulee kuusi, maksaa A B:lle  $x^3$  markkaa, kun taas muussa tapauksessa B maksaa A:lle  $x$  markkaa. Millä  $x$ :n arvoilla A:n voiton odotusarvo (keskiarvo) on positiivinen, ja milloin se on suurimmillaan?  
b) Määritä käyttämättä likiarvoja funktion  $f: f(x) = 8 \cos x + 15 \sin x - 17$  suurin ja pienin arvo välillä  $[0, 2\pi]$ .
9. Suora  $l$  leikkaa käyrän  $y = x^3 - \sqrt{3}x^2$  origossa sekä pisteissä A ja B. Pisteisiin A ja B piirretyt käyrän tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Mikä on  $l$ :n yhtälö?
10. a) Osoita, että yhtälöllä  $e^{-x} + e^{x^2} - \sqrt{\frac{17}{5}} = 0$  on täsmälleen kaksi reaali-juurta.  
b) Lukujono  $(x_n)$  määritellään seuraavasti:  $x_0 = 0, x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + 1, n = 1, 2, \dots$ . Johda lauseke luvulle  $x_n$  ja määritä  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .



Tehtävissä 5, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä sen kolmion ala, jota rajoittavat koordinaattiakselit ja suora  $2x + 3y - 4 = 0$ .

2. Laske  $\int_{-2}^6 6x(x - 1)dx$ .

3. Ratkaise epäyhtälö  $2x(3 - x) + 2(x - 1)^2 > 3(x - 2)$ .

4. Ratkaise yhtälöpari  $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$ ,  $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = 5$ .

5. a) Kirjoita lauseke  $\frac{(x^2 - 2xy)(y^2 - 2xy)}{xy^3 - 4x^3y}$  yksinkertaisimpaan muotoon ja las-

ke tätä käyttäen lausekkeen tarkka arvo, kun  $x = 0,04$  ja  $y = -0,01$ .

b) Ratkaise yhtälö  $3^x = 4$  (likiarvo 3:n desimaalin tarkkuudella).

6. Määritä funktion  $f: f(x) = 2 - (x - 3)^2$  suurin ja pienin arvo välillä  $[-3, 2]$ . Missä tämän välin pisteessä funktio saa arvon nolla?

7. a) Kolminumeroisen luvun numerot valitaan joukosta  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  arpanopalla. Laske, millä todennäköisyydellä saatu luku on suurempi kuin 450.

b) Ympyränsegmentin jänne on 6 ja korkeus 2. Laske vastaava keskuskulma.

8. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku  $n$ , jolle tulo  $\sqrt{n}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{4}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{7}$  on kokonaisluku.

9. a) Suunnikkaan yhtenä sivuna on origosta lähtevä vektori  $\vec{i} + 3\vec{j}$  ja yksi kärki on pisteessä  $(3\frac{1}{3}, -1\frac{1}{4})$ . Määritä muut kärjet.

b) Oheisessa taulukossa on kuvattu rahanarvon muuttumista (tukkuhintaindeksin mukaan laskettuna) vuoden 1963 rahanuudistuksesta alkaen. Vuosiluvun alla oleva kerroin osoittaa, miten ao. vuoden markka on muunnettavissa vuoden 1980 lopun markkoiksi.

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 |
| 4,30 | 4,00 | 3,82 | 3,74 | 3,64 | 3,28 | 3,16 | 3,04 | 2,89 | 2,67 | 2,27 | 1,82 | 1,61 | 1,44 | 1,30 |
| 1978 | 1979 | 1980 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 1,24 | 1,14 | 1,00 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

Minä vuonna inflaatio eteni nopeimmin (eli rahan arvon suhteellinen muutos oli suurin)?

10. Määritä  $a$  siten, että  $x$ -akselin, käyrän  $y = x^4 - x^2 + 1$  sekä suorien  $x = a$  ja  $x = a + 1$  rajoittaman alueen ala on mahdollisimman pieni.

Tehtävissä 4, 6 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $3x = 3 + |2x - 3|$ .
2. Laske lausekkeen  $\log_k \frac{k^6 \sqrt{k}}{\sqrt{k^3}}$  ( $k > 1$ ) arvo.
3. Laske  $\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x})^2 dx$ .
4. a) Jänne jakaa ympyrän kehän osiin, joiden suhde on 1:2. Mikä on jängteen ja ympyrän halkaisijan suhde? (Ei likiarvoja).  
b) Vektoreiden  $\vec{OA} = \vec{a}$  ja  $\vec{OB} = \vec{b}$  kärkipisteiden A ja B kautta kulkevalta suoralta on määritettävä piste C siten, että  $|\vec{CB}|:|\vec{CA}| = 3:5$ . Määritä vektoreiden  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  avulla kaikki ehdon täyttävät vektorit  $\vec{OC}$ .
5. Mitä arvoja funktio  $f: f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , ei voi saada?
6. a) Olkoon  $z = x + iy$  kompleksiluku ja  $\bar{z}$  sen liittoluku. Osoita, että  $z + \bar{z}$  ja  $z\bar{z}$  ovat reaalisia. Määritä kaikki kompleksiluvut  $z$ , jotka toteuttavat ehdon  $z + \bar{z} \geq z\bar{z}$ . Määritä näistä kompleksiluvuista se, jolla  $y$  on mahdollisimman suuri.  
b) Määritä  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - 1| - 1}{|x|}$ .
7. Piirrä epäyhtälöiden  $0 \leq x \leq 12$ ,  $y \geq 0$ ,  $y \leq \frac{1}{16}(x-4)^2 + 8$  ja  $y \geq 3x - 24$  määrittelemä alue sekä laske tämän alueen pinta-ala.
8. Paraabelin  $y = \frac{1}{2}x^2$  ja suoran  $y = 2$  rajoittama alue pyöriähtää suoran  $y = 2$  ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.
9. a) Toisen asteen yhtälössä  $x^2 + px + q = 0$  toteuttavat umpimähkään valitut reaaliset kertoimet  $p$  ja  $q$  seuraavat ehdot:  $|p| \leq 1$  ja  $|q| \leq 1$ . Millä todennäköisyydellä molemmat juuret ovat positiiviset?  
b) Määritä lausekkeen  $\sin(2x + \frac{\pi}{6})$  tarkka arvo, kun  $\tan x = 2$ .
10. Suorakulmiossa ABCD on  $AB = DC = 4$  ja  $AD = BC = 2$ . Olkoon E sivun AD keskipiste. Sivulta AB on määritettävä piste X siten, että murtoviivan EXC pituus on 1<sup>o</sup> mahdollisimman pieni, 2<sup>o</sup> mahdollisimman suuri.

Tehtävissä 5, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Olkoon  $P(x) = ax^2 + ax - 2$  ja  $P'(3) = 7$ . Määritä  $a$ .
  2. Ratkaise yhtälö  $(3 - 2x)(3x + 5) = 5(7x + 9)$ .
  3. Määritä sievennetyssä muodossa polynomifunktion  $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$  arvo, kun  $x = \sqrt{3}$ , ja laske sen kolmidesimaalinen likiarvo.
  4. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat paraabeli  $y = (x - 2)^2 + 1$  ja suorat  $x = 0$ ,  $y = 0$  ja  $x = 3$ .
  5. a) Olkoon  $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$  ja  $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ . Laske vektorin  $\vec{c} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$  pituus. Onko vektori  $\vec{c}$  kohtisuorassa vektoria  $\vec{a}$  vastaan?  
 b) Suoran neliöpohjaisen pyramidin pohjaneliön sivu on 7 m ja pyramidin korkeus 12 m. Laske pyramidin sivusärmän pituus ja kaltevuuskulma pohjan suhteen (vastaukset kahden numeron tarkkuudella).
  6. Minä vuonna viereisen taulukon mukaan Taulukko 1. Suomen maatalouden rakenteen kehitystä ilmaisevia lukusarjoja. Suomen koko peltopinta-ala oli suurimmillaan, ja kuinka suuri se silloin oli? Kuinka pitkä olisi sellaisen neliön sivu, jonka alana olisi mainittu peltoala? (Lähde: Vuoden 1983 Almanakka)
- | Vuosi | Maa- ja metsätalouden osuus työvoimasta % | Tilojen lukumäärä 1000 kpl | Tilojen keskipeltoala ha |
|-------|-------------------------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 1920  | n. 70                                     | 184.9                      | 10.89                    |
| 1930  | n. 60                                     | 209.1                      | 10.74                    |
| 1941  | 49                                        | 207.4                      | 11.07                    |
| 1950  | 42                                        | 261.8                      | 9.29                     |
| 1959  | 34                                        | 284.6                      | 8.91                     |
| 1969  | 23                                        | 263.7                      | 9.94                     |
| 1972  | 19                                        | 246.6                      | 10.35                    |
| 1975  | 15                                        | 225.3                      | 10.95                    |
| 1978  | 13                                        | 211.2                      | 11.54                    |
| 1980  | 10                                        | 204.0                      | 11.92                    |
7. Palkankorotukseksi esitetään 3,5 prosenttia ja kuitenkin vähintään 0,77 mk tunnilta. Kuinka suurilla tuntipalkoilla korotus maksettaisiin prosentuaalisena?
  8. Puoliympyrällä  $P$  ja ympyrällä  $Y$  on samanpituiset piirit ( $= a$ ). Kuinka monta prosenttia pienempi  $P$  on alaltaan kuin  $Y$ ? (Vastaus 0,1 prosenttiyksikön tarkkuudella.)
  9. a) Millä  $x$ :n arvoilla lauseke  $\sqrt{8 - 2x - x^2}$  on reaalinen? Määritä lausekkeen suurin ja pienin arvo, kun  $-3 \leq x \leq 2$ .  
 b) Luokkakuvaan tulee 30 oppilasta. Jokainen oppilas muista riippumatta räpäyttää silmiään keskimäärin joka kymmenes sekunti. Häiritsevä liike kestää 0,2 s. Millä todennäköisyydellä kuvassa kukaan ei räpäytä silmiään?
  10. a) Funktio  $f$  määritellään seuraavasti:  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 - 5x + 2}$ , kun  $x > 2$ , ja  $f(x) = x + a$ , kun  $x \leq 2$ . Tutki, voidaanko luku  $a$  valita siten, että funktio  $f$  on kaikkialla jatkuva.  
 b) Tutki, kuinka monta numeroa on luvussa  $3^{54}$  ja mitkä ovat luvun kaksi ensimmäistä ja kaksi viimeistä numeroa.

Tehtävissä 3, 4, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_1^e (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})dx$ .
2. Määritä yhtälön  $(1 + x + x^2)^2 = 1 + x + x^2$  reaalijuuret.
3. a) Määritä  $x$ , kun  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  ja  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ .  
 b) Eräänä viisivuotiskautena 1000 markan talletus kasvoi korkoa 5% vuodessa. Samana aikana hinnat nousivat 7% vuodessa. Kuinka monta prosenttia talletuksen reaaliarvo aleni tuona aikana?
4. a) Jaa vektori  $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$  kahteen keskenään kohtisuoraan komponenttiin, joista toinen on suoran  $3x - y + 2 = 0$  suuntainen.  
 b) Tasasivuisen kolmion, jonka sivut ovat  $= s$ , sisään on piirretty kolme  $r$ -säteistä ympyrää, jotka sivuavat toisiaan pareittain. Lisäksi kukin ympyröistä sivuaa kahta kolmion sivua. Määritä suhde  $r:s$ .
5. Määritä ellipsin  $x^2 + 4y^2 = 4$  sisään piirretyistä suorakulmioista se, jonka piiri on pisin.
6. Ratkaise yhtälöpari  $x^{1/y} = 27$ ,  $(\frac{x^2}{3})^y = 3$ .
7. a) Todista, että yhtälöllä  $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$  on täsmälleen yksi reaalijuuri, ja määritä juuren arvo kolmen desimaalin tarkkuudella.  
 b) Määritä käyrä  $y = f(x)$ , jolla on seuraavat ominaisuudet: 1<sup>o</sup> Käyrän pisteen  $(t, f(t))$  piirretty tangentti leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $(t + \frac{1}{t}, 0)$ , kun  $t \neq 0$ , ja on vaakasuora, kun  $t = 0$ . 2<sup>o</sup> Käyrä kulkee pisteen  $(1, 1)$  kautta. Piirrä käyrä.
8. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2\cos x)^n$  suppenee, ja mikä on tällöin sen summa?
9. a) Olkoon  $I_n$   $x$ -akselin jana  $[2n, 2n+1]$ . Tason pisteestä  $(0, 1)$  piirretään suora, joka muodostaa  $x$ -akselin kanssa umpimähkään valitun kulman  $\alpha$ . Millä todennäköisyydellä suora kohtaa jonkin janoista  $I_{-2}, I_{-1}, I_0, I_1$  ja  $I_2$ ?  
 b) Osoita, ettei taso, jonka määräävät origosta lähtevien vektoreiden  $\vec{a} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + (x+1)\vec{j} + \vec{k}$  ja  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + (x+2)\vec{k}$  kärjet, millään  $x$ :n arvolla ole vektorin  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  suuntainen.
10. Määritä  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , kun  $f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}$  ja  $x \in [0, 1]$ . Piirrä funktioiden  $f_1, f_{10}$  ja  $f$  kuvaajat. Laske  $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$  ja määritä  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  nojautuen siihen, että  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = 0$ .

Tehtävissä 4, 8 ja 9 käsitellään joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{2}{3}(x - 2) > \frac{4}{5}x - 1$ .
2. Ratkaise yhtälö  $(x - 1)(x - 2) = 3(x - 1)$ .
3. Määritä polynomifunktion  $x^3 + 3x + 5$  derivaatan pienin arvo.
4. a) Tasasivuinen kolmio jaetaan yhdestä kärjestä piirrettyillä suorilla kolmeen yhtäsuureen osaan. Määritä näiden suorien välinen kulma kahden desimaalin tarkkuudella.  
b) Lukion eri luokilla annettujen arvosanojen lukumäärät ja keskiarvot on merkitty oheiseen taulukkoon.

|             |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| arvos. lkm. | 408  | 387  | 396  | 364  | 375  | 328  | 242  | 217  | 229  |
| keskiarvo   | 7,21 | 7,36 | 7,16 | 6,92 | 6,81 | 7,03 | 7,74 | 7,82 | 7,69 |

Laske kahden desimaalin tarkkuudella kaikkien lukiossa annettujen arvosanojen keskiarvo.

5. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät  $y = x^3$  ja  $y = -x^2$ .
6. Vektorit  $-1950 \vec{i} + 992 \vec{j}$  ja  $4\vec{i}$  ovat kolmion sivuina. Määritä kolmion ala.
7. Määritä käyrän  $y = x^3 + x$  niiden tangenttien yhtälöt, jotka ovat suoran  $y = 4x$  suuntaiset.
8. a) Laske käyttämättä likiarvoja  $\lg 250\,000\,000 - \lg 0,000\,000\,000\,025$ .  
b) Kolmea arpanoppaa heitetään yhtä aikaa. Millä todennäköisyydellä saadaan täsmälleen kaksi kuutosta?
9. a) Osoita, että  $|3x - 1| + |3x - 2| \geq 1$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Millä  $x$ :n arvoilla yhtäsuuruusmerkki on voimassa?  
b) Olkoon funktio  $f$  määritelty välillä  $[-1, 5]$  siten, että  $f(x) = 3x - 4$ . Millä muuttujan arvoilla on määritelty funktion  $f$  käänteisfunktio  $f^{-1}$ , mikä arvon käänteisfunktio saa arvolla 8 ja millä muuttujan arvolla käänteisfunktio saa arvon 0?
10. Määritä funktion  $f$ :  $f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 9x + 25}$  suurin ja pienin arvo välillä  $[-2, 2]$ .

Tehtävissä 3, 4, 5 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_{1/2}^1 (x - x^{-1})^2 dx$ .
2. Määritä vakiot A ja B siten, että funktio  $f: f(x) = Ax + B \cos \pi x$  toteuttaa ehdot  $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ,  $f'(\frac{1}{2}) = 0$ .
3. a) Ratkaise yhtälö  $1 + 4\sqrt{1-x} = 4x$ .  
b) Määritä ne  $x$ :n arvot, joilla polynomifunktio  $6x^3 - 7x^2 - 1$  saa saman arvon kuin arvolla  $x = 1$ .
4. a) Sievennä lauseke  $f(x) = \frac{|1+x| + |3+x| + x}{x(|x| - 2)}$ , kun  $-3 < x < -1$ , sekä määritä  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .  
b) Laske  $|\bar{a} + 2\bar{b}|$ , kun  $|\bar{a}| = 1$ ,  $|\bar{b}| = 3$  ja  $|3\bar{a} + \bar{b}| = 2\sqrt{6}$ .
5. a) Todista:  $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ , kun  $x \neq 0$ .  
b) Millä välin  $[0, \pi]$  osavälillä funktio  $f: f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  on vähenevä?
6. Mikä käyrän  $y = e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ , tangenteista rajoittaa koordinaattiakselien kanssa mahdollisimman suuren kolmion, ja mikä on tämän kolmion ala?
7. Funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on parillinen (so. kaikilla  $x \in \mathbb{R}$   $f(-x) = f(x)$ ) ja derivoituva. Osoita, että  $f'(0) = 0$ .
8. a) Millä  $t$ :n arvoilla origosta lähtevien vektoreiden  $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$ ,  $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$  ja  $\bar{c} = t(\bar{i} + \bar{j}) + \bar{k}$  kärjet määrittävät suorakulmaisen kolmion?  
b) Yhtälössä  $x^2 - px + q = 0$   $p$  ja  $q$  ovat alkulukuja, ja yhtälön juuret ovat luonnollisia lukuja. Mitkä lukuparit  $(p, q)$  voivat esiintyä yhtälössä ja mitkä ovat vastaavat juuret?
9. Todista:  $e^x + e^{-x} - 2 - x^2 \geq 0$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .
10. Millä  $a$ :n arvolla käyrä  $y = 2 \cos ax$  ( $a > 0$ ) jakaa suorien  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $y = 1$  ja  $y = -1$  rajoittaman neliön kolmeen yhtäsuureen osaan?

Tehtävissä 4, 7, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske lausekkeen  $\sqrt{a^2 + b^2}$  tarkka arvo, kun  $a = 2$ ,  $b = \frac{8}{3}$ .
2. Ratkaise yhtälöt  $1^\circ x(3 - x) = 0$  ja  $2^\circ x(3 - x) = -10$ .
3. Määritä vakio  $C$  siten, että integraalin  $\int_{-1}^1 (4x^4 + C)dx$  arvo on 1.
4. a) Oppilaan todistuksen keskiarvo  $\bar{x}$  on laskettu kymmenestä oppiaineesta. Jos hän nostaisi neljän oppiaineen arvosanaa, kutakin yhdellä numerolla, tulisi keskiarvoksi 8,0. Määritä  $\bar{x}$ .  
b) Kolmiossa  $ABC$  sivu  $AC = 6,0$  cm, kulma  $ABC = 90^\circ$  ja kulma  $BAC = 50^\circ$ . Laske sivut  $AB$  ja  $BC$  millimetrin tarkkuudella.
5. Eräs virkamies saa peruspalkkaa 5000 mk kuukaudessa ja lisäksi viisi ikälisää, joista ensimmäinen on 6 %, toinen 6 %, kolmas 5 %, neljäs 4,5 % ja viides 4 %. Mikä on virkamiehen loppupalkka, jos  $1^\circ$  jokainen ikälisä lasketaan peruspalkan perusteella,  $2^\circ$  jokainen ikälisä lasketaan peruspalkan ja aikaisempien ikälisien yhteismäärän perusteella?
6. Paraabeli  $y = \frac{3\pi}{16}(1 - x^2)$  jakaa ympyrän  $x^2 + y^2 = 1$  rajoittaman alueen kahteen osaan. Määritä suuremman osan suhde pienempään.
7. a) Laske  $\int_0^2 |x - 1|dx$ .  
b) Luvusta 100 vähennetään sen kolmasosa, jäljelle jäävästä luvusta jälleen sen kolmasosa jne. Kuinka paljon alkuperäisestä luvusta on jäljellä  $1^\circ$  kymmenennen,  $2^\circ$  sadannen vähennyskerran jälkeen? Vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
8. Teollisuusrobotti voidaan säätää valmistamaan 100 - 300 koneen osaa tunnissa. Virheellisten osien prosentuaalinen osuus on suoraan verrannollinen valmistusnopeuteen. Kun nopeus on 100, virheprosentti on 20 %. Millä nopeudella robotti tuottaa eniten virheettömiä osia?
9. a) Suunnikkaassa  $ABCD$   $\vec{AB} = 2\vec{i}$  ja  $\vec{AD} = \vec{i} + \vec{j}$ . Sivulta  $AB$  valitaan piste  $X$  ja sivulta  $DC$  piste  $Y$  siten, että  $\vec{XC} = \vec{AY}$  ja vektori  $\vec{XY}$  on kohtisuorassa vektoria  $\vec{i}$  vastaan. Määritä vektori  $\vec{AX}$ .  
b) Luokan oppilasmäärä on 32. Millä todennäköisyydellä ainakin kahdella oppilaalla on sama syntymäpäivä? (Karkauspäivää ei oteta huomioon.)
10. a) Osoita käyttämättä likiarvoja, että  $\sqrt{-14 + 16x + 4x^2} = 64 - \sqrt{3234}$ , kun  $x = -30 + \sqrt{1056}$ .  
b) Kahden kaupungin välinen etäisyys on 100 km. Kaupunkeihin rakennetaan yhtä korkeat antennitornit. Miten korkeita tornien tulisi olla, jotta saavutettaisiin suora näköyhteys? Maapallon säde on noin 6380 km. (Vastaus metrin tarkkuudella.)

Tehtävissä 4, 6, 8 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Minkä arvon lauseke  $\frac{3}{2+x}$  saa pisteessä  $x = \frac{5}{6}$ ? Missä pisteessä lauseke saa arvon  $\frac{15}{16}$ ? Tarkat arvot.
2. Ratkaise yhtälöt  $1^0 (e^x - 1)(e^x - 3) = 0$  ja  $2^0 (e^x - 1)(e^x - 3) = 3$ .
3. Laske  $\int_0^{\pi/2} (\cos x + \sin x)^2 dx$ .
4. a) Sähköyhtiö veloittaa sähköstä kiinteän perusmaksun 300 mk vuodessa ja lisäksi 0,275 mk kilowattitunnilta. Millä välillä vaihtelee kilowattitunnin kokonaishinta sellaisessa taloudessa, jossa vuotuinen kulutus vaihtelee 3000 ja 4000 kilowattitunnin välillä?  
b) Määritä ne hyperbelin  $x^2 - y^2 = 16$  pisteet, jotka ovat lähinnä pistettä (0,6).
5. Osoita, että funktio  $f: f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  toteuttaa kaikilla reaalilukupa-reilla  $(a,b)$  yhtälön  $f(a+b) + f(a-b) = 2f(a)f(b)$ .
6. a) Tuotteen hinta nousi  $p$  %. Korotuksen jälkeen sitä saa samalla rahamäärällä 9 % vähemmän kuin ennen korotusta. Määritä  $p$  yhden desimaalin tarkkuudella.  
b) Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat suorat  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  ja käyrä  $y = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ .
7. Määritä kaikki reaaliluvut  $x$ , joilla  $\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \cos 2x + i \sin 2x$ .
8. a) Erään tehtaan valmistamien hehkulamppujen kestoajan jakaumalla on tiheysfunktio  $f$ :  
$$f(t) = \begin{cases} 6[0,25 - (t - 1,5)^2] & , \text{ kun } 1 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{ muualla} \end{cases}$$
  
(muuttuja  $t$  ilmaisee ajan tuhansina tunteina). Millä todennäköisyydellä tällainen lamppu palaa vähintään 1300 tuntia?  
b) Osoita, että ympyröillä  $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay = 8a + 8$  on yhteinen tangentti vakion  $a$  saadessa kaikki reaaliarvot, jotka ovat  $\neq -2$ . Mikä on tämän tangentin yhtälö?
9. a) Määritä jokin sellainen luku  $h$  ( $> 0$ ), että  
 $|\sqrt{1+x} - 1| < 10^{-13}$ , kun  $|x| < h$ .  
b) Origosta lähtevien vektoreiden  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$  ja  $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  kärjet määräävät tason. Laske origon etäisyys tästä tasosta.
10. Määritä funktion  $f: f(x) = \int_0^x (|t| - |t - 1|)dt$  suurin ja pienin arvo välillä  $[-1,3]$ .



Tehtävissä 4, 5, 6 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise epäyhtälö  $3(x + 4) < 12(15 + 2x)$ .
2. Laske suorien  $2x - 5y + 6 = 0$  ja  $x + y - 3 = 0$  leikkauspisteen etäisyys origosta.
3. Millä  $x$ :n arvoilla funktion  $f: f(x) = x^5 - 10x^4 - x + 9$  derivaatta saa arvon  $-1$ ?
4. a) Määritä käyrälle  $y = x - x^2$  suoran  $x + y - 2 = 0$  suuntainen tangentti. Piirrä kuvio.  
b) Sievennä  $e^{-2} + 2 \ln 3$  ja laske tämän likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.
5. a) Laske käyrän  $y = (x^2 - 1)^2$  ja  $x$ -akselin rajoittaman alueen ala.  
b) Puolisuunnikkaan ala on 30, sen yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 6 ja 9 ja toisen erisuuntaisista sivuista pituus 5. Kuinka pitkä voi olla neljäs sivu?
6. a) Olkoon  $\vec{OA} = -5\vec{i} - 9\vec{j}$  ja  $\vec{OB} = 7\vec{i} + 7\vec{j}$ . Janalta  $AB$  on etsittävä sellainen piste  $C = (x, y)$ , että  $\vec{AC} = \frac{3}{4} \vec{AB}$ .  
b) Tavarahan hinta nousi eräänä vuonna 15 % ja seuraavana vuonna vielä 5 %, jonka jälkeen sen myyntihinta oli 395 mk. Mikä oli tavarahan hinta ennen ensimmäistä korotusta? (Vastaus 1 markan tarkkuudella).
7. a) Millä  $x$ :n arvoilla funktio  $f: f(x) = \lg(20x^2 - x^4)$  on määritelty? Mitkä arvot funktio saa?  
b) Tutkittaessa kahden suureen  $x$  ja  $y$  välistä riippuvuutta saatiin mittaustuloksina seuraavat arvoparit  $(x; y)$ :  
 $(6, 0; 2, 8), (9, 5; 1, 8), (3, 0; 5, 7), (7, 0; 2, 4), (12, 0; 1, 4),$   
 $(1, 9; 8, 8), (1, 2; 14, 1), (2, 2; 7, 8), (14, 0; 1, 3), (4, 3; 3, 9).$   
Piirrä vastaavat pisteet  $xy$ -koordinaatistoon ja päättelä, minkä tyyppinen  $x$ :n ja  $y$ :n välinen riippuvuus voisi olla. Mikä olisi tämän mukaan arvoa  $x = 20$  vastaava  $y$ :n arvo?
8. Suoran ympyräpohjaisen kartion sivujana on  $s$ . Määritä kartion korkeus siten, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Kuinka suuri tämä tilavuus on?
9. Kymmenelle henkilölle arvotaan viisi tehtävää. Arvontaa suoritettaessa unohdetaan poistaa jo tehtävän saaneitten nimet. Kuinka suuri on todennäköisyys, että tehtävät tästä huolimatta tulevat eri henkilöille?
10. Aurinko näkyy levynä, jonka halkaisija on  $0,5^\circ$ . Kuinka korkealla lensi 70 m pitkä lentokone, joka näkyi  $45^\circ$  horisontin yläpuolella suoraan sivulta nähtynä auringon levyn halkaisijan pituisena?

Tehtävissä 4, 5, 6 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä funktion  $f: f(x) = \ln(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$  derivaatta pisteessä  $x = 3$ .
2. Ratkaise yhtälö  $x = \sqrt{x} + 110$ .
3. Ratkaise yhtälöpari  $x + y + a = 0$ ,  $x + ay + 1 = 0$  vakion  $a$  kaikilla arvoilla.
4. a) Määritä janan  $PQ$  suurin ja pienin pituus, kun  $P = (1, 2)$  ja piste  $Q$  liikkuu ympyrällä  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ .  
b) Laske  $\int_0^1 x e^{2x-4} dx$ .
5. a) Kaksi suoran ympyräkartion pohjan suuntaista tasoa jakaa kartion kolmeen yhtä suureen osaan. Missä suhteessa tasot jakavat kartion sivujanan?  
b) Millä  $x$ :n positiivisella arvolla vektoreiden  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ja  $x\vec{k}$  kärkien määräämän kolmion ala on 2?
6. a) Ratkaise yhtälö  $e^x + e^{1-x} - e - 1 = 0$ .  
b)  $X$  pelaa noppapeliä, jonka säännöt ovat seuraavat: Noppaa heitetään 10 kertaa. Jos ainakin yhdellä heitolla tulee ykkönen,  $X$  joutuu maksamaan 2000 markkaa. Muussa tapauksessa  $X$  voittaa 10 000 markkaa. Mikä on  $X$ :n voiton odotusarvo?
7. a) Määritä lausekkeen  $x - 3y$  suurin ja pienin arvo siinä  $xy$ -tason osajoukossa, jonka määräävät epäyhtälöt  $x \geq -1$ ,  $y \geq -1$ ,  $y - x + 2 \geq 0$  ja  $x + y - 5 \leq 0$ .  
b) Määritä yhtälön  $z^4 = -1$  kaikki juuret muodossa  $x + iy$ .
8. Millä  $x$ :n arvolla funktio  $f: f(x) = \int_0^{\pi/2} (x - \sin t)^2 dt$  saa pienimmän arvonsa? Mikä tämä arvo on?
9. Määritä ympyrän  $x^2 + y^2 = 1$  ja paraabelin  $y = x^2 + 1$  yhteiset tangentit.
10. Millä  $x$ :n arvolla funktio  $f: f(x) = e^{-2x}(2x^2 - 2x + 1 - e^{-2x})$  saa suurimman arvonsa? (Vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.)

Tehtävissä 3, 5, 6 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $2 - \frac{x-1}{2} = x - \frac{1+x}{2}$ .
2. Määritä lausekkeen  $(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}) : (x+y)$  tarkka arvo, kun  $x = \frac{7}{3}$  ja  $y = \frac{3}{7}$ .
3. a) Millä  $a$ :n arvoilla funktio  $f: f(x) = a^2x^2 + 2ax + 1$  toteuttaa ehdon  $f(2) = f'(2)$  ?  
b) Neliön muotoisessa varastossa suoritettiin seinien sisäpuolinen lisäeristys, jolloin seinät tulivat 10 cm paksummiksi. Kuinka monta  $m^2$  tällöin menetettiin, kun alkuperäinen pinta-ala oli  $100 m^2$  ?
4. Kameran valmistaja ilmoitti erään kameran lyhimmäksi valotusajaksi  $\frac{1}{500}$  s. Tar-  
kistusmittauksessa osoittautui todelliseksi valotusajaksi  $\frac{1}{435}$  s. Määritä virhe-  
prosentti.
5. a) Olkoon  $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$ ,  $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$  ja  $\bar{c} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ . Määritä vakiot  $s$  ja  $t$  siten,  
että  $\bar{c} = s\bar{a} + t\bar{b}$ .  
b) Eräässä tehtaassa valmistettavien kirjekuorien painojen jakautumista kuvaa  
normaalijakauma, jonka odotusarvo  $\mu$  on 1,84 g ja keskihajonta  $\sigma = 0,05$  g. Mikä  
on todennäköisyys sille, että kuoren paino on alle 1,93 g ?
6. a) Kukkaro sisältää seitsemän markan kolikkoa sekä viiden markan kolikon. Kuk-  
karosta otetaan umpimähkään viisi kolikkoa. Mikä on todennäköisyys sille, että  
kukkaraan jää kolme markkaa?  
b) Tehtaan tuotanto lisääntyi eräänä vuonna 8 % edelliseen vuoteen verrattuna.  
Tuotteen hinta laski kuitenkin samanaikaisesti 6 %. Kuinka monella prosentilla  
tuotannon arvo nousi tai laski? (Vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.)
7. Määritä raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} \right)^2$ .
8. Käyrä  $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ ,  $x$ -akseli,  $y$ -akseli ja suora  $x = 3$  rajoittavat  
alueen. Laske alueen pinta-ala  $A$ . Määritä ne pisteet  $a$ , joille  $0 < a < 3$  ja  
 $3f(a) = A$ .
9. a) Tikapuut on asetettu seinää vasten siten, että alapää on 3 m:n etäisyydellä  
seinästä. Kun alapäättä siirretään seinästä poispäin 2 m, laskeutuu yläpää 1 m:n.  
Laske tikapuiden pituus.  
b) Ratkaise epäyhtälö  $x^4 - x^2 > -\frac{1}{4}$ .
10. Autoilija havaitsi keskelle tietä pysähtyneen toisen auton 100 m:n etäisyydellä.  
Autoilijan reaktioaika (so. havainnon teosta jarrutuksen aloittamiseen kulunut  
aika) oli 1,0 s ja auton nopeus 100 km/h. Jarrutusmatka olisi ollut 50 m, jos  
nopeus olisi ollut 80 km/h. Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden  
neliöön. Pysähtyikö auto ennen yhteentörmäystä?

Tehtävissä 1, 4, 5 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Määritä funktion  $f: f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$  derivaatan nollakohdat.  
b) Tavarahan hinta oli aluksi 100 mk, mutta se nousi sitten 8 %. Myöhemmin tätä hintaa alennettiin  $p$  %, jolloin lopulliseksi hinnaksi tuli 97 mk 20 p. Määritä  $p$ .
2. Millä vakion  $a$  arvoilla funktio  $P: P(x) = x^2 + 4x + a$  ei saa negatiivisia arvoja?
3. Laske lausekkeen  $\sin 2x$  tarkka arvo, kun  $\cos x = \frac{5}{13}$  ja  $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ .
4. a) Laske  $\int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx$ .  
b) Ratkaise epäyhtälö  $(x-1)^4 < 10^{-8}$ .
5. a) Noppaa heitetään kuusi kertaa. Mikä on todennäköisyys sille, että silmäluku kolme esiintyy täsmälleen kolme kertaa?  
b) Esitä vektori  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  kantavektorien  $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{e}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$  avulla.
6. Merkitään lämpötilaa mitattuna Celsius-asteikossa  $C$ :llä ja Fahrenheit-asteikossa  $F$ :llä. Samaa lämpötilan muutosta vastaavien  $C$ :n ja  $F$ :n muutosten  $\Delta C$  ja  $\Delta F$  suhde on vakio. Veden jäätymispistettä vastaa  $F$ :n arvo 32 ja kiehumapistettä  $F$ :n arvo 212. Lausu  $C$   $F$ :n funktiona ja kääntäen sekä piirrä näiden funktioiden kuvaajat. Onko henkilöllä kuumetta, jos hänen ruumiinlämpönsä on  $100^\circ F$ ?
7. Käyrän  $y = \sqrt{x|x-a|(2a-x)}$  ( $a > 0$ ) pyörähtäessä  $x$ -akselin ympäri syntyy kaksi pyörähdyskappaletta. Millä  $a$ :n arvoilla nämä ovat keskenään yhtä suuret?
8. a) Missä kompleksitason pisteissä on voimassa yhtälö  $z\bar{z} = 4(z-1)(\bar{z}-1)$ ? Piirrä kuvio.  
b) Suorakulmion muotoisen biljardipöydän kärkinä ovat pisteet  $O = (0,0)$ ,  $A = (0,1)$ ,  $B = (\frac{5}{4}, 1)$  ja  $C = (\frac{5}{4}, 0)$ . Pisteestä  $P = (0, \frac{1}{3})$  lähtevä pallo kohtaa sivun  $AB$  pisteessä  $X$  ja kimpoaa siitä sivujen  $BC$  ja  $CO$  kautta takaisin pisteeseen  $P$ . Määritä piste  $X$ .
9. Ympyräsektori  $AOB$ , jonka säde on 1, taivutetaan ympyräkartion vaipaksi liittämällä yhteen säteet  $OA$  ja  $OB$ . Miten on valittava sektorin keskuskulma  $AOB$ , jotta saatu kartio olisi tilavuudeltaan mahdollisimman suuri? Ilmoita kulman  $AOB$  tarkka arvo ja likiarvo asteen sadasosan tarkkuudella.
10. Olkoon  $f$  funktio, joka on jatkuva arvolla  $x = 0$  ja toteuttaa kaikilla  $x$ :n arvoilla ehdon  $f(x)f(-x) = |x|$ . Osoita, että  $f$  ei ole derivoituva kohdassa  $x = 0$ . Anna esimerkki tällaisesta funktiosta.

Tehtävissä 3, 5, 6 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Pesuainetta A sisältävä 0,7 litran pullo maksaa 13 mk, kun taas 0,6 litran pullo pesuainetta B maksaa 11 mk. Kumpi pesuaine on edullisempaa?
2. Määritä  $a$ , kun  $\int_0^1 (x^2 + a)dx = 2 \int_0^1 x^2 dx$ .
3. a) Määritä ne reaaliset  $x$ :n arvot, joilla polynomifunktion  $f: f(x) = x^4 - x^3 + x^2$  derivaatta on 0.  
b) Keppi on kohtisuorassa maan pintaa vastaan ja sen varjo maan pinnalla on kaksi kertaa kepin pituinen. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella se terävä kulma, jonka auringon säteet muodostavat maan pinnan kanssa.
4. Ratkaise epäyhtälö  $1 < (x + 2)^2$ .
5. a) Laske lausekkeen  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  arvo, kun  $x + \frac{1}{x} = 3$ .  
b) Erään henkilöauton pyörien halkaisija on 57 cm. Kuinka monta kierrosta minuutissa pyörät pyörivät auton kulkiessa nopeudella 100 km/h?
6. a) Millä vakion  $t$  arvoilla vektorit  $\vec{a} = t\vec{i} + 4\vec{j}$  ja  $\vec{b} = 3\vec{i} - 5t\vec{j}$  ovat suorakulmaisen kolmion sivuina?  
b) Positiivilukua  $a$  suurennetaan  $p\%$  ja saatua lukua pienennetään  $p/2\%$ . Millä  $p$ :n arvolla lopputulos on mahdollisimman suuri?
7. Eräs tehdas voi jätteitään varten hankkia joko kymmenen viidensadan litran kuution muotoista terässäiliötä tai yhden viidentuhannen litran kuution muotoisen säiliön, joka on valmistettu paksuudeltaan kaksinkertaisesta teräslevystä. Kummassa tapauksessa tarvitaan vähemmän terästä?
8. a) Suorakulmiossa ABCD sivun BC pituus on 100 cm ja  $AC:AB = AB:BC$ . Määritä lävistäjän AC pituus.  
b) Laatikossa A on kolme mustaa palloa ja laatikossa B kolme valkoista palloa. Laatikosta A siirretään umpimähkään valittu pallo laatikkoon B, josta tämän jälkeen siirretään umpimähkään valittu pallo laatikkoon A. Näin tehdään kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä laatikossa A on tämän jälkeen kolme valkoista palloa?
9. Määritä funktion  $f: f(x) = |2x^3 - x^2 - 8x + 4|$  suurin arvo välillä  $[1/4, 2]$ .
10. Maapallon väkiluku oli 2,5 miljardia v. 1951 ja 4,4 miljardia v. 1981. Oletetaan väkiluvun muuttuvan siten, että se hetkellä  $t$  on  $Ce^{t-t_0}$ . Tässä  $t \geq t_0$  on aika,  $t_0 = 1951$  ja  $C$  sekä  $a$  ovat vakioita. Mikä on tämän mukaan väkiluku v. 2025?

Tehtävissä 1, 5, 7 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Määritä yhtälöiden  $(1-x)^7 = -10^{-14}$ ,  $(1-x)^{14} = 10^{-14}$ ,  $(1-x)^{21} = 1$  reaali-juuret.  
b) Missä suhteessa on sekoitettava vettä ja 5-prosenttista suolaliuosta, jotta saataisiin 3-prosenttista liuosta?
2. Ratkaise epäyhtälö  $\sqrt{2x-1} < |x|$ .
3. Laske integraalin  $\int_{-0,01}^{10} \frac{dx}{x+3}$  arvo kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
4. Laske sen kolmion ala, jota rajoittavat koordinaattiakselit sekä käyrälle  $y = \frac{2}{x}$  pisteeseen (1,2) piirretty normaali.
5. a) Millä  $x$ :n arvoilla lauseke  $\sqrt{2x-1} + 3\sqrt{7-x}$  on reaalinen? Määritä lausekkeen suurin ja pienin arvo.  
b) Osoita, että suora  $y_0 y = p(x + x_0)$  sivuaa paraabelia  $y^2 = 2px$  pisteessä  $(x_0, y_0)$ .
6. Määritä suurin niistä tasakylkisistä puolisuunnikkaista, joiden kaksi kärkeä ovat  $(-a, 0)$  ja  $(a, 0)$  ja kaksi kärkeä ellipsillä  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $y \geq 0$ ). Mikä on tämän puolisuunnikkaan ala?
7. a) A sijoittaa joka vuoden alussa 6 % säästötilille 20 000 markkaa hankkiakseen asunnon, jonka hinta säästämisen alkaessa on 90 000 markkaa. Asunnon hinta nousee 12 % vuodessa. Kuinka monen sijoituskerran jälkeen säästöt riittävät asunnon ostamiseen?  
b) Määritä pisteen  $P = (3, -2, 4)$  etäisyys pisteiden  $A = (-1, 2, 3)$  ja  $B = (4, 5, 6)$  kautta kulkevasta suorasta.
8. a) Määritä funktion  $f: f(x) = \frac{\sin x}{x}$  derivaatan nollakohta  $x = a$  kolmen desimaalin tarkkuudella, kun  $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ .  
b) Luku 37 esitettynä 2-järjestelmässä on  $2^5 + 2^2 + 2^0$  eli lyhyesti 100101. Esitä vastaavalla tavalla 2-järjestelmässä luku 653.
9. Laatikossa on 150 korttia, joista 40 on kokonaan mustia, 60 kokonaan valkoisia ja 50 toiselta puolelta mustia ja toiselta puolelta valkoisia. Laatikosta umpimähkään otetun kortin toinen puoli on musta. Mikä on todennäköisyys, että toinenkin puoli on musta?
10. Osoita, että funktion  $f: f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$  derivaatta  $f'(x) = -\frac{3}{2} \sin 4x$ , ja esitä tämän nojalla  $f(x)$  muodossa  $A + B \cos 4x$  ( $A$  ja  $B$  vakioita).

Tehtävissä 3, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

\*:llä merkityt tehtävät eivät ole kurssien keskeiseltä alueelta.

1. Ratkaise yhtälö  $\frac{2x-5}{4} - \frac{3x-8}{6} = \frac{x}{12}$ .
2. Sievennä lauseke  $(x^{-2} - y^{-2}) : (y - x)$  ja laske sen arvo, kun  $x = \frac{3}{4}$  ja  $y = -\frac{2}{3}$ .
3. a) Millä  $x$ :n arvoilla funktion  $f: f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$  derivaatta on positiivinen, mutta pienempi kuin 1?  
b) Tasossa on annettu pisteet  $A = (-1, 3)$ ,  $B = (3, 2)$  ja  $P = (-2, -10)$ . Esitä vektorit  $\vec{PA}$  ja  $\vec{PB}$  yksikkövektoreiden  $\vec{i}$  ja  $\vec{j}$  avulla sekä päätele vektorien pituuksien neliöiden nojalla, kumpi pisteistä  $A$  ja  $B$  on lähempänä pistettä  $P$ .
4. Suomen lipun pituus on 18, leveys 11 sekä ristin sakaroiden leveys 3 pituusyksikköä. Kuinka monta prosenttia lipun pinta-alasta on sinistä?
5. Millä  $a$ :n arvoilla toteutuu yhtälö  $\int_{-1}^1 (2x-2)dx = \int_{-2}^a (2x-2)dx$ ?
6. a) Suorakulmaisen kolmion sivu  $a$  on 10 cm. Pisin sivu on  $p$  % pitempi kuin  $a$  ja kolmas sivu  $p$  % lyhyempi kuin  $a$ . Laske  $p$  ja kolmion ala.  
\*b) Postimerkkiautomaatista 5 mk:lla saatavassa vihkossa on 0,20:n, 0,60:n, 0,10:n, 0,30:n ja 1,30 markan merkit kaksin kappalein. Kuinka monta vihkoa olisi vähintään ostettava ja kuinka monta 1,60 mk:n kirjettä lähetettävä, jotta merkkejä ei jäisi käyttämättä?
7. a) Lieriön muotoisen tölkin ympärysmitta on 240 mm. Sen kylkeen liimataan suorakulmion muotoinen nimilappu, jonka korkeus on 60 mm. Kuinka leveä nimilappu on, jos se tällöin etäältä suoraan edestä katsottuna näyttää neliön muotoiselta?  
\*b) Ratkaise yhtälö  $|3x+5| = 3x+5$ .
8. Maanviljelijä haluaa käyttäen 180 m aitaa aidata mahdollisimman suuren suorakulmion muotoisen laitumen ja jakaa sen kahteen osaan yhden sivun suuntaisella aidalla. Määritä laitumen pituus ja leveys.
9. a) Tutki, ovatko seuraavat luvut kokonaisluvun neliöitä:  $1966145^2 - 1966144^2$ ,  $1970113^2 - 1970112^2$  ja  $1974085^2 - 1974084^2$ .  
b) Kheopsin pyramidin pohja on neliö ABCD, jonka sivun pituus on 233 m, ja pyramidin kärki  $P$  on yhtä etäällä pisteistä  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$ . Pyramidin särmä  $AP$  muodostaa pohjan lävistäjän  $AC$  kanssa  $42^\circ$  kulman. Laske pyramidin korkeus ja tilavuus kolmen numeron tarkkuudella.
10. Kupera linssi, jonka polttoväli on  $f = 20$  cm, muodostaa esineestä, joka on linsin vasemmalla puolella etäisyydellä  $a > 20$  cm, kuvan, joka on linsin oikealla puolella etäisyydellä  $b$  linssistä. Mainituille etäisyyksille on voimassa yhtälö  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ . Lausu  $b$  ja  $a+b$  etäisyyden  $a$  funktioina. Osoita, että esineen ja kuvan välinen etäisyys  $a+b$  ei voi olla pienempi kuin 80 cm. Missä esine sijaitsee silloin, kun kuvan etäisyys siitä on 100 cm?

Tehtävissä 1, 3, 6, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

\*:llä merkityt tehtävät eivät ole kurssien keskeiseltä alueelta.

1. a) Määritä funktion  $f: f(x) = \int_0^x (t^2 - 5t + 6)dt$  derivaatan nollakohdat.

b) Henkilöllä on pankissa 5 000 mk 5 %:n tilillä ja 10 000 mk p %:n tilillä. Hänen koko 15 000 mk:n talletukselle saamansa vuotuinen korko on 6 %. Määritä p.

2. Onko  $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$  funktion  $x^2 e^{-x}$  integraalifunktio?

3. a) Osoita käyttämättä likiarvoja, että  $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$ .

b) Piste Q on O-keskisellä ympyrällä. Pisteeseen Q piirretty ympyrän tangentti leikkaa säteen OP jatkeen pisteessä R. Määritä kulma PRQ, kun kulma PQR =  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 45^\circ$ ).

4. Auringon säteet muodostavat vaakasuoran pihan kanssa  $42^\circ$  kulman. Pihalle pystytetyn lipputangon varjosta 6,0 m:n pituinen osa lankeaa maahan ja 3,6 m:n pituinen loppuosa pystysuoralle seinälle. Laske lipputangon korkeus.

5. Muodosta yläviistoon osoittava yksikkövektori, joka on käyrän  $y = 2x^2 + 2x - 1$  pisteeseen  $(-1, -1)$  piirretyn tangentin suuntainen.

6. a) Luku x toteuttaa ehdot  $1 - 3 \cdot 10^{-15} < x < 1 + 3 \cdot 10^{-15}$ . Osoita, että tällöin on  $1 - 6 \cdot 10^{-15} < x^2 < 1 + 7 \cdot 10^{-15}$ .

\*b) Laske  $\int_0^\pi \sin 2x \cos x \, dx$ .

7. Pallo potkaistaan ilmaan  $30^\circ$  kulmassa, ja se lentää 50 m:n päähän. Kuinka korkealla pallo käy, jos sen lentorata on paraabeli, jonka akseli on pystysuora?

8. a) Metrin pituinen sauva katkaistaan umpimähkään valitusta kohdasta, ja saadut osat valitaan suorakulmaisen kolmion kateeteiksi. Mikä on todennäköisyys sille, että tällöin hypotenuusan pituus on vähintään 80 cm?

\*b) Määritä kompleksiluvun  $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$  potenssit  $z^0, z^1, z^2, \dots$ . Kuinka monta eri lukua esiintyy niiden joukossa?

9. Kääntöpuolella on kirjelähetysten koko- ja painoperusteita sisältävä tiedote. Mikä on suurin sallittu rullan muotoisen kirjeen tilavuus? Vastaus  $0,1 \text{ dm}^3$ :n tarkkuudella.

10. a) Osoita, että yhtälöillä  $x - \cos x = 0$  ja  $x - \cos(\cos x) = 0$  on kummallakin täsmälleen yksi juuri, joka lisäksi on yhtälöille yhteinen.

b) Erään kartan koordinaatistossa paloasema sijaitsee pisteessä  $A = (-1, 0)$ , ja veden ottoon käytettävissä olevaa joen osaa kuvaa yhtälö  $y = \sqrt{1 - x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ). Tulipalon sattuessa pisteessä  $B = (\frac{1}{2}, 0)$  paloauto kiittää nopeudella 100 km/h suoraan joen kohtaan X, jossa auton vesisäiliö täytetään. Tämän jälkeen auto jatkaa matkaansa suoraan kohti palopaikkaa nopeudella 45 km/h. Miten piste X on valittava, jotta paloauto vesisäiliö täytettynä ehtisi palopaikalle mahdollisimman lyhyessä ajassa?



# TUNNE PÄIVÄNPOSTIN JA SÄÄSTÖPOSTIN MITAT JA PAINOT.

Kirjelähetysten koko- ja painoperusteet ovat samat sekä päivänposti- että säästöpostiluokassa.

## KOTIMAAN KIRJEET

|                                                                                                       | VÄHIMMÄIS-<br>KOKO                                                                                            | ENIMMÄIS-<br>KOKO                                                                                              | ENIMMÄIS-<br>PAINO |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
|  KIRJE               | 90x130 mm                                                                                                     | pituus + leveys + paksuus =<br>900 mm<br>suurin pituus kuitenkin<br>enintään<br>600 mm                         | 1 kg               |
|  RULLAN<br>MUOTOINEN | pituus + kaksinkertainen<br>läpimitta = vähintään<br>170 mm<br>suurin pituus kuitenkin<br>vähintään<br>100 mm | pituus + kaksinkertainen<br>läpimitta = enintään<br>1040 mm<br>suurin pituus kuitenkin<br>enintään<br>900 mm   | 1 kg               |
|  KORTIN MUOTOINEN  | 90x130 mm                                                                                                     | Suosittelimme lisäksi, että<br>päälyksettömän kortin-<br>muotoisen lähetyksen<br>enimmäiskoko on<br>107x152 mm |                    |

Kortin muotoisen, ilman kuorta lähetettävän kirjeen valmistusmateriaaliksi suositellaan korttikartonkia (vähintään 140 g/m<sup>2</sup>) tai vastaavaa ainetta, jolla on postikäyttöön soveltuvat ominaisuudet.

## JOS TARVITSET LISÄTIETOJA, SOITA TAI TULE LÄHIMPÄÄN POSTIIN JA KYSY UUSJAOSTA.

Uusjako maaliskuussa -84 on postin mittavimpia palvelu-uudistuksia kautta aikojen. Näiden perustietojen avulla kotimaan kirjepostituksesi sujuvat entistä joustavammin uusjaon alkaessa. Lisäpalveluista, ulkomaanliikenteestä ja muista yksityiskohdista saat kaikki tiedot lähipostistasi.



**PÄIVÄNPOSTI SÄÄSTÖPOSTI**



Posti- ja telelaitos

Tehtävissä 3, 4, 5 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $(x - 2)(3x + 4) = 5(3x + 4)$ .
2. Määritä funktion  $f: f(x) = 2x^3 - 3x^2$  se integraalifunktio  $F$ , joka toteuttaa ehdon  $F(2) = -1$ .
3. a) Sievennä lauseke  $(a^2b^2 - a^4b^6):(ab - a^2b^3)$  yksinkertaisimpaan muotoonsa ja laske sitten sen tarkka arvo, kun  $a = 10^{10}$  ja  $b = 10^{-10}$ .  
b) Maanteiden roskaantumistutkimuksen mukaan eri materiaalien osuus koko roska-  
määrästä on seuraava: lasi 2,7 %, metalli 7,6 %, muovi 17,7 %, paperi 64,3 %,  
muut 7,7 %. Kuinka monta prosenttia koko roskamäärä pienenesi, jos roskapaperin  
määrä saataisiin pienenemään puoleen ja muovin määrä kahteen kolmasosaan?
4. a) Laske paraabelin  $y = 1 - x^2$  ja suoran  $y = 0,64$  rajoittaman alueen ala.  
b) Ratkaise yhtälöpari 
$$\begin{cases} 3(x+2) - 4(2-y) + 5x = 0, \\ 4 - 5x - 2(y-x) + 2x - y = 0. \end{cases}$$
5. a) Kolmion kärkipisteet ovat  $A = (1, -2)$ ,  $B = (4, 3)$  ja  $C = (-1, 4)$ . Laske kolmion  
ala sekä kulman ACB suuruus asteen tarkkuudella.  
b) Ilmapallon kutistuessa sen halkaisija lyheni 9,1 %. Kuinka monta prosenttia  
ilmapallon tilavuus tällöin supistui?
6. Laatikossa on viisi korttia, joista kolmessa on kirjain M ja kahdessa kirjain A.  
Kortit poimitaan pöydälle umpimähkäisessä järjestyksessä. Mikä on todennäköisyys  
sille, että syntyy sana MAMMA ?
7. a) Huone on 4,0 m leveä, 6,5 m pitkä ja 3,5 m korkea. Kuinka pitkä matka on  
katon keskellä olevasta lampusta lattian etäisimpään nurkkaan (0,1 metrin tark-  
kuudella)?  
b) Tuotteen hinta nousi ensin  $p$  % ja tämän jälkeen vielä  $2p$  %. Hinta nousi täl-  
löin kaikkiaan 68 %. Määritä  $p$ .
8. Kumpi luvuista  $x = e^{1500\pi}$  ja  $y = \pi^{1500e}$  on suurempi?
9. Havaintopisteestä A laiva näkyi suunnassa  $225^\circ$ , kun taas pisteestä B mitattu  
suunta oli  $210^\circ$ . Suunnat ilmoitetaan myötäpäivään pohjoisesta lukien. Piste B  
sijaitsee 1,8 km pisteestä A pohjoiseen. Määritä laivan etäisyys pisteestä A.
10. Teltta on säännöllisen neliöpohjaisen pyramidin muotoinen. Sivusärminä käytet-  
tävät kepit ovat 2,7 m pitkät. Määritä teltan suurin mahdollinen tilavuus, kun  
sen korkeus on vähintään 1,7 m.

Tehtävissä 1, 3, 4, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

\*:llä merkityt tehtävät eivät kuulu oppimäärän keskeisiin alueisiin.

1. a) Laske funktion  $\tan x$  tarkka arvo, kun  $\sin x = \frac{7}{25}$  ja  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ .  
 b) Erään perheen kuluista oli 35 % ruokakuluja ja 42 % asumiskuluja. Kuinka monta prosenttia perheen kokonaiskulut nousivat tai laskivat, kun ruokakulut alenivat 5 % ja asumiskulut nousivat 3 % ?
2. Määritä vakio  $a$  siten, että yhtälöllä  $x^3 + 3(2a-1)x^2 - 4x + 1 - a = 0$  on juurena  $x = 1$ . Mitkä ovat tällöin muut juuret?
3. a) Funktio  $F$  on määritelty arvoilla  $x < 0$  ja toteuttaa ehdot  $F'(x) = 1 + \frac{1}{x}$  ja  $F(-1) = 1$ . Määritä  $F$ .  
 b) Määritä kaikki ne  $x$ :n arvot, joilla funktio  $\sin 2(x + \frac{\pi}{4})$  saa suurimman arvonsa.
4. a) Määritä käyrien  $y = e^{2x}$  ja  $y = e^{-x}$  sekä suoran  $y = e$  rajoittaman alueen ala.  
 b) Määritä vektorien  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  välinen kulma, kun  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  ja  $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ .
5. Määritä yhtälön  $\int_1^x (t^2 - 2t - 5)dt = 0$  reaali-juuret.
6. Ratkaise epäyhtälö  $|x - a| < x$  kaikilla vakion  $a$  arvoilla.
7. Ilmoita sekunnin tarkkuudella, kuinka paljon kello on, kun tunti- ja minuutti-osoitin ovat iltapäivällä päällekkäin numeroiden 5 ja 6 välissä.
8. a) Mikä on todennäköisyys sille, että lukujonosta  $1, 2, \dots, 120$  umpimähkään valituista kahdesta eri luvusta toinen on  $> 70$  ja toinen  $< 40$  ?  
 \*b) Määritä kaikki kompleksiluvut  $z$ , jotka toteuttavat yhtälön  $\bar{z} = \frac{2}{z} + i$ .
9. Osoita, että  $\sqrt{15}(4 + \sqrt{7x}) \leq 9\sqrt{4 + 5x}$ , kun  $x \geq 0$ . Milloin yhtäsuuruusmerkki on voimassa?
10. \*a) Funktiolla  $f$  on derivaatta pisteessä  $a$ , ja derivaatan arvo on  $k$ . Määritä tämän nojalla  

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}.$$
  
 b) Osoita, että  $\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} > 0$ , kun  $x > 0$ .

Tehtävissä 1, 3, 6, 7 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

\*:llä merkityt tehtävät eivät kuulu oppimäärän keskeisiin alueisiin.

1. a) Mitkä seuraavista luvuista ovat yhtälön  $\left(\frac{2x+3}{4x+5}\right)^2 = 1$  juuria:  
 $\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 1, -1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$  ?  
b) Kolmion sivujen pituudet ovat 1 cm, 16 cm ja 17 cm. Onko kolmio suorakulmainen?
2. Määritä suora, joka kulkee pisteen (1,2) kautta ja on kohtisuorassa suoraa  $y = 2x$  vastaan. Laskemainittujen suorien ja x-akselin rajoittaman kolmion ala.
3. a) Millä A:n ja B:n arvoilla on  $\int_0^1 (Ax + B)dx = B + 1$  ?  
b) Ratkaise yhtälöpari  $x + 2y + 3 = 0, 4x + 5y + 6 = 0$ .
4. Meteoriiitti saapuu ilmakehään nopeudella 12 mailia sekunnissa. Kuinka monta km/h on tämä nopeus? (Maili on noin 1609 m.) Vastaus kolmen numeron tarkkuudella.
5. Laske suoran  $x + y = 4$  ja paraabelin  $x^2 + y = 4$  rajoittaman alueen ala.
6. a) Osoita, että yhtälön  $x^2 - 2x + 2a - a^2 = 0$  juuret  $x_1$  ja  $x_2$  eivät voi olla toistensa vastalukuja, annettiinpa a:lle mikä arvo tahansa.  
b) Funktion  $f: f(x) = ax^3 + 6x^2 + 12x + 12$  derivaatta  $f'$  toteuttaa ehdon  $f'(x) = f(x) - ax^3$ . Määritä a.
7. a) Lausu polynomina lauseke  $(1 - \frac{1}{A})^{-1}$ , missä  $A = 1 + \frac{1}{x^2 + x}$ , ja laske saatua polynomia käyttäen lausekkeen  $(1 - \frac{1}{A})^{-1}$  arvo, kun x toteuttaa ehdon  $x^2 + x - 1 = 0$ .  
\*b) Vektorit  $\vec{i}$  ja  $a\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$  ovat suunnikkaan sivuina. Millä a:n arvoilla suunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?
8. Rasiassa on kolme valkoista ja neljä mustaa noppaa. Rasiasta umpimähkään otettu noppa heitetään pöydälle. Mikä on todennäköisyys sille, että nopan silmäluku ei ole pienempi kuin kolme eikä noppa ole musta?
9. Kuinka kauas merelle voi nähdä rannalla seisova henkilö, jonka silmät ovat 170 cm korkeudella meren pinnasta? Maapallon säde on noin 6380 km.
10. a) Määritä funktion  $f: f(x) = x^2/(1 + (x - 100)^2)$  suurin ja pienin arvo välillä  $[-100, 100]$ .  
b) Vaakasuurassa asennossa olevan suoran ympyrälieriön muotoisen öljysäiliön pituus on 3,0 m ja pääty-ympyröiden halkaisija 1,0 m. Säiliössä on yli 1200 l öljyä ja öljyn suorakulmion muotoisen pinnan ala on  $2,0 \text{ m}^2$ . Kuinka korkealla öljyn pinta on säiliön alimmasta kohdasta?

Tehtävissä 1, 5, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

\*:llä merkityt tehtävät eivät kuulu oppimäärän keskeisiin alueisiin.

1. a) Määritä yhtälön  $(1 + 4x + x^2)^2 = (1 - 4x - x^2)^2$  reaaliuureet.

b) Tuotteen hintaa alennetaan 12 %. Kuinka monella prosentilla sen myyntiä on lisättävä, jotta siitä saatava myyntitulo pysyisi ennallaan?

2. 110 m:n aitajuoksussa on 10 aitaa, joiden väli on 10 jaardia. Kuinka pitkä matka on lähtöviivalta ensimmäiselle aidalle ja viimeiseltä aidalta maaliviivalle, kun jälkimmäinen matka on edellistä 30 cm pitempi? (1 jaardi = 91,4 cm).

3. Laske  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(1-x)^2}$ .

4. Ratkaise yhtälö  $(\sin x + \sqrt{3})^2 = \frac{27}{4}$ .

5. a) Neljän r-säteisen ympyrän keskipisteet ovat 2r-sivuisen neliön kärjissä, ja R-säteinen ympyrä sivuaa kaikkia neljää ympyrää ( $R > r$ ). Laske ensin mainittujen ympyröiden väliin jäävän alueen alan suhde R-säteisen ympyrän alaan.

b) Ratkaise yhtälö  $\ln(x-1) + \ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln 6$ .

6. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{2x}{3} < \frac{1-3x}{x-2}$ .

7. a) Vuoren huippu näkyy paikassa A olevasta laivasta suoraan etelässä  $15^\circ$  horison-  
tin yläpuolella. Kun laiva siirtyy sellaiseen kohtaan B, että suunta AB muodostaa  
 $70^\circ$  kulman eteläsuunnan kanssa ja etäisyys  $AB = 4,00$  km, näkyy huippu suoraan lou-  
naassa. Laske huipun korkeus.

\*b) Määritä kompleksitason alueiden  $|z-1| < 1$  ja  $|z-i| < 1$  yhteisen osan ala.

8. a) Määritä kaikki funktion  $f: f(x) = \cos \frac{1-x}{x}$  derivaatan välillä  $] -1,1[$  ole-  
vat nollakohdat.

\*b) Laske pisteen A etäisyys pisteiden O, B ja C määräämästä tasosta OBC, kun  
 $\vec{OA} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  ja  $\vec{OC} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

9. Osoita, että käyrät  $\frac{(x-3)^2 + y^2}{(x+3)^2 + y^2} = C$  kaikilla positiivisilla C:n arvoilla ( $\neq 1$ )  
ovat ympyröitä. Mitkä käyrät saadaan arvoilla  $C = 0$  ja  $C = 1$ ? Osoita, että kahta  
erisuurta C:n ei-negatiivista arvoa vastaavat käyrät eivät kohtaa toisiaan.

10. a) L-kirjaimen muotoinen käytävä muodostuu kahdesta yli 10 m:n pituisesta keske-  
nään kohtisuorasta suorasta osasta, joiden leveydet ovat 1 m ja 2 m. Mikä on pi-  
sin suora tanko, joka voidaan vaakasuorassa asennossa kuljettaa käytävän läpi?

\*b) Funktio  $f$  on derivoituva välillä  $]0, \infty[$  ja toteuttaa ehdon  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,  
kun  $x, y > 0$ . Osoita, että  $f'(x) = f'(1)/x$ , kun  $x > 0$ .

Tehtävissä 2, 4, 7 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

\*:llä merkityt tehtävät eivät kuulu oppimäärän keskeisiin alueisiin.

1. Laske lausekkeen  $\sqrt{1 - a^2}$  tarkka arvo, kun  $a = 1/2$  ja kun  $a = \sqrt{3}/2$ .

2. a) Määritä polynomin  $x^3 - x^2 - 21x + 1$  derivaatan nollakohdat.

\*b) Ratkaise epäyhtälö  $(x - 1)^2 > 1$ .

3. Laske  $\int_{1/2}^1 (x - 1)^3 dx$ .

4. a) Määritä funktion  $\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{2-x}$  suurin arvo.

b) Karamellipakkausta muutettiin siten, että sisältöä vähennettiin neljänneksellä. Samalla pakkauksen hintaa alennettiin kolmanneksella. Kuinka monta prosenttia karamellien kilohinta tällöin aleni?

5. Laske paraabelin  $y = -x^2 + 100$  ja suoran  $y = x + 98$  rajoittaman alueen ala.

6. Vektorin alkupiste on  $(1,1)$ , vektori on suoran  $y = 3x$  suuntainen ja sen pituus on 2. Määritä vektorin loppupiste.

7. a) Autonkuljettaja ajoi tietyn matkan vakionopeudella. Jos auton nopeus olisi ollut 25 km/h suurempi, matkaan olisi kulunut 20 % vähemmän aikaa. Jos nopeus olisi ollut 20 km/h pienempi, aika olisi pidentynyt tunnilla. Laske matkan pituus.

b) Arpanopan kaksi sattumanvaraisesti valittua sivua peitetään maalilla. Mikä on todennäköisyys, että näkyviin jäävien sivujen yhteenlaskettu silmäluku on suurempi kuin 12 ?

8. Annettua a-säteistä ympyrää sivuaa ulkopuolelta kolme r-säteistä ympyrää. Nämä ympyrät sivuavat pareittain toisiaan. Määritä suhde  $r:a$ .

9. Laiva kulkee suoraviivaisesti 5 solmun nopeudella. Rannalla seisovan katsojan suhteen laivan suuntakulma muuttuu  $1^\circ$  minuutissa. Kuinka monen kilometrin päässä katsojasta laiva voi enintään olla? Solmu on meripeninkulma tunnissa, meripeninkulma on 1852 m.

10. a) Määritä polynomin  $(x^4 - 4x + 8)^5$  suurin ja pienin arvo välillä  $[1/4, 3/2]$ .

\*b) R-säteisen ympyräsektorin keskuskulma on  $90^\circ$ . Neliön kaksi kärkeä on sektorin kaarella ja muut kärjet sen säteillä. Laske neliön sivun pituus.

Tehtävissä 1, 3, 5, 6 ja 10 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

\*:llä merkityt tehtävät eivät kuulu oppimäärän keskeisiin alueisiin.

1. a) Muodosta se funktion  $f: f(x) = x^2 + x - 2$  integraalifunktio, jolla on paikallinen minimiarvo  $-4$ .  
b) Tuotteen hinnasta on raaka-aineen osuus 20 %. Kuinka monta prosenttia tuotteen hintaa voitaisiin alentaa, jos raaka-aineen hinta alenee 12 %?
2. Lentokone lähti Helsingistä klo 7.00 paikkaan X, jossa kello tällöin oli 5.00, ja palasi Helsinkiin samana päivänä klo 21.30. Paluumatkaan kului puoli tuntia enemmän kuin menomatkaan, ja perillä kone viipyi 2 tuntia. Kuinka paljon kello oli X:ssä koneen lähtiessä paluumatkalle?
3. a) Ratkaise yhtälö  $P(x) = P(17)$ , kun  $P(x) = x^3 - 51x^2 + 867x$ .  
b) Ympyrän  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$  keskipiste on A, ja ympyrä leikkaa x-akselin pisteissä B ja C. Laske kulma BAC.
4. Suoran ympyräkartion, jonka korkeus on  $\frac{5}{4}R$ , huippu ja pohjaympyrä ovat R-säteisen pallon pinnalla. Kuinka monta prosenttia kartion tilavuus on pallon tilavuudesta?
5. a) Kolmiossa on  $30^\circ$ :n ja  $100^\circ$ :n kulmat, ja suurinta kulmaa vastaava sivu on 10. Laske kolmion ala.  
b) Lukujonolla  $x_n = \frac{2n^2 + 1}{3n^2 - 1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  on raja-arvo a. Mistä n:n arvosta alkaen on  $|x_n - a| < 10^{-5}$ ?
6. a) Lotossa arvotaan 7 lukua 39 luvun joukosta. Kun viisi lukua on arvottu, henkilön A lottorivissä on 5 oikein. Mikä on todennäköisyys sille, että A saa  $1^\circ$  7 oikein,  $2^\circ$  vain 5 oikein?  
b) Määritä funktion  $\sin x \cos(x+a)$  suurin ja pienin arvo.
7. Ympyrän C keskipiste on  $(0, \frac{1}{2})$  ja säde  $\frac{1}{2}$ . C:n pisteiden  $(0,1)$  ja  $(x,y)$ , missä  $x \geq 0$ ,  $y \neq 1$ , kautta piirretään suora, joka leikkaa x-akselin pisteessä  $(u,0)$ . Lausu u yksinomaan y:n funktiona.
8. Osoita, että integraalin  $\int_a^{a+\pi} \cos^2 x \, dx$  arvo on a:sta riippumaton.
9. Paraabelin  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) pisteeseen  $(x_0, y_0)$  ( $y_0 > 0$ ) piirretty normaali leikkaa x-akselin pisteessä  $(u,0)$ . Mitä pistettä tämä piste lähestyy, kun piste  $(x_0, y_0)$  lähestyy paraabelin huippua?
10. a) Pisteiden  $A = (3, 2, -1)$ ,  $B = (4, 1, 6)$  ja  $C = (7, -2, 3)$  määäämästä tasosta on etsittävä kaikki sellaiset pisteet D, että nelikulmio ABCD on suunnikas.  
\*b) Valon kohdatessa tason pisteessä A valaistuksen voimakkuus on suoraan verrannollinen tason normaalin ja valon tulosuunnan välisen kulman kosiniin sekä kääntäen verrannollinen valolähteen ja pisteen A välisen etäisyyden neliöön. Kuinka korkealle pyöreän r-säteisen pöydän keskipisteen yläpuolelle on vietävä pistemäinen valolähde, jotta valaistuksen voimakkuus pöydän reunalla olisi mahdollisimman suuri?

YLIOPPILASTUTKINTO 30.3.1988 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 3, 5, 6 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 13$ .
2. a) Laske lausekkeen  $[(1 + x)^2 - 1] : x$  tarkka arvo kun  $x = 0,00000000001$ .  
b) Ratkaise epäyhtälö  $(\frac{x}{3} - 2)(5x - 4) < 0$ .
3. a) Kuinka monta nollaa on luvussa  $(10^{100})^{100}$ , jos se kirjoitetaan muotoon 100...00?  
b) Suunnikkaan  $OABC$  lävistäjien leikkauspiste on  $D$ . Määritä summa  $\vec{OD} + \vec{AD}$  vektorien  $\vec{a} = \vec{OA}$  ja  $\vec{c} = \vec{OC}$  avulla.
4. Litran pulloon kaadetaan 0,930 litraa vettä ja se pannaan pakastimeen. Veden jäätyessä sen tilavuus kasvaa 8 %. Kuinka korkealle tällöin työntyy lieriömäinen jäätulppa  $5,00 \text{ cm}^2$  kokoisesta pullon suusta?
5. a) Ratkaise yhtälö  $\frac{x}{a-3} - \frac{2}{a+3} = \frac{a+15}{a^2-9}$ , missä  $a \neq \pm 3$  on vakio.  
b) Millä  $x$ :n arvoilla lauseke  $\sqrt{1-x} - \sqrt{2-3x}$  on reaalinen?
6. a) Juoksijat  $A$  ja  $B$  lähtevät samanaikaisesti pisteestä  $O$  suoraviivaisesti kahteen eri suuntaan, joiden välinen kulma on  $120^\circ$ . Mikä on  $A$ :n ja  $B$ :n välinen etäisyys 10 sekunnin kuluttua, kun  $A$ :n nopeus on  $30 \text{ km/h}$  ja  $B$ :n nopeus  $25 \text{ km/h}$ ? Vastaus metrin tarkkuudella.  
b) Millä  $a$ :n arvoilla paraabeli  $y = -x^2 + 1$  on kokonaan suoran  $y = x - a$  alapuolella?
7. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat  $x$ ,  $x + 2$  ja  $2x + 1$ . Määritä  $x$ .
8. Laske paraabelin  $y = a^3x^2 - a$  ( $a > 0$ ) ja  $x$ -akselin rajoittaman alueen pinta-ala.
9. a) Pöytä on peitetty ruudullisella liinalla, jonka neliömäisen ruudun sivu on  $50 \text{ mm}$ . Mikä on todennäköisyys, että pöydälle heitetty viiden markan kolikko (halkaisija  $26 \text{ mm}$ ) peittää neliön kärjen?  
b) Suora on kolmion  $ABC$  kannan  $AB$  suuntainen ja leikkaa sivun  $AC$  pisteessä  $D$  ja sivun  $BC$  pisteessä  $E$ . Suoralta  $AB$  valitaan pisteet  $F$  ja  $G$  siten, että  $DEGF$  on suorakulmio. Mikä on tämän suorakulmion alan suhde kolmion alaan suurimmillaan?
10. Millä  $a$ :n arvoilla suora  $y = x$  on käyrän  $y = x^3 - 3x + a$  tangentti?



YLIOPPILASTUTKINTO 30.3.1988 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 2, 4, 5 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Laske  $\int_0^1 x(\sqrt{x} + 1)dx$ .  
 b) Kuinka paljon 30-prosenttista pakkasnestettä on lisättävä 5 litraan 60-prosenttista pakkasnestettä, jotta seos olisi 40-prosenttinen?
2. a) Osoita, että lausekkeiden  $x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2}$  ja  $x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 2x^2}$  arvot ovat toistensa käänteislukuja kaikilla  $x$ :n arvoilla.  
 b) Auton jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden 2. potenssiin. Jos nopeus on 100 km/h, on jarrutusmatka 60 m. Mikä on jarrutusmatka, jos nopeus on 60 km/h?
3. Millä  $a$ :n arvoilla yhtälön  $x^2 + (3a + 1)x + 81 = 0$  juuret ovat reaaliset?
4. a) Määritä ne vektorien  $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  ja  $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$  määräämän tason yksikkövektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektoria  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  vastaan.  
 b) Metsäpalstan puuston määräksi arvioitiin vuoden 1988 alussa 100 m<sup>3</sup> ja sen vuotuiseksi kasvuksi 17 %. Metsästä myydään vuodesta 1988 alkaen joka vuoden lopussa 16 m<sup>3</sup> puuta. Minkä vuoden alussa metsässä on puuta yli 120 m<sup>3</sup>?
5. a) Suoran ympyräkartion korkeus on  $h$  ja pohjan säde  $r$ . Sen sisään on piirretty toinen suora ympyräkartio, jonka pohjaympyrä on annetun kartion vaipalla ja huippu annetun kartion pohjan keskipisteessä. Miten suuri on enintään jälkimmäisen kartion tilavuuden suhde annetun kartion tilavuuteen?  
 b) Määritä yhtälön  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  kaikki ratkaisut.
6. Käyrät  $y = e^x + C$  ja  $y = 2x$  leikkaavat toisensa origossa. Laske käyrien toisen leikkauspisteen koordinaatit kolmella desimaalilla. Piirrä kuvio.
7. Osoita, että lukujono  $a_n = \frac{n!}{n^n}$  on aidosti vähenevä (so.  $a_n > a_{n+1}$ , kun  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).
8. Määritä se funktion  $f$ :  $f(x) = |x - 1|$  integraalifunktio  $F$ , jolle  $F(-1) = 0$ . Piirrä funktioiden  $f$  ja  $F$  kuvaajat.
9. a) Osoita, että jokainen parven  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  ympyrä leikkaa parven  $x^2 + y^2 - 2by = 0$  jokaisen ympyrän kohtisuorasti.  
 b) Suunnikkaan  $OABC$  sivujen  $AB$  ja  $BC$  keskipisteet ovat  $D$  ja  $E$ . Osoita, että vektorit  $\vec{OD}$  ja  $\vec{OE}$  jakavat lävistäjän  $\vec{AC}$  kolmeen yhtä suureen osaan.
10. Osoita, että kaikilla  $x$ :n arvoilla  $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ .

YLIOPPILASTUTKINTO 21.9.1988 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 2, 5, 6 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Tuotteen hintaa korotettiin 10 %, jolloin hinnaksi tuli 121 mk. Mikä oli tuotteen alkuperäinen hinta?  
b) Millä  $x$ :n arvoilla tulon  $x(x + 1)$  derivaatta on 2 ?
2. a) Millä  $x$ :n arvoilla  $x^3$  on pienempi kuin  $x$  ?  
b) Uima-altaan pituus on 25 m ja leveys 12 m. Sateen aikana altaan veden pinta nousee 3 mm. Kuinka monta litraa altaan vesimäärä tällöin lisääntyy?
3. Funktio, jonka derivaatta on  $1 - x$ , saa arvon 10, kun  $x = 10$ . Määritä funktion suurin arvo.
4. Määritä kaikki origosta lähtevät vektorit, jotka ovat vektorin  $12\vec{i} - 13\vec{j}$  pituiset ja kohtisuorassa sitä vastaan.
5. a) Yrityksen liikevaihto kasvaa 10 % vuodessa. Kuinka monessa vuodessa liikevaihto on ylittänyt 10-kertaisen määrän?  
b) Kuinka monta kilogrammaa ilmaa mahtuu ilmapalloon, jonka säde on 1,6 m? Litra ilmaa painaa 1,29 g.
6. a) Mikä on todennäköisyys, että neljää noppaa heitettäessä saadaan vähintään kaksi yhtä suurta silmälukua?  
b) Saarella, jonka pinta-ala on 3,00 ha, on kahden talon välinen etäisyys 200 m. Voiko saari olla ympyrän muotoinen?
7. Suorakulmaisen kolmion kaksi sivua ovat 2 ja 3. Määritä näiden välinen kulma  $0,1^\circ$  tarkkuudella. Kaikki ratkaisut!
8. Suoran ympyrälieriön korkeuden ja pohjan halkaisijan summa on 20. Määritä lieriön korkeus siten, että lieriö on tilavuudeltaan mahdollisimman suuri. Laske suurin tilavuus.
9. Laske paraabelin  $y = x^2$  sekä tämän pisteestä  $(1,0)$  piirrettyjen tangenttien rajoittaman alueen ala.
10. a) Kumpi luvuista  $3^{\sqrt{2000000}}$  ja  $2^{\sqrt{3000000}}$  on suurempi?  
b) Ratkaise yhtälöpari  $x - ay - \frac{1}{2} = 0$ ,  $ax + y + \frac{a}{2} = 0$ . Osoita, että ratkaisupisteen  $(x, y)$  etäisyys origosta on  $a$ :sta riippumaton.

YLIOPPILASTUTKINTO 21.9.1988 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 2, 4, 6 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Ratkaise yhtälö  $8x + 2\sqrt{1-x} = 5$ .

b) Kuinka monta prosenttia kuution särmä kasvaa, jos kuution tilavuus kasvaa 33,1 % ?

2. a) Ratkaise yhtälö  $\sin x = 2 \sin^2 x$ .

b) Auton polttoainemittari näyttää nollaa, kun säiliössä on 5 l polttoainetta, ja lukemaa 50, kun säiliössä on 48 l. Mittarin lukeman muutos on verrannollinen polttoaineen lisäykseen. Kuinka paljon säiliössä on polttoainetta, kun mittarin lukema on 25 ?

3. Laske sen alueen ala, jota rajoittavat käyrä  $y = \frac{1+x}{x^3}$ ,  $x$ -akseli sekä suorat  $x = \frac{1}{3}$  ja  $x = \frac{1}{2}$ .

4. a) Pisteestä  $A = (1,1)$  ja  $B = (-1,2)$  piirretään vektorit suoralla  $y = x + 1$  olevaan pisteeseen  $P$ . Määritä  $P$  siten, että vektorit  $\vec{AP}$  ja  $\vec{BP}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Suoran ympyrälieriön muotoisen litran mitan pohjan halkaisija on 12,0 cm. Kuinka suuri on samanmuotoisen  $\frac{1}{3}$  litran mitan korkeus?

5. Osoita, että funktio  $f: f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5x$  on koko  $\mathbb{R}$ :ssä aidosti kasvava.

6. a) Suoran ympyrälieriön muotoinen säiliö, jonka tilavuus on  $V$ , valmistetaan kahdesta eri materiaalista. Pohjiin käytettävän materiaalin hinta (mk/m<sup>2</sup>) on 40 % suurempi kuin vaipan materiaalin. Määritä lieriön korkeuden ja pohjan säteen suhde siten, että säiliön materiaalikustannukset ovat mahdollisimman pienet.

b) Suoran  $ax - by = 0$  kertoimet  $a$  ja  $b$  valitaan umpimähkään väliltä  $[0,1]$ . Mikä on todennäköisyys, että suoran kulmakerroin on  $\leq \frac{1}{3}$  ?

7. a) Määritä vakiot  $A$  ja  $B$  siten, että funktio  $F: F(x) = A \ln(1-x) + B \ln(x+2)$  on funktion  $f: f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x-2}$  integraalifunktio välillä  $]-2,1[$ .

b) Määritä kaikki kompleksiluvut  $z$ , joille  $z^2 = 2i$ .

8. Määritä kaikki kokonaisluvut  $n$ , jotka toteuttavat yhtälön  $(n^2 + n - 1)^{n+3} = 1$ .

9. Osoita, että kaikilla  $x$ :n positiivisilla arvoilla funktion  $f: f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x+t}$  derivaatta on  $-\int_0^1 \frac{dt}{(x+t)^2}$ .

10. Suppenevan lukujonon  $(x_n)$ ,  $n = 1,2,3,\dots$ , luvut toteuttavat kaikilla  $n$ :n arvoilla kaavan  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ , missä  $a > 0$ . Määritä  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

YLIOPPILASTUTKINTO 31.3.1989 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 5, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Olkoon  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$  ja  $P'(x)$  sen derivaatta. Laske  $P(-2)$  ja  $P'(-2)$ .
2. a) Ratkaise yhtälö  $(12x - 1)x = 6$ .  
b) Erään tavarahan hintaa oli alennettu 25 %. Kun alennetusta hinnasta luvattiin vielä 20 % alennus, olisi tavarahan saanut 294 markalla. Kuinka suuri oli alkuperäinen hinta?
3. Ratkaise epäyhtälö  $(x - 2)^2 - (x^2 - 4) > 2$ .
4. Määritä se funktion  $f: f(x) = 6x^2 - 1$  integraalifunktio  $F$ , jolle  $F(-1) = 6$ .
5. a) Piirrä käyrä  $y = x^3 - 9x$  ja laske käyrän ja positiivisen  $x$ -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala.  
b) Kausiluonteista työtä tekevä henkilö ansaitsi  $(15 - (3 - \frac{1}{2}n)^2) \cdot 1000$  mk/kk, missä  $n$  on kuukauden järjestysnumero  $(1, \dots, 12)$ . Kuinka suuri oli tällöin vuosipalkka?
6. a) Origosta alkavan vektorin  $\vec{a} = 2\vec{i} + 7\vec{j}$  päätepisteestä  $P$  alkava ja  $x$ -akselin pisteeseen  $Q$  päättyvä vektori  $\vec{b}$  on kohtisuorassa vektoria  $\vec{a}$  vastaan. Määritä pisteet  $P$  ja  $Q$  sekä vektori  $\vec{b}$ .  
b) Eräs bakteeri on muodoltaan ympyrälieriö, jonka päissä on puolipallot. Lieriön pituus on  $4,0 \cdot 10^{-6}$  m, ja pohjan halkaisija on  $1,5 \cdot 10^{-6}$  m. Puolipallojen säde on sama kuin lieriön pohjaympyrän säde. Laske bakteerin tilavuus ja massa käyttäen tiheytenä veden tiheyttä.
7. a) Määritä funktion  $f: f(x) = 4x^3 - 11x^2 - 14x - 25$  suurin arvo välillä  $[-2, 4]$ .  
b) Origokeskisen ympyrän säde on 9. Selvitä, voidaanko pisteestä  $(-4, 8)$  piirtää ympyrälle tangentti.
8. Yhtenä päivänä klo 9 - 20 avoinna olleen näyttelyn kävijämäärästä tehtiin seuraavat havainnot: klo 11 mennessä oli käynyt 42 henkeä, klo 12 mennessä 115, klo 15 mennessä 171, klo 17 mennessä 268, klo 19 mennessä 580 ja sulkemisaikaan mennessä 623 henkeä. Piirrä kävijämäärää kuvaava käyrä ja selvitä sen avulla 1) mitkä olivat hiljaisimmat tunnit, 2) kuinka monta kävijää tunnissa kävi vilkkaimpaan aikaan.
9. a) Massa  $m$  pienenee ajan  $t$  funktiona eksponentiaalisesti ( $m = m_0 2^{-t/T}$ , missä  $m_0$  ja  $T$  ovat vakioita) puoliintumisajan ollessa 20 d. Missä ajassa  $m$  pienenee 10 %?  
b) Tieosuudella, jolla oli 90 km/h nopeusrajoitus, mitattujen nopeuksien keskiarvo oli 85,2 km/h ja keskihajonta 8,0 km/h. Kuinka monta % autoista ajoi 1) ylinopeutta, 2) vähintään 100 km/h, kun nopeuksien jakauma oli normaali?
10. Maapallon meridiaanin neljännes (matka päiväntasaajalta navalle) on 10 000 km. Päiväntasaajan yläpuolella 36 000 km korkeudella merenpinnasta on tietoliikennesatelliitti. Kuinka korkealla horisontin yläpuolella  $(0, 1^\circ:n$  tarkkuudella) se on, jos se on suoraan etelässä tarkastelupaikasta, jonka leveyspiiri on  $70,0^\circ$  (Utsjoki)?

YLIOPPILASTUTKINTO 31.3.1989 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 4, 6, 7 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

- Määritä vakiot  $A$  ja  $B$  siten, että funktio  $f: f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$  toteuttaa ehdot  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 4$ .
- a) Laske  $\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$ .  
b) Auto kulkee matkan  $s$  tasaisella nopeudella  $v$ . Kuinka monta prosenttia nopeammin matka olisi kuljettava, jotta matkustusaika vähenisi 60 prosentilla?
- Yksikkövektorit  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Määritä vektorin  $\vec{c}$  pituus, kun  $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ .
- a) Ympyränkaari  $s_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$  muodostaa tasoalueen  $S$  yläreunan. Kaaret  $s_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + Rx = 0, y \leq 0\}$  ja  $s_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - Rx = 0, y \geq 0\}$  muodostavat sen alareunan. Piirrä  $S$  ja määritä sen ala.  
b) Kumpi luvuista  $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{10^{-1001}}}$  ja  $y = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{10^{-1001}}}$  on suurempi?
- Räjätystyömaalta lentää kivi 30 metrin päähän, jolloin sen lentoratana olevan paraabelin huippu on 10 metrin korkeudessa. Määritä lähtökulma  $0,1^\circ$  tarkkuudella vaakasuoran maanpinnan suhteen mitattuna.
- a) Suoran ympyräkartion korkeuden  $H$  ja pohjan säteen  $R$  suhde on 2. Määritä kartion sisäänpiirretyn pallon tilavuuden suhde kartion tilavuuteen. Tarkka arvo ja likiarvo kahdella desimaalilla.  
b) Heitettäessä kahta noppaa silmälukujen neliöiden summa  $s$  on satunnaismuuttuja. Määritä  $s$ :n odotusarvo.
- a) Mitkä kompleksiluvut  $z$  toteuttavat yhtälöparin  $z\bar{z} = 1$ ,  $z - \bar{z} = i(z + \bar{z})$ ?  
b) Käyrät  $y = -2x^2 + 2 \geq 0$  ja  $y = \sqrt{1 - x^2}$  rajoittavat useampiosaisen tasokuvion. Näistä osista se, joka jää ympyrän  $x^2 + y^2 = 1$  ulkopuolelle, pyörii  $x$ -akselin ympäri. Määritä syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuuden tarkka arvo ja likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.
- a) Määritä likiarvoja käyttämättä funktion  $f: f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , suurin ja pienin arvo.  
b) Määritellään  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kaavalla  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + nx}{1 + nx^2}$ . Piirrä funktion  $f$  kuvaaja.
- Lankaan pujotetaan 24 pallon muotoista lasihelmeä, jotka peittävät 40 cm langasta. Helmistä on 6 mustaa, 8 punaista ja 10 vihreää. Samanväriset helmet ovat samankokoisia, ja mustan helmen halkaisija on puolet punaisen halkaisijasta. Minkä pituisia on helmien halkaisijoiden oltava, jotta helminauha olisi mahdollisimman kevyt? Helmien pujotusreikiä ei oteta huomioon. Vastaus 0,1 mm tarkkuudella.
- 100 000 markan laina, jonka vuotuinen korko on 10 %, maksetaan takaisin kymmenessä vuodessa suorittamalla kunkin vuoden lopussa vakioerä, joka koostuu korosta ja kuoletuksesta. Minkä suuruisen tämän vakioerä on? Mikä on kymmenentenä vuotena maksettu korko?

YLIOPPILASTUTKINTO 27.9.1989 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 3, 5, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{x}{3} - \frac{x-3}{2} < x + \frac{x+6}{3}$ .
2. a) Laske  $f(2)$ , kun  $f(3) = 4$  ja  $f'(x) = (3x - 1)^2$ .  
b) Määritä suorien  $x - 3y + 3 = 0$  ja  $3x - 10y + 1 = 0$  leikkauspiste.
3. a) Laske  $\int_{1/2}^1 (1 - x^2)^2 dx$ .  
b) Paraabeli, jonka huippu on pisteessä  $A = (0, 4)$ , leikkaa  $x$ -akselin pisteissä  $B = (3, 0)$  ja  $C = (-3, 0)$ . Määritä paraabelin ja  $x$ -akselin rajoittaman alueen ala.
4. Nosturi voi liikkua suoraa kiskoja pitkin 30 m ja kurottautua 20 m:n päähän. Kuinka suuri on nosturin saavuttama alue? (Vastaus 10 m<sup>2</sup>:n tarkkuudella.)
5. a) Millä muuttujan  $x$  arvoilla käyrä  $y = (x - 1)^2(x + 1)$  laskee?  
b) Määritä tarkka arvo luvulle, jonka neliöjuuri on  $\sqrt{9 \cdot 8} + \sqrt{98}$ .
6. Kevään ylioppilastutkintoon osallistuneitten lukumäärä kasvoi vuodesta 1983 vuoteen 1985 2,5 % . Kokelaista oli keväällä 1983 miespuolisia 38,28 % ja 1985 38,37 % . Kuinka monta prosenttia naispuolisten kokelaiden määrä tänä aikana kasvoi?
7. Erään tuotteen  $A$  valmistukseen käytetään viittatoista eri alihankkijoiden valmistamaa osaa. Kunkin osan toimituksessa sattuu yhtenä työpäivänä sadasta  $A$ :n tuotannon keskeyttäviä häiriöitä. Mikä on todennäköisyys, että tuotanto annettuna työpäivänä keskeytyy mainitusta syystä?
8. Määritä sellaiset luvut  $a$  ja  $b$ , että polynomi  $x^3 - 3x^2 + x + a$  on jaollinen polynomilla  $x^2 - x + b$ .
9. a) Tasasivuisen kolmion  $ABC$  sivulla  $AB$  on piste  $D$  siten, että  $AD = \frac{2}{3}AB$ . Pisteeseen  $D$  sivulle  $AB$  piirretty normaali leikkaa sivun  $BC$  pisteessä  $E$ . Pisteeseen  $E$  sivua  $BC$  vastaan piirretty normaali leikkaa sivun  $CA$  pisteessä  $F$ . Määritä kolmioiden  $DEF$  ja  $ABC$  alojen suhde.  
b) Funktio  $f$  on muotoa  $f(x) = m \cdot 2^{kx}$ , missä  $m$  ja  $k$  ovat positiivisia vakioita. Laske  $f(6)$ , kun  $f(3) = 27$  ja  $f(4) = 36$ .
10. a) Neliön sivu on  $a$  ja keskipiste  $O$ . Kuinka suureksi on valittava  $O$ -keskisen ympyrän säde, jotta ympyrän ulkopuolelle jäävät neliön osat olisivat alaltaan yhtä suuret kuin neliön ulkopuolelle jäävät ympyrän osat?  
b) Kahden luvun harmoninen keskiarvo on lukujen käänteislukujen keskiarvon käänteisluku. Osoita, että kahden erisuuren positiiviluvun  $a$  ja  $b$  harmoninen keskiarvo on pienempi kuin mainittujen lukujen keskiarvo.

YLIOPPILASTUTKINTO 27.9.1989 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 6, 7, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

\*:llä merkityt tehtävät eivät kuulu oppimäärän keskeisiin alueisiin.

1. a) Määritä yhtälön  $(1 + x^2)^3 = 1$  reaaliuuret.  
 b) Tavarahan hinta nousi kahdesti peräkkäin  $p$  %. Tällöin hinnan kokonaislisäys oli 22,1 %. Määritä  $p$ .
2. Määritä ympyrän  $x^2 + x + y^2 = 0$  keskipiste ja säde sekä pisteen  $(1,2)$  etäisyys ympyrästä.
3. Ratkaise yhtälö  $\sin x \cos x = 1/2$ .
4. Osoita, että polynomilla  $P$ :  $P(x) = x^2 - (a^2 + 2)x + a^2 = 0$  ( $a \neq 0$ ) on nollakohta välillä  $]0,2[$ .
5. Osoita, että funktio  $f$ :  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  on aidosti kasvava koko  $\mathbb{R}$ :ssä.
6. a) Laske integraalien  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$  ja  $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$  summa ja erotus sekä niiden avulla  $I_1$  ja  $I_2$ .  
 b) Vene, jonka nopeus tyynessä vedessä on 10 km/h, kulkee eräässä joessa 5 km:n matkan myötävirtaan 3 minuuttia nopeammin kuin vastavirtaan. Määritä joen virtaamisnopeus (km/h).
7. a) Kauppias on todennut myyvänsä kuukaudessa 15 kg vähemmän kahvia jokaista markan suuruista kilohinnan korotusta kohti. Millä kilohinnalla kahvi olisi myytävä, jotta voitto olisi mahdollisimman suuri, kun 50 mk:n kilohintaa vastaa 500 kg:n kuukausimyynti ja kauppiaan kustannukset kahvikiloa kohti ovat 30 mk?  
 b) Pisteestä  $(-2,0)$  lähtevä vektori  $\vec{v}$  muuttuu siten, että sen kärki piirtää ympyrän  $x^2 + y^2 = 16$ . Minkä käyrän piirtää tällöin vektorin keskipiste?
8. Määritä käyrän  $y = \sqrt{1-x}$  pisteeseen  $(-1, \sqrt{2})$  piirretyn tangentin yhtälö ja osoita, että käyrä koko määrittäjäjoukossaan (sivuauspistettä lukuun ottamatta) on tämän tangentin alapuolella.
9. a) Jos  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ovat normaalijakautumaa noudattavia satunnaismuuttujia, joiden keskiarvot ovat  $\mu_i$  ja keskihajonnat  $\sigma_i$ , niin myös  $x_1 + \dots + x_n$  on  $N(\mu, \sigma^2)$ , missä  $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$  ja  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Ratkaise tämän nojalla seuraava ongelma: Pussissa on 23 makeista. Makeisten paino on normaalisti jakautunut, keskiarvo on 2,1 g ja keskihajonta 0,25 g. Mikä on todennäköisyys, että pussissa olevat makeiset yhteensä painavat yli 50 g?  
 b) Määritä yhtälön  $x^{1000} = x(2x)^{500} - 2^{998}x^2$  reaaliuuret.
10. a) Neliöön on piirretty  $r$ -säteinen puoliympyrä, jonka jänne ( $2r$ ) on neliön lävistäjän suuntainen. Kuinka monta prosenttia neliön alasta vähintään jää puoliympyrän ulkopuolelle?  
 \*b) Positiivisen funktion  $f$  kuvaajan  $y = f(x)$  väliä  $[0, t]$  vastaavan osan pyörähtäessä  $x$ -akselin ympäri syntyy pyörähdyskappale, jonka tilavuus kaikilla  $t$ :n positiivisilla arvoilla on  $\pi[f(t)^2 - f(0)^2]$ . Määritä  $f$ , kun  $f(2) = 1$ .

YLIOPPILASTUTKINTO 30.3.1990 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 4, 5, 8, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske polynomin  $x^6 + x^3$  derivaatan arvo pisteessä  $x = -\frac{1}{2}$ .
2. Sähkön hintaa nostettiin vuoden alussa 11 prosenttia ja vuoden lopussa uudelleen 11 prosenttia. Kuinka monta prosenttia sähkön hinta nousi kaikkiaan?
3. Herätyskello jätättää 24 s vuorokaudessa. Maanantaiaamuna klo 7.00 kello oli 1 min 22 s edellä. Milloin kello oli seuraavan kerran oikeassa?
4. a) Määritä kaikki peräkkäiset luonnolliset luvut, joiden neliöiden erotus on 2211.  
 b) Neliön kärjet ovat  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$ ,  $C = (-1, 0)$  ja  $D = (0, -1)$ . Määritä se neliön  $ABCD$  piste, joka on i) lähinnä pistettä  $(\frac{7}{2}, 4)$ , ii) kauimpana tästä pisteestä.
5. a) Maanpintaa kuvaavan vaakatason pisteestä  $A$  näkyy 100 m korkea torni  $3^\circ$  kulmassa. Toisesta tason pisteestä  $B$  torni näkyy  $4^\circ$  kulmassa. Määritä pisteiden  $A$  ja  $B$  välimatka, kun torni sekä pisteet  $A$  ja  $B$  ovat samalla suoralla.  
 b) Määritä vakio  $A$  siten, että funktion  $f: f(x) = A(x - x^2)$  erään integraalifunktion kuvaaja kulkee pisteiden  $(1, 2)$  ja  $(2, 3)$  kautta.
6. San Franciscon vuosien 1906 ja 1989 maanjäristysten suuruudet Richterin asteikolla olivat 8,2 ja 7,1. Määritä järistysten energioiden suhde, kun Richterin asteikon lukema  $M$  liittyy energiaan  $E$  kaavalla  $\log_{10} E = 11,8 + 1,5M$ .
7. Pisteiden  $O = (0, 0)$ ,  $P = (6, 8)$  ja  $Q = (9, 14)$  määrittävät vektorit  $\overrightarrow{OP}$  ja  $\overrightarrow{OQ}$  ovat suunnikkaan sivuina. Määritä suunnikkaan lävistäjien pituudet.
8. a) Erään liikkeen myymistä CD-levyistä on 99 prosenttia virheettömiä. Ostaja tarkastaa 21 levyn erän ja löytää kaksi virheellistä levyä. Mikä on tämän tapahtuman todennäköisyys?  
 b) Tasasivuisen kolmion kärjet ovat ympyrän kehällä. Kolmiota kierretään  $60^\circ$  ympyrän keskipisteen ympäri. Määritä kolmion uuden ja alkuperäisen asennon muodostaman tähden pinta-alan suhde kolmion alaan.
9. a) Kun  $x \neq -a$ , on  $f(x) = \frac{x^2 - x + a}{x + a}$ . Määritä  $a$  siten, että  $f$  supistuu polynomiksi. Mikä on tällöin  $\lim_{x \rightarrow -a} f(x)$ ?

KÄÄNNÄ !



b) Kuution muotoiseen laatikkoon, jonka särmä on 20 cm, pakataan kerroksittain pallon muotoisia kovia karamelleja, joiden halkaisija on 2 cm. Pohjakerrokseen mahtuu tällöin 100 karamellia ja laatikkoon siis yhteensä 1000 kappaletta. Vastaava laatikon täyttäminen toistetaan käyttäen karamelleja, joiden halkaisija on  $2/n$  cm ( $n$  kokonaisluku). Kuinka käy laatikkoon mahtuvien karamellien kokonaispainon?

10. a) Määritä vakio  $a$  väliltä  $[0, 1]$  siten, että  $\int_0^1 |x^2 - ax| dx$  on mahdollisimman pieni. Mikä on tämä pienin arvo?

b) Oppilaan kevättodistuksen keskiarvo oli 0,375:n verran parempi kuin joulutodistuksen. Kummassakin todistuksessa oli samat oppiaineet, mm. musiikki. Jos musiikkinumero, joka ei muuttunut, jätettäisiin huomiotta, olisi keskiarvon nousu 0,400. Kuinka monta oppiainetta todistuksessa oli ja kuinka moni arvosana vähintään nousi, kun mikään ei noussut kahta numeroa enempää?

YLIOPPILASTUTKINTO 30.3.1990 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 3, 6, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Olkoon  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ . Laske  $f(2 \ln 2)$  ja ratkaise yhtälö  $f(x) = \frac{1}{6}$ .

b) Erään lainan vuotuinen korko nousi 11 prosentista 12,5 prosenttiin. Kuinka monta prosenttia lainan korkokulut tällöin nousivat?

2. Laske  $\int_1^e \frac{x+2}{x} dx$ .

3. a) Kolmion kulmat ovat  $x$ ,  $2x$  ja  $3x$ . Laske lausekkeen  $(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2$  tarkka arvo.

b) Määritä yhtälön  $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$  kaikki neljä juurta.

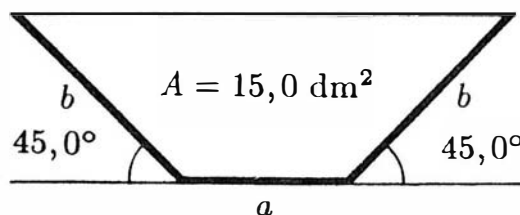
4. Eräs kirjakauppa myy CD-ROM-sanakirjaa, tietosanakirjaa ja levyasemaa seuraavien pakettihinnoin: Sanakirja ja levyasema 9 000 mk, tietosanakirja ja levyasema 8 200 mk, sanakirja, tietosanakirja sekä levyasema 12 000 mk. Mikä on tämän mukaan levyaseman hinta?

5. Tieverkon muodostavat kehätiet  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $r = 1, 2, 3$  km, sekä kahdeksan origosta  $O$  lähtevää säteittäistä tietä, yksi kuhunkin pää- ja väli-ilmansuuntaan. Määritä lyhin reitti uloimman kehätien pisteestä  $P$ , joka on pohjoisen ja koillisen säteen puolivälissä, pitkin tieverkkoa pisteeseen  $Q$ , joka on läntisellä säteellä kahden sisemmän kehän puolivälissä. Mikä on tämän reitin pituus?

6. a) Ratkaise epäyhtälö  $\left| \frac{2x+1}{3x-1} - \frac{2}{3} \right| < 0,01$ .

b) Kuution muotoinen puupino sisältää  $n^2$  kappaletta samankokoisia metrin pituisia pyöreitä puita, jotka on ladottu  $n$ :ään samanlaiseen kerrokseen ( $n$  kokonaisluku). Määritä pinoon puusisällön tilavuus.

7. Vesikourun poikkileikkaus  $A$  on alla olevan kuvion mukainen. Virtausvastuksen pienentämiseksi  $a + 2b$  pyritään saamaan mahdollisimman pieneksi. Määritä vastaavat  $a$  ja  $b$  millimetrin tarkkuudella.



KÄÄNNÄ !

8. a) Eräs tiedonsiirtojärjestelmä välittää nollista ja ykkösistä koostuvia seitsemän merkin pituisia "sanoja". Satunnaisten, toisistaan riippumattomien häiriöiden vuoksi 0 vääristyy 1:ksi todennäköisyydellä 0,005, kun taas 1 vääristyy 0:ksi todennäköisyydellä 0,010. Mikä on todennäköisyys, että lähetetty sana 0010111 saapuu vastaanottoimeen siten, että enintään yksi merkki on virheellinen?

b) Määritä ne  $xy$ -tason pisteet, joilla  $\sin x \sin y + \cos x \cos y = 1$ . Piirrä kuvio.

9. Olkoon  $f$  funktio  $f(x) = x^2 e^{-x^3} + x$ . i) Osoita, että  $x_0 \neq 0$  on yhtälön  $f(x) = 0$  juuri, jos ja vain jos  $x_0$  on yhtälön  $e^{x^3} + x = 0$  juuri. ii) Osoita, että yhtälöllä  $f(x) = 0$  on täsmälleen yksi nollasta eroava juuri. iii) Määritä tämä juuri kahden desimaalin tarkkuudella.

10. a) Lentokone lähtee nousuun vektorin  $-20\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k}$  suuntaisesti vaakatasoa kuvaavan  $xy$ -tason pisteestä  $(1\,500, 2\,000)$ . Samassa koordinaatistossa maantietä esittää yhtälö  $2x + y = 200$ . Millä korkeudella lentokone ylittää maantien? Koordinaatiston pituusyksikkö on 1 m.

b) Osoita, että ympyrän sisäänpiirretyistä kolmioista tasasivuinen kolmio on alaltaan suurin. Ohje: Osoita ensin, että tasasivuinen kolmio on suurin sisäänpiirretyistä tasakylkisistä kolmioista.

YLIOPPILASTUTKINTO 28.9.1990 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 3, 5, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

- Autovuokraamo  $A$  perii kiinteää perusmaksua 150 mk/vrk ja lisäksi kilometrimaksua 1,80 mk/km. Autovuokraamo  $B$  perii ainoastaan kilometrimaksua, joka on 2,50 mk/km. Kummasta on edullisempaa vuokrata auto yhdeksi vuorokaudeksi, jos arvioitu ajomatka on 400 km?
- Jaa lauseke  $(x - 1)(x + 1) - (x + 1)$  ensi asteen tekijöihin.
- a) Kumpi luvuista  $a = \frac{1}{21} \cdot 11^{-119}$  ja  $b = \frac{10}{19} \cdot 11^{-120}$  on suurempi?  
b) Pyöräilijät ovat 700 metrin etäisyydellä toisistaan ja ajavat tasaisella nopeudella. Puolen tunnin päästä nopeampi saavuttaa hitaamman. Mikä on ajajien nopeusero?
- Muistikaaviosta 113 355 saadaan luvun  $\pi$  likiarvoksi 355/113. Kuinka monta prosenttia tämä eroaa  $\pi$ :n arvosta?
- a) Mikä on todennäköisyys sille, että umpimähkään valittu luonnollinen luku on jaollinen luvuilla 4, 5 ja 6 ?  
b) Määritä se suoran  $3x + 2y = 2$  piste, joka on lähinnä origoa.
- Laske paraabelin  $y = 2x^2 + x$  ja suoran  $y = 2x + 1$  rajoittaman tasokuvion ala.
- a) Maatilasta halutaan erottaa neliön muotoinen 6000 m<sup>2</sup> palsta. Millä tarkkuudella sivun pituus olisi mitattava, jotta erotettava pinta-ala olisi 1 m<sup>2</sup> tarkkuudella oikea?  
b) Pisteet  $O = (0,0)$ ,  $P = (1,m)$  ja  $A = (a,0)$  ovat kolmion  $OPA$  kärkiä. Määritä  $a > 0$  ja  $m > 0$  siten, että kolmio on suorakulmainen ja alaltaan  $2m$ .
- a) Valokuvausliike lupaa kuvat ilmaiseksi, elleivät ne ole valmiina 24 h:ssa. Keskimääräinen valmistusaika on 15 h ja sen hajonta 3 h 20 min. Kuinka monta prosenttia tilauksista liike joutuu antamaan ilmaiseksi, kun valmistusajan jakauma on normaali?  
b) Lentäjä haluaa päästä suoraan idässä 115 km päässä olevaan kohteeseen. Hänen koneensa nopeus tyynellä ilmalla on 240 km/h. Lennon aikana puhalttaa pohjoistuuli 19 m/s. Mihin suuntaan konetta on ohjattava, jotta se pääsisi suoraan perille, ja mikä on tällöin lentoaika?
- Millä  $x$ :n arvoilla polynomin  $2 - x - x^2$  mielivaltaisesti valittu integraalifunktio saa suurimman arvonsa ja millä pienimmän, kun  $-1 \leq x \leq 2$ ?

KÄÄNNÄ !

10. a) Perustele derivaatan avulla, että yhtälöllä  $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$  on yksi ja vain yksi reaalilukuratkaisu. Määritä tämän likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella. Kerro lyhyesti, kuinka likiarvo on saatu.
- b) Katulamppu on 5 m korkean pylvään päässä. Henkilö, jonka pituus on 160 cm, etääntyy pylväästä nopeudella 2 m/s. Millä nopeudella henkilön pään varjo etääntyy pylväästä?

YLIOPPILASTUTKINTO 28.9.1990 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 2, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Määritä yhtälön  $(1 + x + \sqrt{x})(1 + x - \sqrt{x}) = 1$  reaaliuuret.  
 b) Tuotteen  $A$  hinnasta on 17 % liikevaihtoveroa.  $A$ :n hinta ilman liikevaihtoveroa on 120 mk. Mikä on  $A$ :n verollinen hinta?
2. a) Määritä funktion  $f: f(x) = e^x - x$  pienin arvo.  
 b) Ratkaise yhtälöpari  $x + ay = 2$ ,  $x + y = 0$ . Millä  $a$ :n arvoilla yhtälöparilla ei ole ratkaisua?
3. Laske  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \cos x dx$ .
4. Kolmion sivut ovat 2, 4 ja 5. Määritä kolmion suurin kulma  $0,1^\circ$  tarkkuudella.
5. Ratkaise epäyhtälö  $\sqrt{1 - 2x} \geq 1 - x$ .
6. Määritä kahden desimaalin tarkkuudella luku  $a$ , jolle  $\int_0^a e^{ax} dx = 1$ .
7. a) Määritä vektori, joka saadaan kiertämällä vektoria  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$  origon ympäri  $45^\circ$  positiiviseen suuntaan.  
 b) Laske käyrän  $y^2 = (e^x - 1)(e - e^x)$  pyörähtäessä  $x$ -akselin ympäri syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.
8. a) Rasia, jonka koko on  $25 \times 25 \times 5 \text{ cm}^3$ , sisältää 25 palloa, joiden halkaisija on 5,0 cm. Kohtisuoraan rasian kannen läpi työnnetään terävä neula 2,0 cm syvyyteen. Mikä on todennäköisyys, että neula osuu palloon?  
 b) Puistossa on kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa käytävää sekä koirien suosima puu, jonka etäisyys toisesta käytävästä on 60 m, toisesta 100 m. Käytävien väliin on muodostunut lyhin mahdollinen suora oikopolku, joka sivuaa puuta. Minkä kulman tämä oikopolku muodostaa puuta lähempänä olevan käytävän kanssa?
9. Todista oikeaksi kaava  $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$  ja laske sen avulla  $\int_0^\pi \sin^4 x dx$ .
10. a) Funktio  $f$  määritellään kaavalla  $f(x) = x + \sin x$ . i) Osoita, että  $f$  on aidosti kasvava. ii) Määritä käänteisfunktion derivaatta  $(f^{-1})'(\frac{3\pi - 2}{2})$ .  
 b) Lipputangon, jonka poikkileikkauksen halkaisija on 20 cm, ympäri on kierretty maasta huippuun ulottuva naru, joka nousee  $60^\circ$  kulmassa ja kiertää tangon 12 kertaa. Mikä on narun pituus? Mikä on lipputangon korkeus?

Tehtävissä 1, 3, 5, 6 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Sievennä lauseke  $(a + b)^2 - (a - b)^2$  ja laske sen tarkka arvo, kun  $a = 100^{300}$ ,  $b = 100^{-300}$ .  
  
b) Kuluttaja osti ensin 250 g kahvia normaalihintaan ja seuraavana päivänä 750 g samaa kahvia 35 % alennuksella. Kuinka monta prosenttia normaalihintaa halvemmaksi koko kahvikilo tällöin tuli?
2. Ratkaise yhtälö  $4\sqrt{3}x = 1 - 4x^2$ .
3. a) Maapallo, jonka säde on 6400 km, kiertää vuodessa kerran auringon ympäri 150 miljoonan kilometrin etäisyydellä. Kuinka monessa minuutissa maa kulkee halkaisijansa pituisen matkan? Maan kiertorataa voidaan pitää ympyränä.  
  
b) Kolmion kärkinä ovat pisteet  $A = (-1, 1)$ ,  $B = (2, -1)$  ja  $C = (3, 3)$ . Esitä komponenttimuodossa vektorit  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{q} = \overrightarrow{BC}$  ja  $\vec{r} = \overrightarrow{CA}$  sekä laske summat  $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$  ja  $3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$ .
4. Työkalujen hankintakustannuksista saa verotuksessa vähentää hankintavuotena 30 % ja kunakin seuraavana vuotena 30 % jäljelle jääneestä määrästä. Kuinka monen vuoden kuluttua näin laskettujen vähennysten summa ylittää 60 % hankintakustannuksista?
5. a) Luvun  $\sqrt{r^2 - a^2}$  likiarvona voidaan käyttää lukua  $r - \frac{1}{2}a^2/r$ . Laske tämän nojalla luvun  $\sqrt{3}$  likiarvo sopivia kokonaislukuja  $r$  ja  $a$  käyttäen. Kuinka monta prosenttia tämä likiarvo poikkeaa tarkasta arvosta?  
  
b) Määritä  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{17x^2 + 82x - 15}{x + 5}$ .
6. a) Erään maljan sisältämä nestemäärä on suoraan verrannollinen nestepinnan korkeuden neliöön. Korkeuden ollessa 10 cm malja sisältää 1,0 l nestettä. Mikä on nestepinnan korkeus, kun maljassa on 2,0 l nestettä?  
  
b) Laske käyrien  $y = 4x^2$  ja  $y = (x + 3)^2$  rajoittaman alueen pinta-ala.
7. Pussituskonetta säätämällä pussin keskisisältö voidaan valita väliltä 300 g ... 500 g. Mittausten mukaan sisällön massa on tällöin normaalisti jakautunut hajonnan ollessa 15 g. Miten suureksi pussin keskisisältö olisi säädettävä, kun vaaditaan, että pussin sisältö on 95 prosentin todennäköisyydellä yli 400 g ?

KÄÄNNÄ !

8. Järven rannalla on kaksi tähtäyspistettä  $A$  ja  $B$ , joiden välinen etäisyys on 1386 m. Vastarannalla on puu  $P$ . Suuntakehällä on mitattu kulmat  $PAB = 37,4^\circ$  sekä  $PBA = 53,9^\circ$ . Laske puun etäisyys pisteestä  $A$ .
9. Määritä graafisesti yhtälön  $2^x = x + \frac{3}{2}$  juuret. Paranna sen jälkeen suurimman juuren likiarvoa laskinta käyttäen kahden desimaalin tarkkuuteen.
10. a) Määritä funktio  $f$ , kun  $f'(x)$  on suoraan verrannollinen muuttujaan  $x$  ja  $f(0) = 1$  sekä  $f'(1) = 14/31$ .
- b) Suorien  $y = 4x$  ja  $y = -x + 9$  sekä  $x$ -akselin rajoittamaan kolmioon piirretään suorakulmio siten, että yksi sivu on  $x$ -akselilla. Mikä on suorakulmion pinta-alan suurin mahdollinen arvo?



YLIOPPILASTUTKINTO 27.3.1991 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 3, 4, 5 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Ratkaise yhtälö  $x - \sqrt{43 - 3x} = 11$ .

b) Seuramatkan hinnasta lennon osuus on 50 %. Lennon hinnasta 30 % on polttoainekustannuksia. Polttoaine kallistuu 10 %. Kuinka monen prosentin nousun tämä aiheuttaa matkan kokonaishintaan?

2. Laske  $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ .

3. a) Millä vakion  $a$  arvoilla  $x = 0$  on yhtälön  $x^3 + ax^2 + x = 0$  ainoa reaalijuuri?

b) Määritä funktion  $f: f(x) = (1 - \cos^3 x)^3$  suurin ja pienin arvo.

4. a) Henkilö lottoaa yhden rivin (7 numeroa 39:stä). Mikä on todennäköisyys, ettei hän saa yhtään oikein?

b) Olkoon vektori  $\vec{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$ . Määritä piste  $B$  siten, että kulma  $OAB$  on suora ja vektorin  $\vec{OB}$  pituus on kaksi kertaa vektorin  $\vec{OA}$  pituus.

5. a) Yhtälössä  $\ln y = x/2 + 10^5$  muuttuja  $x$  kasvaa ykkösen verran. Kuinka monta prosenttia kasvaa tällöin  $y$ ?

b) Suoran ympyräkartion pohjana on kuution pohjaneliöön sisäänpiirretty ympyrä. Kartio leikkaa kuution vastakkaisen tahkon pitkin ympyrää, jonka ala on kolmasosa pohjaympyrän alasta. Laske kartion tilavuuden ja kuution tilavuuden suhde.

6. Kahden metrin korkeudelta heitetty pallo osuu viiden metrin päässä olevan puun runkoon viiden metrin korkeudella. Pallon lentoratana on paraabeli, jonka huippu on heittäjän ja puun välissä kahden metrin etäisyydellä puusta. Laske heittokulma.

7. a) Tasa-aineinen pallo kelluu vedessä siten, että siitä on pinnan yläpuolella osa, jonka korkeus on  $r/5$  ( $r$  on pallon säde). Määritä pallon tiheys ( $\text{kg/m}^3$ ), kun veden tiheys on  $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

b) Osoita, että erotus  $1 + 0,5 \cdot t - \sqrt{1+t}$  on pienenevä, kun  $-1 \leq t \leq 0$ , ja kasvava, kun  $t \geq 0$ . Tutki tätä tietoa käyttäen, millä tarkkuudella yhtälö  $\sqrt{1+x^5} \approx 1 + 0,5 \cdot x^5$  on voimassa, kun  $x \in [-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}]$ .

KÄÄNNÄ !

8. Jana  $AB$ , jonka pituus on 1, liikkuu siten, että sen päätepiste  $A = (a, 0)$  on  $x$ -akselilla ja päätepiste  $B = (0, b)$   $y$ -akselilla. Minkä käyrän piirtää tällöin piste  $C = (x, y)$ , joka jakaa janan siten, että  $|AC| : |CB| = 1 : 3$  ?
9. Funktio  $f$  on määritelty välillä  $] -1, 1[$ , ja derivaatta  $f'$  on olemassa pisteessä  $x = 0$  (mutta ei välttämättä muualla). Määritä

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(-x^2)}{x^2}.$$

10. Suorakulmaisen huoneen korkeus on 2 m, leveys 3 m ja pituus 4 m. Lattian nurkkapistestä on seinää ja kattoa pitkin vedettävä mahdollisimman lyhyt sähköjohto katon keskipisteeseen. Mihin katonrajan kohtaan johto on vedettävä, ja kuinka paljon johtoa tarvitaan?

YLIOPPILASTUTKINTO 25.9.1991 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 4, 6, ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Miten luku  $a$  on valittava, jotta yhtälön  $ax^2 + x - 4 = 0$  toisena juurena on  $-4$  ?  
 b) Metrin mitaksi luullulla välineellä mitattiin 60 metrin juoksurata. Kun samalla välineellä mitattiin tarkistuksen vuoksi tasan 50 m mittaiseksi tiedetty välimatka, saatiin tulokseksi 52,5 "metriä". Kuinka pitkä oli välineen "metri", ja kuinka pitkäksi tuli juoksurata?
2. Ratkaise yhtälö  $(x + 7 - \sqrt{3})(x + 7 + \sqrt{3}) = 0$ .
3. Luokalla, jolla oli 28 oppilasta, heistä 16 tyttöä, käytti silmälaseja 7 oppilasta, joista 3 oli poikia. Onko tämän tilaston perusteella silmälasien käyttö sukupuolesta riippuvaa?
4. a) Kuinka kaukana origosta on suorien  $3x - 2y - 16 = 0$  ja  $5x - 4y + 16 = 0$  leikkauspiste?  
 b) Miten  $a$  on valittava, jotta vektorit  $\bar{u} = (2 + 3a)\bar{i} - 4\bar{j}$  ja  $\bar{v} = 5\bar{i} + (a - 5)\bar{j}$  olisivat 1) samansuuntaisia, 2) samoja?
5. Itä-länsisuuntaisen kadun leveys on 15 m. Sen molemmin puolin on 18 m korkeat talot. Etelästä paistavan auringon säteet muodostavat  $40^\circ$  kulman vaakatason suhteen. Osuvatko auringonsäteet kadun pohjoispuolella olevaan ikkunaan, jonka yläreuna on 4,0 m korkeudella kadun pinnasta?
6. a) Millä kulmakertoimen  $k$  arvoilla suoran  $y = kx$  ja paraabelin  $y = x^2$  rajoittaman alueen ala on 36 ?  
 b) Henkilöt  $A$  ja  $B$  lähtivät samasta kohdasta kiertämään samaa 600 m mittaista kuntolenkkiä, mutta vastakkaisiin suuntiin.  $A$ :n nopeus oli 1,5-kertainen verrattuna  $B$ :n nopeuteen. Kuinka pitkät matkat he olivat kulkeneet, kun he viidennen kerran kohtasivat toisensa?
7. Kuinka suuressa kulmassa maapallo näkyy kuun pinnalta kohdasta, joka on lähinnä maata? Maan säde on 6 378 km, kuun säde on 1 738 km ja maan ja kuun välinen etäisyys (keskipisteestä keskipisteeseen) on 384 400 km.
8. Liikkeen myynti viitenä peräkkäisenä kuukautena oli tuhansina markkoina 273, 314, 283, 295 ja 265. Laske näiden keskiarvo ja hajonta. Seuraavassa kuussa myynti oli 296 000 mk. Voidaanko sanoa myynnin merkitsevästi lisääntyneen?
9. a) Suora  $y = x - 2$  leikkaa paraabelin  $y = -x^2$  pisteissä  $A$  ja  $B$ . Näiden väliseen segmenttiin piirretään kolmio  $ABC$ , jonka kolmas kärki  $C$  on se paraabelin piste, johon piirretty tangentti on  $AB$ :n suuntainen. Laske kolmion  $ABC$  pinta-ala.  
 b) Millä muuttujan arvoilla funktio  $\ln[(x - 2)(4 - x)]$  on määritelty, ja mitkä arvot se saa?
10. Kartalla, jonka mittakaava on 1 : 20 000, on nelikulmion  $ABCD$  muotoinen alue. Kartasta mitattiin seuraavien sivujen pituudet:  $AB = 23$  mm,  $BC = 44$  mm,  $CD = 42$  mm. Kulma  $B$  on suora, mutta kulman  $C$  suuruus on  $57^\circ$ . Laske alueen suuruus hehtaareina.

YLIOPPILASTUTKINTO 25.9.1991 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 3, 5, 6, 7 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $x^2 - 1 = 3(x + 1)$ .
2. Onko funktio  $f: f(x) = e^x \sin x$  funktion  $g: g(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$  integraalifunktio?
3. a) Määritä vakio  $A$  siten, että  $\int_0^1 (e^x + Ax) dx = 0$ .  
  
b) Kun tavaran hintaa alennettiin 20 %, sen markkamääräinen myynti kasvoi 2,0 %. Kuinka monella prosentilla kasvoi myyty tavaramäärä?
4. Ratkaise yhtälö  $\cos x = \sqrt{3} \sin x$ .
5. a) Laatikosta, jossa on kolme punaista, neljä sinistä ja viisi mustaa palloa, otetaan umpimähkään kaksi palloa. Mikä on todennäköisyys, että ne ovat samanväriset?  
  
b) Käyrän  $y^2 = (2 + x)(2 - x)(1 - x)$  muodostama umpinainen silmukka pyörähtää  $x$ -akselin ympäri. Laske muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuus.
6. a) Vektorit  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$  ovat kolmion kahtena sivuna. Määritä niiden yhteisestä alkupisteestä piirretyn korkeusjanan pituus.  
  
b) Henkilö antaa kolmelle ystävälleen yhden joululahjan kullekin, ja käyttää tähän yhteensä 1 000 markkaa. Mikään lahja ei saa maksaa enempää kuin kaksi kertaa kumpi tahansa muista lahjoista. Kuinka paljon kallein lahja voi enintään maksaa? Jos kaksi lahjaa on yhtä kallista, paljonko ne enintään maksavat?
7. a) Osoita, että käyrä  $y = x(1 + \ln x)$  ( $x > 0$ ) ei ole missään kohdassa suoran  $y = x - e^{-1}$  alapuolella.  
  
b) Tasapaksusta peltilevystä on valmistettava litran vetoinen, suoran ympyrälieriön muotoinen, kanneton ja mahdollisimman kevyt muki. Mitkä ovat sen mitat?
8. a) Osoita, että likimääräisessä kaavassa  $(1 + x)^6 \approx 1 + 6x$  virhe on pienempi kuin  $1,6 \cdot 10^{-3}$ , kun  $0 \leq x \leq 0,01$ .  
  
b) Osoita, että kaikilla parven  $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay = 5 - 10a$  ympyröillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Mikä tämä piste on? Piirrä ympyräparven kuva.

KÄÄNNÄ !

9. Henkilö  $A$ , joka maksaa tuloistaan veroa 60 %, hankkii vuoden alussa  $x$  markalla obligaatioita, joiden vuotuinen korko on 10 %. Korosta saa verottomana 2 000 mk, ja sen jälkeen korosta puolet on verotonta aina 18 000 markkaan saakka. Esitä korosta vuoden lopussa käteen jäävä osa  $y$   $x$ :n funktiona ja piirrä funktion kuvaaja. Mikä korko on sillä kokonaan verottomalla obligaatiolla, joka antaa 100 000 markan pääomalle saman nettotuoton, jonka  $A$  saa ostaessaan verollisia obligaatioita 100 000 markalla?
10. Osoita, että polynomi  $x^2 + px - \frac{1}{3} - \frac{p}{2}$  vaihtaa merkkinsä välillä  $]0, 1[$ , olipa  $p$  mikä tahansa reaaliluku.

YLIOPPILASTUTKINTO 27.3.1992 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 3, 4, 5 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Kuinka monen sekunnin kuluttua maan pinnalta lähetetty valo palaa takaisin heijastuttuaan kuun pinnalla olevasta heijastimesta? Valon nopeus on  $3,0 \cdot 10^8$  m/s ja heijastimen etäisyys valolähteestä on  $3,8 \cdot 10^5$  km.

b) Ratkaise yhtälö

$$\frac{x}{6} - \frac{x}{8} = \sqrt{10} - 3.$$

(Tarkka arvo ja likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella.)

2. Määritä funktion  $f: f(x) = 6x - \frac{1}{2}x^2$  suurin ja pienin arvo välillä  $[0, 10]$ .

3. a) Erään tuotteen tarjonta kasvoi 25 %. Kuinka monta prosenttia hinta tällöin laski, jos tuotteen hinta on kääntäen verrannollinen tarjontaan?

b) Suunnistaja etenee vektorin  $\vec{i}$  suuntaisesti 150 m pisteestä  $O$  pisteeseen  $A$ , josta hän jatkaa 270 m vektorin  $3\vec{i} + 4\vec{j}$  suunnassa pisteeseen  $B$ . Miten kaukana hän on tällöin lähtöpisteestä  $O$  ?

4. a) Millä luvun  $a$  arvoilla integraali  $\int_0^2 (x^2 - (a - x)^2) dx$  saa arvon 0 ?

b) Abiturientit saivat helmikuussa 1991 pitkässä ranskassa seuraavat määrät kouluarvosanoja:

|            |   |   |    |    |    |    |    |          |
|------------|---|---|----|----|----|----|----|----------|
| arvosana:  | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | Yhteensä |
| lukumäärä: | 0 | 8 | 10 | 30 | 36 | 39 | 29 | 152      |

Piirrä pylväsdiagrammi aineistosta sekä laske taulukossa olevien arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta.

5. a) Vajaan, jonka leveys on 2,5 m ja pituus 3,0 m, rakennetaan harjakatto. Katon lappeet muodostavat  $35^\circ$  kulman vaakatason suhteen. Katon lappeet jatkuvat kaikkien seinien yli niin pitkälle, että talon ympärille muodostuu 30 cm levyinen sadesuoja. Laske katon pinta-ala.

b) Kun eräällä luokalla jokainen oppilas antoi valokuvansa jokaiselle luokkatoverilleen, vaihtoi 1 122 valokuvaa omistajaa. Kuinka monta oppilasta luokalla oli?

6. Erästä matkasta jouduttiin tietyön takia kolmasosa ajamaan neljäsosalla tavanmukaisesta keskinopeudesta. Kuinka monta prosenttia keskinopeus laski koko matkalla, kun muu osa matkasta ajettiin tavanmukaisella keskinopeudella?

KÄÄNNÄ !

7. a) Jäätelötötterö on muodoltaan ympyräkartio, jonka pohjan säde on 2,5 cm ja korkeus 12,0 cm. Tötterössä olevan jäätelöpallon säde on 3,0 cm. Mahtuisiko pallon sisältämä jäätelömäärä kokonaisuudessaan tötteröön?
- b) Koulusta myöhästynyt oppilas myöhästyy seuraavanakin koulupäivänä 30 prosentin todennäköisyydellä. Jos oppilas on tullut ajoissa kouluun, hän myöhästyy seuraavana koulupäivänä 10 prosentin todennäköisyydellä. Kuinka suuri on todennäköisyys, että oppilas tulee keskiviikkona ajoissa kouluun, jos hän saman viikon maanantaina myöhästyi koulusta?
8. Työntekijän bruttokuukausipalkka laski 10900 markasta 9700 markkaan. Samana ajanjaksona hintatasoa kuvaava kuluttajahintaindeksi nousi 137,0 pisteestä 144,0 pisteeseen. Kuinka monta prosenttia oli bruttopalkan reaalinen muutos?
9. Miten suuri on pyöreän putken sisähalkaisija, kun putkeen juuri ja juuri mahtuu neljä 13 mm paksuista, pyöreää johtoa?
10. Lentokone lentää länttä kohti nopeudella 700 km/h, jolloin aurinko näyttää pysyvän koko ajan horisontissa. Millä leveysasteella lentokone lentää? Matka navalta päiväntasaajalle on 10 000 km.

Tehtävissä 4, 5, 6, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä se funktion  $f: f(x) = \sin x + 1$  integraalifunktio, joka saa arvon 3, kun  $x = 0$ .
2. Määritä ne käyrän  $y = (x + 1)^4 - 4x$  pisteet, joissa käyrän tangentti on vaakasuora.
3. Ratkaise epäyhtälö  $\sqrt{1 - 2x} < 2$ .
4. a) Yhdenmuotoisten arkkien A4 ja A5 alojen suhde on 100:50. Kirjoitusta sisältävä A4-kokoinen arkki pienennetään kokoon A5. Kuinka monta prosenttia tekstin korkeus tällöin pienenee?  
 b) Vektorin  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  alkupiste  $A = (2, 3)$ , vektorin  $\vec{u}$  suunta on sama kuin vektorin  $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ , ja vektorin  $\vec{u}$  pituus on 3. Määritä piste B.
5. a) Määritä yhtälön  $ax^2 - 2x - a = 0$  pienempi juuri, kun  $a$  on nollasta eroava vakio.  
 b) Kun eräällä paikkakunnalla 80 henkilöä jäi työttömäksi, nousi paikkakunnan työttömyysprosentti 9 prosentista 13 prosenttiin. Kuinka monta työtöntä paikkakunnalla oli tämän jälkeen?
6. a) Radiumin määrä  $N_0$  pienenee määrään  $N$  ajassa  $t$  kaavan  $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$  mukaisesti, missä  $\lambda$  on vakio. Radiumin puoliintumisaika on 1 580 vuotta. Kuinka kauan radiumin määrän pieneminen kymmenesosaansa kestää?  
 b) Verohallituksen ohjeen mukaan kunnallisverotuksessa myönnettävä perusvähennys lasketaan seuraavasti. Jos tulon määrä on 8800 mk, ei kunnallisverotuksessa jää verotettavaa tuloa. Jos tulon määrä ylittää 8800 mk, vähennystä pienennetään 20 prosentilla ylimenevästä tulon määrästä. Mitä kaavaa noudattaa  $x$  markan tulosta myönnettävä vähennys, ja millä  $x$ :n arvolla vähennys ei enää vaikuta?
7. Määritä lausekkeen  $2x - \sqrt{1 - x^2}$  suurin ja pienin arvo.
8. Osoita, että käyrät  $x^4 + y^4 = 1$  ja  $2xy = 1$  leikkaavat toisensa, ja määritä leikkauspisteiden etäisyydet origosta. Tarkat arvot ja likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.
9. a) Kolmion kärjet ovat  $O = (0, 0)$ ,  $P = (a, 0)$  ja  $Q = (x_0, y_0)$  ( $a, x_0, y_0$  ovat positiivisia vakioita). Kolmioon piirretään kannan  $OP$  suuntainen jana, jonka sivuilla  $OQ$  ja  $PQ$  olevat päätepisteet  $R$  ja  $S$  yhdistetään sivulla  $OP$  olevaan pisteeseen  $T$ . Mikä on janan pituus, kun kolmion  $RST$  ala on mahdollisimman suuri?  
 b) Lausu funktio  $f: f(x) = 12 \cos x - 5 \sin x$  muodossa  $R \cos(x + \omega)$ , missä  $R$  ja  $\omega$  ovat vakioita, ja määritä tätä tietä funktion  $f$  suurin ja pienin arvo. Millä  $x$ :n arvoilla ne saavutetaan?

KÄÄNNÄ !



10. a) Funktion  $f: f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  kertoimet toteuttavat ehdot  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$  ja  $ad = bc$ . Osoita, että  $f$  on vakiofunktio määrittelyjoukossaan. Mikä tämä vakioarvo on?

b) Lattia halutaan päällystää samankokoisilla säännöllisen  $n$ -kulmion muotoisilla laatoilla. Määritä kaikki luvun  $n$  arvot, joilla päällystäminen on mahdollista. Ohje: Olkoon  $n$ -kulmion kulma  $u$ . Tällöin on kulman  $u$  oltava muotoa  $\frac{2\pi}{p}$ , missä  $p$  on kokonaisluku. Lausu  $p$  luvun  $n$  avulla ja tutki, mitkä kokonaislukuparit  $(p, n)$  toteuttavat saadun yhtälön.

YLIOPIILASTUTKINTO 18.9.1992 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 3, 7, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälöt  $1^\circ x^2 - 100x = 0$ ,  $2^\circ x^2 - 100 = 0$  ja  $3^\circ x^2 - 100x^2 = 0$ .
2. a) Ympyrän muotoisen levyn säde on 35 mm. Levyyn porataan pyöreä reikä, jonka säde on 24 mm. Laske näin saadun rei'itetyn levyn pinta-ala.

b) Laske  $\int_{-2}^1 (6x^2 - 8x)dx$ .

3. a) Määritä ne positiiviset, yksinkertaisimpaan muotoon supistetut murtoluvut, joiden osoittajan ja nimittäjän summa on 10.

b) Määritä ne positiiviset muuttujan  $x$  arvot, jotka toteuttavat epäyhtälön

$$2x^2 + 3x - 20 \leq 0.$$

4. Mikä on käyrälle  $y = -x^2 + 4x + 1$  pisteeseen  $(1, 4)$  piirretyn normaalin yhtälö? Missä toisessa pisteessä tämä normaali leikkaa mainitun käyrän?
5. Omenapuun korkeudelle  $y$  metriä esitetään mallia

$$y = \frac{12t}{t + 100},$$

missä  $t$  on puun ikä vuosina. Tutki, mitä arvoja tämä malli antaa, kun puun ikä on 0, 1, 2, 5, 10, 20, 50 tai 100 vuotta. Kuinka paljon puu kasvaa mallin mukaan vuodessa, kun se on 5-vuotias ja 50-vuotias? Voisiko omenapuu saavuttaa mallin mukaan 13 metrin korkeuden?

6. Auton akusta saatava jännite  $U$  laskee akusta otettavan virran  $I$  funktiona yhtälön  $U(I) = 12 - 0,3 \cdot I$  mukaisesti. Auton käynnistysmoottoriin saatava teho  $P$  on jännitteen ja virran tulo  $P(I) = U(I) \cdot I$ . Mikä on tämän tehon suurin arvo, ja kuinka suuri on vastaava virta?
7. a) Neliön kärkinä ovat pisteet  $(5, 5)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(5, -1)$  ja  $(8, 2)$ . Vektorin  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$  alkupiste on  $(-2, 3)$  ja loppupiste sattumanvaraisesti valittu mainitun neliön sisäpiste. Kuinka suurella todennäköisyydellä on  $1^\circ a > 0$ ,  $2^\circ b > 0$ ?

b) Turpeessa on vettä aluksi 60 %. Kuinka monta prosenttia vedestä on haihdutettava, jotta turpeessa tämän jälkeen olisi vain 20 % vettä?

8. Erään yrityksen valmistamien akselien läpimitta on normaalisti jakautunut keskiarvon ollessa 150,00 mm. Kuinka suuri saa läpimitan hajonta enintään olla, jotta läpimitta ylittäisi hylkäämisrajan 150,20 mm korkeintaan 0,5 prosentin todennäköisyydellä?

KÄÄNNÄ !

9. a) Erään mallin mukaan tietyssä tilanteessa sattuvien auto-onnettomuuksien todennäköisyys riippuu kuljettajan veren alkoholipitoisuudesta seuraavasti. Jos veressä on  $v$  promillea alkoholia, on todennäköisyys  $R(v) = e^{2,14 \cdot v}$  prosenttia. Millä  $v$ :n arvoilla malli ei voi vastata todellisuutta? Kuinka suuri on mallin mukainen todennäköisyys, jos veressä on 0,5 promillea alkoholia? Kuinka paljon alkoholia on veressä, jos mallin mukaan todennäköisyys on 15 prosenttia?
- b) Laskimen mukaan on  $\sqrt{4,456\,790\,123 \cdot 10^{30}} \approx 2,111111\,111 \cdot 10^{15}$ . Tutki, onko kyseessä neliöjuuren ylä- vai alalikiarvo.
10. a) Olkoon  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 17$ . Laske sijoittamalla  $x = y + 2$  lausekkeen  $f(y + 2)$  sievennetty muoto. Saadusta tuloksesta voidaan päätellä, millä  $y$ :n ja vastaavasti millä  $x$ :n arvolla funktio saa arvon nolla. Etsi esitetyllä tavalla yhtälön  $f(x) = 0$  reaalijuuren tarkka arvo ja likiarvo laskimen antamalla tarkkuudella.
- b) Kun suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on  $r$  ja kartion korkeus  $h$ , on kartion tilavuus  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ . Olkoon tällaisen kartion sivuviivan pituus  $s = 60$  mm, jolloin  $r^2 + h^2 = s^2$ . Esitä kartion tilavuus korkeuden  $h$  funktiona ja määritä tällä tavoin tilavuuden suurin arvo.

YLIOPIILASTUTKINTO 18.9.1992 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 3, 4, 5 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä vakiot  $A$  ja  $B$  siten, että funktio  $f: f(x) = A \sin x + B \cos x$  toteuttaa ehdot  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ ,  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .
2. a) Määritä ne tason vektorit, joiden pituus on  $= 1$  ja jotka ovat kohtisuorassa vektoria  $-\vec{i} + 3\vec{j}$  vastaan.  
b) Johda lauseke säännöllisen  $n$ -kulmion kulmalle.
3. a) Tavarahan hinta nousi ennen joulua  $p$  %. Sitä myytiin joulun jälkeen 60 % alennuksella, jolloin sen hinta tuli samaksi kuin ennen korotusta. Määritä  $p$ .  
b) Ratkaise yhtälö  $\sin x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ .
4. a) Määritä käyrän  $y = x^3 + 1$  ja sen pisteeseen  $(1, 2)$  piirretyn tangentin leikkauspiste.  
b) Korttipakassa on 52 korttia, joista 4 on ässiä. Pelaaja ottaa pakasta umpimähkään 4 korttia. Mikä on todennäköisyys, että i) kaikki ovat ässiä, ii) mikään ei ole ässä?
5. a) Osoita, että yhtälöllä  $(x + 1)^3 = x$  on täsmälleen yksi reaalijuuri.  
b) Kumpi luvuista  $a^2 + \frac{1}{2}b^2$  ja  $ab$  on suurempi, kun  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ? Esimerkit eivät kelpaa perusteluksi.
6. Olkoot  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  vektoreita, joille  $|\vec{a}| + |\vec{b}| > 0$ , ja  $\vec{c} = \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ . Vektoreilla  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{c}$  on sama alkupiste. Osoita, että  $\vec{c}$ :n kärki  $C$  on  $\vec{a}$ :n kärjen  $A$  ja  $\vec{b}$ :n kärjen  $B$  yhdysjanalla. Missä suhteessa  $C$  jakaa janan  $AB$ ?
7. a) Ympyrälieriön muotoinen putki, jonka pituus on 50 cm ja halkaisija ulkoa mitattuna 10 cm sekä sisältä mitattuna 9,9 cm, peitetään sekä ulkoa että sisältä 0,1 mm maalikerroksella. Kuinka monta prosenttia enemmän maalia kuluu ulkopuolen maalaamiseen?  
b) Laske  $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x}$ .
8. Lentokone, joka on 15 kilometrin korkeudessa merenpinnasta rantaviivan yläpuolella, lähettää valosignaaleja, jotka merellä oleva laiva näkee horisontissa. Kuinka pitkä matka laivan on kuljettava rantaan päästäkseen? Maapallon halkaisija on 12 756 km.

KÄÄNNÄ !

9. Lainasta, jonka suuruus on  $K$  mk, peritään 15 % vuotuinen korko, ja laina maksetaan takaisin  $n$  vuoden aikana maksamalla kunkin vuoden lopussa koron lisäksi vakioyhennys  $\frac{K}{n}$  mk. i) Kuinka paljon korkoa kaikkiaan maksetaan? ii) Millä  $n$ :n arvoilla korkomenot ylittävät lainan määrän  $K$  mk? iii) Kuinka monta prosenttia korkomenot nousevat, jos korkoprosentti nousee kahdella prosenttiyksiköllä?
10. Esitä funktio  $f$ :  $f(x) = \int_0^{2x} (t + |t - x|) dt$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , integroidussa muodossa sekä piirrä funktion kuvaaja.

Tehtävissä 2, 3, 4, 5 ja 7 on kussakin kolme vaihtoehtoa, joista saa suorittaa vain yhden. Vaihtoehto c) on tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille, mutta sen saa valita kuka tahansa.

1. Tilausmatkan kustannukset ajateltiin jaettavaksi tasan 22 osanottajalle, mutta kun lähtijöitä olikin 24, tuli kullekin matka 10 mk halvemmaksi. Kuinka paljon kukin osanottaja joutui lopulta maksamaan?

2. a) Esitä funktio  $f: f(x) = \left(\frac{5x-4}{3}\right)^2$  polynomina ja derivoi tämä polynomi.

b) Kauppias oli maksanut tuotteesta 220 mk. Kuinka suureksi hänen olisi asetettava myyntihinta voidakseen myöntää käteisalennusta 15 % ja saada silti voittoa 15 % maksamastaan hinnasta?

c) Aurinko nousi Jyväskylässä 2.4. klo 6.36 (kesäaika) ja nousee viikkoa myöhemmin klo 6.13. Mihin aikaan aurinko nousee Jyväskylässä 14.4., kun lyhyellä aikavälillä auringon nousuaika on päivämäärän lineaarinen funktio (kuvaajana suora)?

3. a) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 5(x+y) - 2(x-y) = 15, \\ 7(x+y) - 3(x-y) = 21. \end{cases}$$

b) Huhtikuun 2. päivä 1993 on perjantai. Mikä viikonpäivä on 1001:n yön kuluttua?

c) Kuinka monen vuoden päästä hinnat olisivat 1,5-kertaisia, jos ne nousisivat joka vuosi 7 %?

4. a) Ratkaise yhtälö  $2x(x+3) - 3(2x-1) = 9 - 4x$ .

b) Suomessa syntyvistä lapsista 51,3 % on poikia. Kuinka suurella todennäköisyydellä seitsenlapsisen Jukolan perheen kaikki lapset ovat poikia?

c) Kuinka monta 50 Saksan markan seteliä matkalle lähtevä henkilö saattoi enintään ostaa pankista, kun pankin välityspalkkio oli 25 mk, kurssi oli oheisen taulukon mukainen ja hänen käytettävissään oli 4000 mk?

| VALUUTAT<br>28.1.1993 |     | Tilivaluutta<br>Osto Myynti |        | Setelikurssit<br>Osto Myynti |        |
|-----------------------|-----|-----------------------------|--------|------------------------------|--------|
| USA - dollari         | USD | 5.482                       | 5.498  | 5.398                        | 5.628  |
| Kanada - dollari      | CAD | 4.276                       | 4.296  | 4.216                        | 4.396  |
| Iso-Brit. - punta     | GBP | 8.398                       | 8.440  | 8.259                        | 8.615  |
| Irlanti - punta       | IEP | 9.004                       | 9.044  | 8.834                        | 9.254  |
| Ruotsi - kruunu       | SEK | 0.7579                      | 0.7679 | 0.7479                       | 0.7859 |
| Norja - kruunu        | NOK | 0.8033                      | 0.8073 | 0.7883                       | 0.8243 |
| Tanska - kruunu       | DKK | 0.8852                      | 0.8882 | 0.8732                       | 0.9082 |
| Islandi - kruunu      | ISK | 0.0839                      | 0.0889 | 0.0819                       | 0.0989 |
| Saksa - markka        | DEM | 3.3991                      | 3.4091 | 3.3411                       | 3.4761 |
| Hollanti - guldeni    | NLG | 3.023                       | 3.032  | 2.972                        | 3.100  |
| Belgia - frangi       | BEF | 0.1650                      | 0.1656 | 0.1623                       | 0.1693 |
| Sveitsi - frangi      | CHF | 3.7072                      | 3.7192 | 3.6442                       | 3.7972 |

5. a) Kun suorakulmaisessa kolmiossa piirretään suoran kulman kärjestä lähtevä korkeusjana, jakaantuu kolmio kahteen osaan, joiden alojen suhde on 1 : 2. Laske kolmion pienimmän kulman suuruus  $0,1^\circ$ :n tarkkuudella.

b) Muuntajassa on 110 metriä poikkileikkaukseltaan pyöreää halkaisijaltaan 2,0 mm olevaa kuparijohtoa. Kuinka paljon tämä johto painaa? Yksi kuutiosenttimetri kuparia painaa 8,92 g.

KÄÄNNÄ !

c) Fibonaccin lukujono alkaa kahdella ykkösellä, minkä jälkeen seuraava luku saadaan aina kahdesta edellisestä laskemalla ne yhteen:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = 3$ ,  $a_5 = 5, \dots$ ,  $a_{24} = 46368$ ,  $a_{25} = 75025, \dots$ . Mikä on  $a_{23}$ ? Kuinka paljon suhde  $a_{24} : a_{23}$  poikkeaa irrationaaliluvusta  $(1 + \sqrt{5})/2$ ?

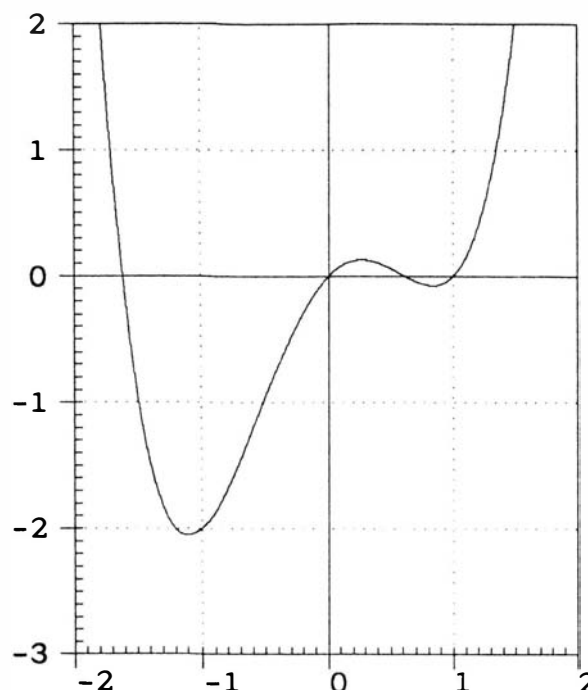
6. Oheisessa kuvassa on erään polynomifunktion  $f$  kuvaaja. Selvitä kuvan perusteella, kuinka suuri on  $f'(0)$ . Missä muissa pisteissä derivaatalla on sama arvo kuin origossa?

7. a) Laske sen alueen pinta-ala, jonka määrittävät epäyhtälöt  $y > x - 3$  ja  $y < -x^2 + 8x - 9$ .

b) Huoneisto, jonka pinta-ala oli  $96 \text{ m}^2$ , oli esitteessä kooltaan  $40 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}$ . Esitteessä olevan keittiön ala oli  $3,0 \text{ cm}^2$ . Mikä oli esitteen mittakaava ja mikä keittiön ala?

c) Yksinkertainen "ruokakori" koostuu viidestä tuotteesta, joiden osuudet on lueteltu seuraavassa taulukossa. Eräiden tuotteiden hinnat nousevat, eräiden laskevat taulukon mukaisesti.

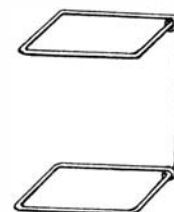
| Tuote | Osuus korissa | Hinnan muutos |
|-------|---------------|---------------|
| A     | 35 %          | + 2,0 %       |
| B     | 25 %          | - 1,0 %       |
| C     | 20 %          | + 4,4 %       |
| D     | 14 %          | - 5,8 %       |
| E     | 6 %           | + 6,2 %       |



Laske koko ruokakorin hinnanmuutos.

8. Tähtitieteessä etäisyydet ilmoitetaan usein yksikkönä parsek, joka on se etäisyys, josta Maan kiertoradan säde näkyisi yhden kulmasekunnin suuruudessa kulmassa. Kuinka monta kilometriä on parsek, kun Maan radan säde on  $150\,000\,000 \text{ km}$ ?

9. Rautalangasta, jonka pituus on  $50 \text{ cm}$ , taivutetaan kuvan mukainen kehikko suorakulmaista särmiötä varten. Langan päistä varataan kummastakin  $1 \text{ cm}$  pientä silmukkaa varten. Särmiön pohja on neliön muotoinen. Miten tämän neliön sivu ja miten kehikon korkeus on valittava, kun särmiön tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi?



10. Koulussa on  $300$  lamppua, joiden kestoikä noudattaa normaalijakaumaa keskiarvon ollessa  $1200 \text{ h}$  ja keskihajonnan  $200 \text{ h}$ . Lamput palavat  $55 \text{ h}$  viikossa. Kaikki lamput vaihdetaan kerralla. Kuinka usein tämä on tehtävä, jotta vain  $50$  lamppua ehtii sammua?

YLIOPPILASTUTKINTO 2.4.1993 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 3, 4, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö

$$\frac{x}{x-3} = \frac{x-3}{x}.$$

2. Laboratoriossa tarvitaan 750 grammaa 2-prosenttista suolaliuosta. Saatavilla on vain 5-prosenttista suolaliuosta ja vettä. Kuinka paljon näitä on sekoitettava halutun liuoksen valmistamiseksi?

3. a) Laske funktion  $e^x + e^{-3x}$  tarkka arvo, kun  $e^{2x} = 9$ .

- b) Autoilijan työmatkan kesto  $t$  riippuu liikennevirrasta  $m$  kaavan

$$t = 0,01m^2 + 0,03m + 18$$

mukaisesti, missä  $t$  on ajoaika minuutteina ja  $m$  liikenteen mittauspisteen minuutissa ohittavien autojen määrä. Kuinka suuri saa liikennevirta enintään olla, jotta autoilijan työmatka kestäisi enintään puoli tuntia?

4. a) Huoneessa on kaksi pystysuoraa peiliä, joiden välinen kulma on  $130^\circ$ . Vaakasuora valonsäde heijastuu peräkkäin molemmista peileistä. Mikä on tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma?

- b) Olkoon  $w = 1 - 2i$ . Määritä kompleksiluku  $z$ , jolle  $z + w$  on puhtaasti imaginaarinen ja  $zw$  reaalinen.

5. Ratkaise yhtälö

$$\frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} = a$$

vakion  $a$  kaikilla reaaliarvoilla.

6. a) Tutki, onko yhtälöllä  $\sin x + \cos x = 1,41422$  reaalijuuria.

- b) Suoran tien viereen rakennetaan täyttömaasta meluvalli, jonka poikkileikkaus on pystyssä olevan paraabelin muotoinen. Vallin korkeus on 3 m, leveys maanpinnan tasolla 6 m ja pituus 55 m. Kuinka monta kuutiometriä täyttömaata valliin tarvitaan?

KÄÄNNÄ !



7. a) Pisteestä  $P_1 = (10, 0, 0)$  lähetetään valonsäde suuntaan  $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$  ja pisteestä  $P_2 = (310, 480, 400)$  suuntaan  $\vec{v}_2 = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k}$ . Kohtaavatko valonsäteet toisensa?

b) Laivan polttoainekulut tunnissa ovat verrannolliset nopeuden kuutioon. Laivan muut kulut ovat 12 000 mk tunnissa. Nopeudella 20 km/h polttoainekulut ovat 1500 mk/h. Millä nopeudella matka Helsingistä Turkuun on kokonaiskuluiltaan mahdollisimman edullinen?

8. Kemistä klo 15.12 lähtenyt juna kohtaa Muurolassa Rovaniemeltä klo 16.00 lähteneen junan ja on perillä Rovaniemellä klo 16.40. Vastaantullut juna on puolestaan Kemissä klo 17.22. Kuinka paljon kello on junien kohdatessa ja kuinka kaukana Muurola on Kemistä, kun Kemin ja Rovaniemen välimatka on 114 km?

9. a) Henkilöt A ja B käyvät päivittäin samassa kahvilassa. Kumpikin saapuu kahvilaan sattumanvaraiseen aikaan klo 9.00 ja 10.00 välillä ja viipyy siellä 15 minuuttia. Mikä on todennäköisyys sille, että he ovat kahvilassa tiettyinä päivinä samalla hetkellä?

b) Tutki, millä tarkkuudella likimääräinen yhtälö

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$$

pätee, kun  $0 \leq x \leq 0,1$ .

10. Missä  $\mathbf{R}$ :n osajoukossa  $A$  funktio  $f$ :

$$f(x) = \ln(3(1 - e^{-x}))$$

voidaan määritellä? Osoita, että  $f$  on  $A$ :ssa aidosti kasvava. Mikä on  $A$ :n kuva  $f(A)$  kuvauksessa  $f$ ? Muodosta  $f$ :n käänteisfunktio  $f^{-1}$ . Missä joukossa  $B$  se puolestaan voidaan määritellä ja mikä on  $f^{-1}(B)$ ? Laske  $f'(x)$  ja  $(f^{-1})'(y)$  ja totea, että niiden tulo vastinpisteissä on  $= 1$ . Piirrä samaan koordinaatistoon käyrät  $y = f(x)$  ja  $y = f^{-1}(x)$ .

Tehtävissä 2, 5, 6, 8 ja 9 on kussakin kolme vaihtoehtoa, joista saa suorittaa vain yhden. Vaihtoehto c) on tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille, mutta sen saa valita kuka tahansa.

1. Kuinka paljon mehutiivistettä ja kuinka paljon vettä tarvitaan, kun niitä on sekoitettava suhteessa 1 : 3 ja halutaan 6,0 litraa mehua?
2. a) Murtolukuja ei pidä laskea yhteen seuraavasti:  $\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3+a}{2+4}$ . Millä  $a$ :n arvolla kuitenkin saadaan oikea tulos?  
  
b) Sokerijuurikkaassa on 18 % sokeria. Kuinka paljon sokerijuurikkaita tarvitaan valmistettaessa 10 tonnia sokeriliuosta, jonka sokeripitoisuus on 10 %?  
  
c) Mukin sisäkorkeus on 7,0 cm ja läpimitta samoin 7,0 cm. Mikä on mukin vetoisuus?
3. Valokuvanegatiivin koko on 24 mm x 36 mm. Negatiivista tehdyn suurennoksen pitempi sivu on 15 cm. Laske suurennoksen pinta-ala.
4. Suomalaisten veriryhmäjakauma on seuraava: A 44 %, B 17 %, AB 8 % ja O 31 %. Millä todennäköisyydellä puoliset kuuluvat samaan veriryhmään?
5. a) Erään oppilaitoksen kustannustaso ylittää normitason 21 prosentilla. Kuinka monta prosenttia kustannuksista on leikattava vuosittain, jotta oppilaitoksen kustannukset saavuttaisivat normin kolmessa vuodessa? Vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.  
  
b) Luokkahuoneesta, joka on 8 m pitkä, 8 m leveä ja 2,7 m korkea, haluttaisiin tehdä auditorio, jonka lattia nousisi portaittain (portaan korkeus 16 cm). Miksi jo 6-portainen auditorio osoittautuu mahdottomaksi?  
  
c) Kalatalouden keskusliiton julkaisussa on mainintoja eri-ikäisten haukien pituuksista. Jos kasvuolot ovat hyvät, on vuoden ikäisen hauen pituus meillä 15 cm, 3-vuotiaan 37 cm, 4-vuotiaan 47 cm, 5-vuotiaan 52 cm, 6-vuotiaan 60 cm, 7-vuotiaan 70 cm ja 8-vuotiaan 76 cm. Piirrä hauen pituutta kuvaava käyrä. Minkälainen kasvumalli näyttäisi sopivan parhaiten hauen pituudelle? Kuinka pitkä olisi tämän mallin mukaan hauki 2-vuotiaana ja 12-vuotiaana?
6. a) Laske integraali  $\int_0^a (ax - a)dx$  ja määritä ne  $a$ :n arvot, joilla integraalin arvo on nolla.  
  
b) Viljelmässä olevien bakteerien massa on 0,50 g. Tämä kymmenkertaistuu vuorokaudessa. Kuinka pitkän ajan kuluttua bakteerien massa on jo 150 g?  
  
c) Kulutus- ym. tottumukset liittyvät ikäkauteen. Tutkimusta varten valittiin viisi ikäluokkaa, joista ensimmäisen muodostavat 1-vuotiaat ja viimeisen 81-vuotiaat. Miten luokat valittiin, kun ikäporrastus suoritetaan 1) lineaarisen mallin (aritmeettisen lukujonon) mukaan, 2) eksponentiaalisen mallin (geometrisen lukujonon) mukaan?

KÄÄNNÄ !

7. Erään tuotteen hinta voidaan asettaa välille 150 mk/yksikkö ... 400 mk/yksikkö. Jos hinta on  $x$  mk/yksikkö, niin kuukaudessa arvioidaan myytävän keskimäärin  $72000 - 180x$  yksikköä. Millä yksikkö hinnalla saataisiin suurin myyntitulo?

8. a) Välillä  $[1,10]$  funktio  $f$  määritellään seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 6 - (x - 2)^2, & \text{kun } 1 \leq x < 5, \\ -x^2 + 16x - 58, & \text{kun } 5 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Tutki, onko funktio  $f$  jatkuva, sekä määritä funktion suurin ja pienin arvo.

- b) Vuonna 1992 löydettiin entistä suurempi alkuluku (jaoton luku),  $2^{756839} - 1$ . Osoita, että tällöin luku  $2^{756839} + 1$  ei voi olla alkuluku. Millä luvulla se on jaollinen?

- c) Tontille on rakennettu kolme taloa eri aikoina: ensimmäinen vuonna 1959 rakennettu oli tullut maksamaan 55 milj. silloista markkaa, v. 1965 rakennettu 1,2 milj. mk ja viimeinen v. 1980 rakennettu 2,2 milj. mk. Mikä näistä rakennuksista oli tullut nykyrahassa laskien halvimmaksi ja mikä kalleimmaksi? Oheisena eräs rahanarvon muunnostaulukko.

Vuosi Kerroin

|      |       |
|------|-------|
| 1959 | 0.088 |
| 1960 | 0.085 |
| 1961 | 0.083 |
| 1962 | 0.080 |
| 1963 | 7.64  |
| 1964 | 6.92  |
| 1965 | 6.61  |
| 1966 | 6.36  |
| 1967 | 6.04  |
| 1968 | 5.55  |
| 1969 | 5.42  |
| 1970 | 5.28  |
| 1971 | 4.97  |
| 1972 | 4.63  |
| 1973 | 4.14  |
| 1974 | 3.53  |
| 1975 | 3.00  |
| 1976 | 2.62  |
| 1977 | 2.33  |
| 1978 | 2.16  |
| 1979 | 2.02  |
| 1980 | 1.81  |
| 1981 | 1.61  |
| 1982 | 1.48  |
| 1983 | 1.36  |
| 1984 | 1.27  |
| 1985 | 1.20  |
| 1986 | 1.16  |
| 1987 | 1.12  |
| 1988 | 1.07  |
| 1989 | 1.00  |

9. a) Kirjoissa käytetään ISBN-numerointia, joka koostuu maatunnuksesta (951 on Suomen tunnus), kustantajan ja teoksen numerosta (ks. viereistä esimerkkiä). Lopussa on tarkistusmerkki, numero tai X (=10), joka määräytyy seuraavasti: Numeroista ensimmäinen kerrotaan 1:llä, toinen 2:lla, kolmas 3:lla jne., yhdeksäs 9:llä ja saadut tulot lasketaan yhteen. Kun saatu summa jaetaan 11:llä, on jakojäännös tarkistusmerkinä. Eräässä kirjatilauksessa oli yksi epäselvä merkki. Tutki, mikä numero kuului ? :n paikalle tilauksessa ISBN 951-0-?5669-8.



- b) EAN-juovakoodin (kuva edellä) viimeinen tarkistusnumero määräytyy seuraavasti: Kun luvut kerrotaan laidasta laitaan vuorotellen 1:llä ja 3:lla ja tulot lasketaan yhteen (siis kuvan esimerkissä  $1 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + \dots + 1 \cdot 1 = 110$ ), saadaan nollaan päättyvä luku. Osoita, että summa ei pääty nollaan, jos yksi luku on luettu väärin. Paljastaako menetelmä aina kahden vierekkäisen luvun vaihtumisen?

- c) Omaisuuden arvo määräytyy perintöverotuksessa kuolinhetken mukaan. Samasta talosta, jossa vainaja oli omistanut  $60 \text{ m}^2$  huoneiston, myytiin samanlainen huoneisto 1 vuosi 4 kk myöhemmin hintaan  $6583 \text{ mk/m}^2$ . Tänä aikana olivat huoneistojen hinnat kyseisellä alueella laskeneet tilastojen mukaan 26 %. Minkä arvoiseksi katsottiin vainajan omistama huoneisto, ja kuinka suuri oli perintövero, kun veroprosentti oli 13 %?

10. Jos neliön sivujen keskipisteet yhdistetään neliön kärkiin, syntyy keskelle säännölliseltä näytävä 8-kulmio. Osoita laskemalla, että se ei kuitenkaan ole säännöllinen.

Tehtävissä 3, 4, 5, 7 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

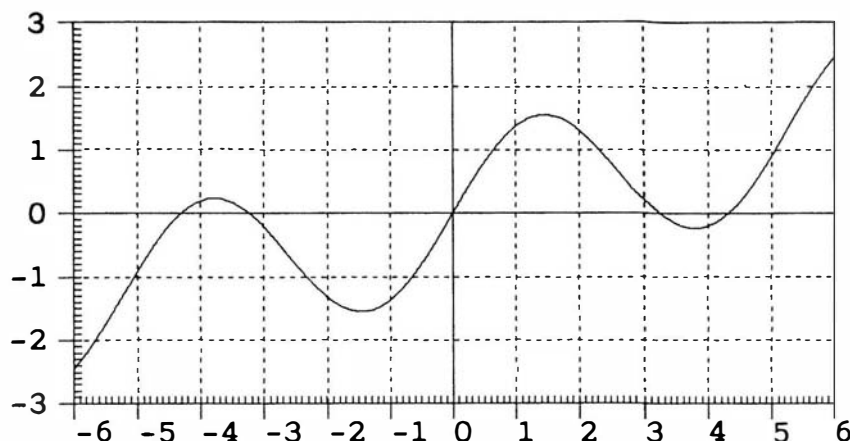
1. Mitkä kokonaisluvut toteuttavat yhtälön  $x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0$  ?
2. Kumpi luvuista  $2 + 3x$  ja  $3 + 2x$  on suurempi, kun  $x > 1$  ?
3. a) Ratkaise yhtälö  $10^4 \cdot (x^2 - 1) = x - 1$ .  
 b) Esitä muodossa  $Ax + By + C = 0$  se suora, jonka origosta alkava vektori  $2\vec{i} - \vec{j} + t(\vec{i} + 2\vec{j})$  piirtää, kun  $t$  saa kaikki reaaliarvot.
4. a) Kun maan  $A$  rahayksikkö devalvoidaan, kallistuu maan  $B$  rahayksikkö  $A$ :n rahayksikössä lausuttuna  $p$  % ( $p > 0$ ). Silloin  $A$ :n rahayksikkö halpenee  $B$ :n rahayksikössä lausuttuna  $q$  %. Johda yhtälö  $p$ :n ja  $q$ :n välille. Laske yhtälöstä  $p$ :n arvoja 5, 10 ja 30 vastaavat  $q$ :n arvot.  
 b) Piirrä käyrä  $y = x - |x - 2|$  ja ratkaise sitä apuna käyttäen yhtälö  $3x - 3|x - 2| = x^2$ . Tarkat arvot.
5. a) Millä vakion  $p$  arvoilla polynomi  $2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$  on koko  $\mathbb{R}$ :ssä aidosti kasvava?  
 b) Laske  $\int_0^1 (1 - x^2)^r x \, dx$ , kun  $r$  on positiivinen vakio.
6. Tavaraerässä on 2 % virheellisiä yksilöitä. Millä todennäköisyydellä umpimähkään otetussa 20 kappaleen näytteessä on enintään kaksi virheellistä yksilöä?
7. a) Johda  $n$ :nnen derivaatan lauseke funktiolle  $f: f(x) = xe^x$ .  
 b) Määritä se pisteen  $(2, 3)$  kautta kulkevista suorista, joka positiivisten koordinaattiakselien kanssa rajoittaa mahdollisimman pienen kolmion. Mikä on tämän kolmion ala?
8. Osoita, että  $(1 + x) \ln x + 2(1 - x) \leq 0$ , kun  $0 < x \leq 1$ .
9. Neliön muotoiseen kehikkoon, jonka sivu on  $8r$ , asetetaan  $r$ -säteisiä palloja toistensa viereen 16 kappaletta. Yhdeksään pallojen väliin jäävään kuoppaan asetetaan samoin  $r$ -säteiset pallot ja näiden yhdeksän pallon päälle edelleen neljä palloa ja näiden päälle yksi pallo. Mikä on syntyneen pallopyramidin korkeuden suhde pallon halkaisijaan  $2r$  ?
10. a) Määritä kaikki funktiot  $f$ , jotka ovat koko  $\mathbb{R}$ :ssä derivoituvia ja toteuttavat ehdon  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  kaikilla arvopareilla  $(x, y)$ .  
 b) Neliön muotoisen ruohokentän kulmaan kiinnitetään lampaan liekaköysi siten, että lammas pääsee syömään 90 % kentän ruohosta. Kuinka monta prosenttia (kahden numeron tarkkuudella) köyden pituus on kentän lävistäjän pituudesta? Tehtävä vaatii sopivalle tuntemattomalle johdetun yhtälön numeerisen ratkaisemisen.

Tehtävissä 2, 3, 4, 6 ja 10 on kussakin kolme vaihtoehtoa, joista saa suorittaa vain yhden. Vaihtoehto c) on tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille, mutta sen saa valita kuka tahansa.

1. Kun matkalipun hintaa korotettiin 5,0 %, matkustajien määrä väheni 5,0 %. Kuinka monella prosentilla tällöin lisääntyivät tai vähentyivät liikennöitsijän lipputulot?
2. a) Määritä se funktion  $f(x) = 6x^2 - 4x + 2$  integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen  $(-1, 2)$  kautta.  
 b) Palkansaaajan ennakonpidätysprosentti oli 42. Kuinka paljon häneltä oli pidätetty veroennakkoa, kun hän sai pidätyksen jälkeen 5084,00 mk?  
 c) Kolmesta vahakuutiosta, joiden särmät ovat 3 cm, 4 cm ja 5 cm, leivotaan yksi ainoa kuutio. Laske tämän särmän pituus. Kuinka monta prosenttia tässä toimituksessa kokonaispinta-ala muuttuu?
3. a) Määritä suorien  $x - 2y + 4 = 0$  ja  $4x + 7y - 12 = 0$  leikkauspisteen etäisyys origosta.  
 b) Juhlasalissa on kaksi ovea. Jos vain ovea A käytetään, tyhjenee sali 18 minuutissa, ja jos vain ovi B on käytössä, tarvitaan 12 minuuttia. Missä ajassa sali tyhjenee, jos molemmat ovet ovat käytössä?  
 c) Vuonna 1981 oli maamme korkeakouluissa jokaista opettajaa kohti keskimäärin 13 opiskelijaa. Vuoteen 1991 mennessä oli opiskelijoiden määrä kasvanut 37,3 % ja opettajien määrä 20,6 %. Kuinka monta opiskelijaa oli vuonna 1991 jokaista opettajaa kohti?
4. a) Herra Hoppulainen oli autollaan matkalla kokoukseen. Kun hän oli vielä 30 km päässä kokouspaikasta, hän laski myöhästytävänsä kokouksen alusta 15 minuuttia, mikäli hän jatkaa korkeimmalla sallitulla nopeudella 80 km/h. Kuinka paljon hän myöhästyi, jos hän joutuisi ajamaan vain nopeudella 70 km/h, ja kuinka suurella nopeudella hänen pitäisi ajaa, jos hän aikoi olla ajoissa perillä?  
 b) Ratkaise yhtälö  $\log(x - 4) + \log(x + 5) = \log 2 + \log 5$  ja tarkista vastaus.  
 c) Luvuista 100, 101, ..., 999 valitaan umpimähkään yksi. Kuinka suurella todennäköisyydellä se on palindromi eli sellainen luku kuten 121, joka etu- ja takaperin luettuna on sama?
5. Puun runkoa pidetään suorana ympyräkartiona. Puun korkeus on 14 m ja tyven läpimitta 24 cm. Vuodessa puu kasvaa pituutta 30 cm, ja sen tyven läpimitta suurenee 4 mm. Kuinka monta dm<sup>3</sup> puun tilavuus tällöin kasvaa viidessä vuodessa?
6. a) Origosta alkavan vektorin  $\overrightarrow{OA} = 12\vec{i} + 15\vec{j}$  kärjestä A lähtien piirretään sellainen 13 yksikön pituinen vektori  $\overrightarrow{AB}$ , että kulma  $AOB$  on mahdollisimman suuri. Kuinka suuri on tällöin B:n etäisyys origosta?  
 b) Funktio  $f$  määritellään seuraavasti:  $f(x) = x^3 - x + 1$ , kun  $x \leq 1$ , ja  $f(x) = 2x + 1$ , kun  $x > 1$ . Tutki, onko funktio  $f$  jatkuva ja onko se derivoituva.  
 c) Kuulantyöntäjän kilpailutulokset ovat noudattaneet normaalijakaumaa. Keskiarvo on 18,70 m ja hajonta 0,30 m. Maailmanmestaruuskilpailussa hän työntää kuulaa 19,52 m. Poikkeaaako tulos erittäin merkittävästi aiemmista tuloksista (eli onko se 99,9 % luottamusvälin ulkopuolella)?

KÄÄNNÄ!

7. Oheisena on väliä  $-6 \leq x \leq 6$  vastaava osa erään funktion kuvaajasta  $y = f(x)$ . Määritä kuvion perusteella funktion nollakohdat; niistä pienin olkoon  $x_1$ . Määritä edelleen derivaatan arvo  $f'(x_1)$ . Vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.



8. Väritelevisiolupamaksu on 846 mk vuodessa, jos se maksetaan yhdessä erässä. Kahdessa erässä maksettaessa maksuerä on 426 mk ja neljässä erässä maksettaessa 216 mk. Maksettaessa useammassa erässä joutuu siten maksamaan hieman enemmän, mutta vastaavasti vielä maksamattoman osuuden 846 markasta voisi pitää kasvamassa korkoa. Minkä korkoprosenttien mukaan laskettuna korot kattaisivat suuremmat maksut?
9. Tuhohyönteisten määrä viljelmällä kasvoi viikossa  $p$  %. Joka toinen viikko levitettiin torjunta-ainetta, joka vähensi tuhohyönteisten määrää  $q$  %. Kun oli kulunut kahdeksan viikkoa, oli hyönteisten määrä sama kuin aluksi. Lausu  $q$   $p$ :n avulla ja laske  $q$ , kun  $p = 60$ .
10. a) Epäyhtälöiden  $\frac{x}{2} + 1 < y < (3 - x)(x + 2)$  määrittelemän alueen jakaa  $y$ -akseli kahteen osaan. Määritä näistä pienemmän alan suhde isomman alaan.
- b) Määritä funktion  $\frac{9}{x^2 + \pi x + 6}$  saamista arvoista suurin ja pienin, kun  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ .
- c) Tilastokeskuksen työvoimatutkimuksen mukaan palkansaaajia ja yrittäjiä oli vuosina 1960 – 1991 tuhansina henkilöinä seuraavat määrät.

| Vuosi | Palkansaaajia | Yrittäjiä |
|-------|---------------|-----------|
| 1960  | 1340          | 757       |
| 1970  | 1626          | 500       |
| 1980  | 1930          | 379       |
| 1985  | 2077          | 360       |
| 1990  | 2108          | 359       |
| 1991  | 2000          | 339       |

Havainnollista tilastotiedot diagrammina samassa kuviossa. Sovita kuvioon havaintopisteisiin mahdollisimman hyvin sopivat (regressio)suorat ja esitä tämän aineiston pohjalta ennuste, kuinka paljon palkansaaajia ja yrittäjiä Suomessa on vuonna 1994.

YLIOPPILASTUTKINTO 30.3.1994 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 3, 4, 6 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $|2x - 1| = |3x + 2|$ .
2. a) Polynomin  $P(x) = ax^3 - 31x^2 + 1$  eräs nollakohta on  $x = 1$ . Määritä  $a$  ja ratkaise tämän jälkeen yhtälö  $P(x) = 0$ .  
  
b) Puu, jonka korkeus oli 30 metriä, taittui 10 metrin korkeudelta, ja latvaosa kaatui maahan irtoamatta tyviosasta. Kuinka kaukana latva osui maahan?
3. a) Ratkaise yhtälö  $2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$ .  
  
b) Teollisuustuotannon osuus kansantuotteesta on 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia teollisuustuotannon tulisi kasvaa, jotta sen osuus kansantuotteesta nousisi 30 prosenttiin, jos muilla osa-alueilla ei tapahdu muutoksia?
4. a) Sadevesimittarina käytettiin kärjellään seisovaa ympyräkartiota, jonka korkeus oli 15 cm ja pohjan säde 20 cm. Sateen jälkeen mittarin vedenpinta oli 7 cm korkeudella. Kuinka monta millimetriä oli sademäärä?  
  
b) Määritä kompleksiluvut  $z = x + iy$ , joille  $z^2 = -i$ .
5. Erästä peliä pelaa kolme yhtä taitavaa pelaajaa A, B ja C. Kukin pelaaja saa voitosta pisteen, ja lopullinen voittaja on se pelaaja, joka ensiksi saa kolme pistettä. A voittaa ensimmäisen pelin, B toisen ja kolmannen. Mikä on todennäköisyys sille, että C on lopullinen voittaja?
6. a) Laske  $\int_{-\frac{\omega}{k}}^{-\frac{\omega}{k} + \frac{\pi}{k}} k \sin(kx + \omega) dx$ , kun  $k \neq 0$ . Miten lausekkeen arvo riippuu vakiosta  $k$ ?  
  
b) Neliön muotoista tonttia esittävät  $xy$ -koordinaatistossa epäyhtälöt  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 10$ . Tontilla on neljä rakennusta, joiden pohjat ovat
 
$$1 \leq x \leq 4, \quad 1 \leq y \leq 4; \qquad 6 \leq x \leq 9, \quad 1 \leq y \leq 4;$$

$$6 \leq x \leq 9, \quad 6 \leq y \leq 9 \qquad \text{ja} \qquad 1 \leq x \leq 4, \quad 6 \leq y \leq 9.$$

Muodosta lyhin tie tontin kulmasta  $(0,0)$  vastakkaiseen kulmaan.

KÄÄNNÄ !

7. a) Jana  $AB$ , jonka pituus on 5, liikkuu siten, että sen päätepiste  $A = (0, y)$  on  $y$ -akselilla ja päätepiste  $B = (x, 0)$  negatiivisella  $x$ -akselilla. Aikavälillä  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  on  $y$  ajan  $t$  funktio:  $y = y(t) = 5 \sin t$ . Millä välillä piste  $B$  liikkuu, ja mikä on sen nopeus ajan  $t$  funktiona?

b) Vektorin  $\bar{v} = p\bar{i} + p\bar{j} + z\bar{k}$  pituus on 1. Määritä  $p$  siten, että  $\bar{v}$  yhdessä vektoreiden  $2p\bar{i}$  ja  $2p\bar{j}$  kanssa virittää tilavuudeltaan mahdollisimman suuren tetraedrin. Mikä on tämän tetraedrin tilavuus?

8. Lasista valmistettu maljakko on muodoltaan pyörähdyskappale, joka syntyy suorien  $y = 4$  ja  $y = -4$ , paraabelin  $x = 1 + y^2$  sekä  $y$ -akselin rajoittaman alueen pyörähtäessä  $x$ -akselin ympäri. Maljakon pohjan halkaisija on 8,0 cm. Kuinka paljon maljakko painaa, kun lasin tiheys on  $3600 \text{ kg/m}^3$ ?

9. Osoita, että lausekkeella

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

missä  $x^2 + y^2 > 0$ , on vakioarvo kullakin origosta lähtevällä säteellä. Mikä tämä vakioarvo on säteellä, joka muodostaa kulman  $\varphi$  positiivisen  $x$ -akselin kanssa, ja minkä rajojen välissä tämä vakioarvo vaihtelee? Voiko vakioarvo olla sama kahdella eri säteellä?

10. Pisteen  $(1, 2)$  kautta kulkee käyrä  $y = f(x)$ , jonka mielivaltaiseen pisteeseen  $(x, f(x))$  piirretty normaali leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $(\frac{x}{3}, 0)$ . Määritä käyrän yhtälö.



YLIOPPILASTUTKINTO 21.9.1994 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 5, 8, 9 ja 10 on kussakin kolme vaihtoehtoa, joista saa suorittaa vain yhden. Vaihtoehto c) on tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille, mutta sen saa valita kuka tahansa.

1. Minkä positiivisen luvun neliöjuuri on luku  $\sqrt{5} - 2$  ? Anna vastaus sekä tarkkana arvona että likiarvona kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
2. a) Autoilija, jolla oli 70 % bonus (eli alennus vakuutusmaksuista), maksoi liikennevakuutusmaksua 642,80 mk vuodessa. Kuinka paljon hän olisi joutunut maksamaan, ellei hänellä olisi ollut lainkaan bonuksia?  
  
b) Auton lähivalot on suunnattu siten, että 60 cm korkeudelta lähtevän valokiilan yläreuna laskee 5 metrin matkalla 5 cm. Kuinka kauaksi lähivalot tällöin valaisevat tietä?  
  
c) Lausu 5-järjestelmän luku 20314 10-järjestelmässä.
3. Nelikulmion kärjet ovat pisteissä  $A = (-2, -2)$ ,  $B = (6, -2)$ ,  $C = (4,4)$  ja  $D = (-4,6)$ . Laske nelikulmion ala.
4. Työmatkaan kului aamuruuhkassa 30 minuuttia. Paluumatka tehtiin 22 minuutissa nopeudella 80 km/h. Millä nopeudella työmatka tehtiin aamulla?
5. a) Määritä ne kaksi vakion  $a$  arvoa, joilla paraabeli  $y = (x - a)^2 - 1$  kulkee pisteen  $(2,3)$  kautta, ja piirrä nämä paraabelit samaan koordinaatistoon.  
  
b) Laske vektorin  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  pituus, kun  $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$  ja  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ .  
  
c) Tallettaja sijoitti 40 000 mk puoleksi vuodeksi verolliselle tilille, josta maksettiin 7,5 % korko. Saamastaan korosta hän joutui maksamaan 25 % lähdeveron ja 20 mk muita kuluja. Kuinka paljon tallettaja sai tuottoa rahoilleen?
6. GSM-puhelinpalveluja tarjotaan kahden vaihtoehtoisen hinnoittelun mukaisesti:

| Vaihtoehto | Perusmaksu | Puhelumaksu |
|------------|------------|-------------|
| 1          | 20 mk/kk   | 1,92 mk/min |
| 2          | 61 mk/kk   | 1,74 mk/min |

Kuinka monta minuuttia kuukaudessa on vähintään käytettävä GSM-puhelinta, jotta vaihtoehto 2 tulisi edullisemmaksi käyttäjälle?

7. Erään mittauksen antamat arvot jakautuvat normaalisti keskiarvon 100 ympärille siten, että välillä  $[97, 103]$  arvoista on 86 %. Kuinka suurella todennäköisyydellä mittausarvo on yli 105?
8. a) Jatkuvan funktion  $f$  arvo pisteessä  $x = 0$  on 100, ja funktion derivaatta  $f'(x)$  on 5 välillä  $]0, 10[$  sekä 1 välillä  $]10, 20[$ . Laske  $f(20)$ .  
  
b) Kartalla, jonka yksikkönä on kilometri, erästä päätieta esittää suora  $2x - 3y + 4 = 0$  ja siitä erkanevaa paikallistietä suora  $x + 2y - 6 = 0$ . Missä pisteessä tiet eroavat? Kuinka kaukana tienhaarasta on paikassa  $(4, 1)$  oleva talo?

KÄÄNNÄ !

c) Suurimpien toimialojen mainontaan käytettiin vuonna 1992 rahaa seuraavasti:

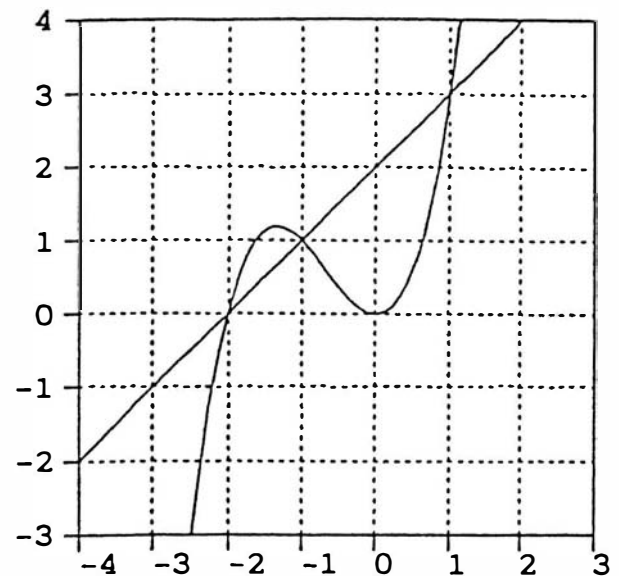
| Ala                   | Milj. mk | Muutosprosentti vuodesta 1990 |
|-----------------------|----------|-------------------------------|
| Kauppa                | 1409     | -4,4                          |
| Moottoriajoneuvot     | 301      | -17,5                         |
| Elintarvikkeet        | 300      | + 3,5                         |
| Huvit                 | 187      | + 2,7                         |
| Matkailu ja liikenne  | 187      | -6,3                          |
| Julkiset ym. palvelut | 175      | -2,9                          |
| Asunnot               | 133      | -16,2                         |
| Lääkkeet              | 98       | + 2,0                         |
| Pankit                | 92       | -13,7                         |
| Rakennustarvikkeet    | 87       | -28,0                         |

Laske mainittujen alojen mainontaan käytetyt rahamäärät vuonna 1990. Miten näiden alojen suuruusjärjestys on muuttunut?

9. a) Viereisessä kuviossa oleva suora ja käyrä  $y = x^2(x+2)$  rajoittavat kaksi aluetta. Laske niistä suuremman ala.

b) Puolisuunnikkaan ABCD yhdensuuntaisista sivuista on  $AB = 8$  ja  $DC = 6$  sekä toinen erisuuntaisista sivuista  $DA = 5$ . Kuinka pitkä sivu on BC, kun puolisuunnikkaan ala on 28? (Huomaa kaksi mahdollisuutta.)

c) Toipilaana oleva henkilö kävelee ensimmäisenä päivänä vain 50 metriä mutta pidentää sitten kävelymatkaansa joka päivä 100 metrillä. Kuinka pitkän matkan hän tulee kävelleeksi 30 ensimmäisen päivän aikana?



10. a) Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden  $y = x^3$  ja  $y = (x-1)^2$  kuvaajat. Lue kuviosta, millä  $x$ :n arvolla käyrät leikkaavat toisensa. Tarkenna laskemalla yhtälön  $x^3 = (x-1)^2$  juuren likiarvoa 0,01:n tarkkuuteen.

b) Olkoon  $\overline{ABC}$  kolminumeroinen luku, jonka numerot ovat  $A, B, C$ . Kun luvusta  $\overline{ABC}$  vähennetään kaksinumeroinen luku  $\overline{DE}$ , saadaan yksinumeroinen luku  $\overline{F}$ . Kun kirjaimet  $A, B, C, D, E$  ja  $F$  edustavat kukin eri numeroa, on tehtävällä 12 ratkaisua. Päättele, mitkä nämä ovat.

c) Vuosien 1962 ja 1981 välisenä aikana sosiaalimenojen osuus bruttokansantuotteesta (BKT) kasvoi Ruotsissa eksponentiaalisesti siten, että vuotuinen kasvu oli 6 %. Minä vuonna sosiaalimenojen osuus olisi ollut 100 % BKT:sta, kun se vuonna 1981 oli 34,2 %, ellei menojen kasvua olisi pysäytetty?

YLIOPPILASTUTKINTO 21.9.1994 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 4, 5, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $(\sqrt{1-2x} + 1)^2 = 16$ .
2. Tekokuut A ja B kiertävät maata ympyränmuotoisilla radoilla. A:n rata on 50 km pitempi kuin B:n rata. Kuinka paljon korkeammalla A on?
3. Laske funktion  $\sin 2x$  tarkka arvo, kun  $\sin x = -\frac{8}{17}$  ja  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .
4. a) Pyöreä putki, jonka poikkileikkauksen läpimitta on 10 cm, kulkee 3,0 m korkuisen huoneen lattian ja katon läpi muodostaen  $70^\circ$  kulman lattian kanssa. Mikä on huoneessa olevan putken osan tilavuus?  
 b) Missä  $xy$ -tason osissa on voimassa epäyhtälö  $xy - x - y + 1 < 0$  ?
5. a) Millä  $a$ :n arvoilla yhtälöllä

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x - (a^2 - a) = 0$$

on enemmän kuin kaksi ratkaisua?

- b) Joukkue A johtaa koripallo-ottelua yhdellä pisteellä peliajan päättyessä. Joukkue B on saanut kuitenkin vielä kolme vapaaheittoa, joista kustakin saa sen onnistuessa yhden pisteen. Kunkin vapaaheiton onnistumistodennäköisyys on 75 %. Millä todennäköisyydellä joukkue B on voittanut ottelun vapaaheittojen jälkeen?
6. a) Jos kauppias alentaa tuotteen hintaa  $p$  %, tuotetta myydään  $1,6p$  % enemmän. Mikä  $p$ :n arvo antaa kauppiaalle suurimman myynnin arvon? Millä  $p$ :n arvolla myynnin arvo on sama kuin alkuperäisellä hinnalla?  
 b) Määritä sen suoran kulmakerroin, joka puolittaa  $x$ -akselin ja suoran  $y = -2x$  välisen tylpän kulman (tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo).
7. a) Aluetta rajoittavat koordinaattiakselit, suora  $x = 4$  ja käyrä  $y = 1 + 15(x + 1)^{-2}$ . Jaa alue kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan.  
 b) Kaksi järveä on yhdistettävä mahdollisimman lyhyellä kanavalla. Määritä kanavan alku- ja loppupisteet koordinaatistossa, jossa järvien välisen kannaksen kapein kohta voidaan esittää muodossa  $-(x + 1) \leq y \leq x^2$ ,  $-2 \leq x \leq 1$ .
8. Määritä kaikki kokonaislukuparit  $(m, n)$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$(m + 2n + 1)(m - n + 2) = 5.$$

KÄÄNNÄ !

9. a) Suppenevan geometrisen sarjan summa on  $\frac{5}{2}$ . Sarjan termien neliöiden muodostaman sarjan summa on  $\frac{25}{6}$ . Määritä sarjan termien kuutioiden muodostaman sarjan summa.
- b) Säätiö, jonka pääoma vuoden 1993 alussa oli 10 miljoonaa markkaa, jakaa joka vuoden lopussa apurahoina puolet pääoman tuotosta, joka on 10 % vuodessa. Loput tuotosta lisätään pääomaan. Minkä vuoden lopussa pääoma on kaksinkertaistunut, ja kuinka paljon apurahoja on siihen mennessä jaettu?
10. Olkoon  $P$  polynomi, jonka asteluku on  $\geq 2$ . Osoita: Reaaliluku  $a$  on yhtälölle  $P(x) = 0$  vähintään kaksinkertainen juuri, jos ja vain jos  $a$  on yhtälöiden  $P(x) = 0$  ja  $P'(x) = 0$  yhteinen juuri.

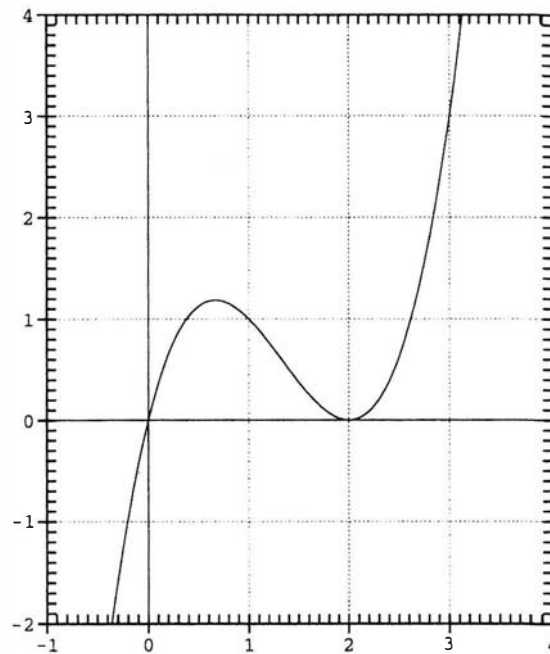
YLIOPPILASTUTKINTO 24.3.1995 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 2, 3, 5 ja 7 on kussakin kolme vaihtoehtoa, joista saa suorittaa vain yhden. Vaihtoehto c) on tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille, mutta sen saa valita kuka tahansa.

1. a) Ratkaise epäyhtälö  $\frac{2}{3}(x + \frac{1}{4}) < \frac{1}{5}(x - \frac{1}{4})$ .  
 b) Millä  $x$ :n arvoilla tulo  $3x^2(x + 4)$  saa negatiivisia arvoja?  
 c) Eräällä laivalinjalla matkustajamäärä väheni 23 % edellisvuodesta. Kuinka monta prosenttia matkustajamäärän pitäisi kasvaa, jotta päästäisiin entiseen määrään?
2. a) Millä vakion  $p$  arvolla yhtälön  $x(x + p) = 3x$  yhtenä juurena on luku  $-3$ , ja mitkä ovat tällöin yhtälön juuret?  
 b) Laske  $\int_{-2}^2 (7x^6 - 3x^2) dx$ .  
 c) Henkilö osti viikon alussa 4,20 mk:lla litran maitotölkin, josta hän ehti käyttää 8 dl ennen maidon happanemista. Seuraavalla viikolla hän osti kaksi puolen litran maitotölkkiä 2,50 mk:lla kappale käyttäen kaiken maidon. Kummalla viikolla käytetty maito tuli hänelle edullisemmaksi ja kuinka monta prosenttia?
3. a) Laske sen kolmion ala, jota rajoittavat  $y$ -akseli ja suorat  $y = -x + 4$  ja  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .  
 b) Kuutio jaetaan kuuteenkymmeneenneljään keskenään samansuuruiseen kuutioon. Mikä on näin muodostuneiden pikkukuutioiden särmän pituus (cm), kun alkuperäisen kuution tilavuus oli 1,00 litraa?  
 c) Planeetta kiertää auringon ajassa, joka on verrannollinen lukuun  $R^{3/2}$ , missä  $R$  on planeetan keskietäisyys auringosta. Maapallon vuosi, ts. kiertoaika auringon ympäri, on 365 vuorokautta ja maan etäisyys auringosta on keskimäärin 150 miljoonaa kilometriä. Kuinka pitkä on pikkuplaneetta Nevanlinnan vuosi, kun sen etäisyys auringosta on keskimäärin 468 miljoonaa kilometriä?
4. Määritä suoran  $y = 3x - 2$  ja paraabelin  $y = x^2 - 2$  rajoittaman alueen ala.
5. a) Määritä ne käyrän  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  pisteet, joihin piirretyt käyrän tangentit leikkaavat  $x$ -akselin  $45^\circ$  kulmassa.  
 b) Rantakaavassa määrätään, että 100 m lähemmäksi rantaa ei saa rakentaa. Kaava-alueella on tasasivuisen kolmion muotoinen saari, jonka pinta-ala on 5,00 ha. Saako sille rakentaa?  
 c) Erääseen oppilaitokseen valittiin oppilaita seuraavasti. Osastolle A valittiin tyttöjä 300 hakijasta 48 ja poikia 20 hakijasta 3 ja osastolle B tyttöjä 20 hakijasta 4 ja poikia 600 hakijasta 114. Osoita, että kummallakin osastolla tyttöjen hyväksymisprosentti oli 1 prosenttiyksikön verran suurempi mutta että siitä huolimatta koko oppilaitoksessa poikien hyväksymisprosentti oli suurempi kuin tyttöjen.

KÄÄNNÄ!

6. Puoliympyrän muotoinen paperiarkki kierretään kartion vaipaksi siten, että  $1/4$  paperista kiertyy edellisen kierroksen päälle. Määritä kulma  $\alpha$ , jonka kartion akseli muodostaa sivuviivan kanssa, ja huippukulma  $2\alpha$ , molemmat  $0,01^\circ$  tarkkuudella.
7. a) Mikä oli korkokanta, kun 50 000 mk:n talletuksesta, jolle maksettiin vuosittain korkoa korolle, sai neljän vuoden kuluttua nostettaessa 64 082 mk ?
- b) Vektorit  $\vec{u} = 12\vec{i} + 5\vec{j}$  ja  $\vec{v} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$  ovat suunnikkaan sivuina. Määritä lävistäjävektorit  $\vec{u} - \vec{v}$  ja  $\vec{u} + \vec{v}$  ja laske niiden välinen kulma ja niiden pituuksien suhde.
- c) Pythagoralainen veljeskunta yritti osoittaa kaiken koostuvan kokonaisluvusta. Osoita, että ei ole olemassa sellaista kokonaislukua, joka itsellään kerrottuna antaa tuloksen 12 345 673 076 882.



8. Yllä olevassa kuvassa on erään kolmannen asteen polynomifunktion kuvaaja. Määritä funktion lauseke ja laske ääriarvopisteiden koordinaatit.
9. Suomalaisista koululaisista on erään tilaston mukaan 5 % vasenkätisiä. Laske sen tapahtuman todennäköisyys, että 32 oppilaan luokassa on 4 vasenkätistä. Opastus: Käytä joko binomijakaumaa ( $p = 0,05$ ,  $n = 32$ ) tai normaalijakaumaa, missä  $\mu = np$  ja  $\sigma^2 = np(1 - p)$  ja tapahtumana  $3,5 < \underline{x} < 4,5$ .
10. Erästä talosta voidaan mennä uimarantaan joko kulkemalla ensin suoraa maantietä pitkin 2 400 m, kääntymällä sitten  $105^\circ$  vasempaan ja kulkemalla suoraa pikkutietä vielä 1 300 m tai sitten kulkemalla koko matka suoraan metsän läpi. Millä nopeudella pitäisi metsän läpi kulkea, jotta siihen menisi yhtä paljon aikaa kuin teitä pitkin kävellessä, kun nopeus tietä pitkin on 6,0 km/h?

Tehtävissä 3, 5, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise epäyhtälö  $2|2 - x| < \sqrt{x - 2}$ .
2. Laivat A ja B ajavat saman edestakaisen matkan niin, että A ajaa sekä meno- että tulomatkan 18 solmun nopeudella ja B ajaa menomatkan 20 solmun ja tulomatkan 16 solmun nopeudella. Kumpi laivoista kulkee edestakaisen matkan nopeammin? Kuinka monta prosenttia enemmän aikaa käyttää hitaampi laiva? Yksi solmu on 1,85 km/h.
3. a) Näytä, että jokaisella  $k = 1, 2, 3, \dots$  luku  $k^3 + k$  on parillinen.  
  
b) Kuutio jaetaan kuuteenkymmeneenneljään keskenään samansuuruiseen kuutioon. Mikä on näin muodostuneiden pikkukuutioiden särmän pituus (cm), kun alkuperäisen kuution tilavuus on 1,00 litraa?
4. Määritä suoran  $y = 3x - 2$  ja paraabelin  $y = x^2 - 2$  rajoittaman alueen ala.
5. a) Määritä ne käyrän  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  pisteet, joihin piirretyt käyrän tangentit leikkaavat  $x$ -akselin  $45^\circ$  kulmassa.  
  
b) Rantakaavassa määrätään, että 100 m lähemmäksi rantaa ei saa rakentaa. Kaava-alueella on tasasivuisen kolmion muotoinen saari, jonka pinta-ala on 5,00 ha. Saako sille rakentaa?
6. Kolmion kärjet ovat pisteissä  $(0,0,0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1, 0)$  ja  $(0, 1, 1)$ . Piirrä kuva kolmiosta  $xyz$ -koordinaatistoon. Kuinka suuri on kolmion pinta-ala?
7. a) Sijoittaja voi tallettaa pääoman 4,60 % korolla koko vuodeksi tai 4,40 % korolla puoleksi vuodeksi ja sitten kertyneen rahasumman  $p$  % korolla lopuksi vuotta. Jos kaikki prosentit  $p$  välillä  $[4,00 : 4,90]$  ovat yhtä todennäköisiä, niin mikä on todennäköisyys sille, että jälkimmäinen tapa on edullisempi?  
  
b) Funktioilla  $f$  ja  $g$  on jatkuvat derivaatat välillä  $[a, b]$ . Johda funktioille osittaisintegroitikaava

$$\int_a^b f'g dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'f dx.$$

KÄÄNNÄ!

8. Saari on ympyränmuotoinen ja sen halkaisija vuonna 1995 on 110 m. Pohja saaren ympärillä viettää tasaisesti 72 cm vaakasuorasti mitatulla kymmenellä metrillä. Maa kohoaa 38 cm sadassa vuodessa. Johda lauseke  $A(t)$  saaren pinta-alalle (pinta-ala neliömetreinä ja aika  $t$  vuosina). Kuinka monta prosenttia saaren pinta-ala on vuonna 2000 suurempi kuin vuonna 1995? Minä vuonna, vuosien 1995 ja 2300 välisenä aikana, saaren pinta-ala kasvaa eniten?

9. a) Ajanhetkellä  $t \geq 0$  ovat pisteet  $z_1 = z_1(t)$  ja  $z_2 = z_2(t)$  kompleksitasolla paikoissa

$$z_1(t) = t + ie^{-t}, \quad z_2(t) = 3 + t + 2ie^{-t}.$$

Määritä pisteiden välinen etäisyys  $|z_1 - z_2|$  hetkellä  $t$ . Milloin etäisyys on suurin?

Määritä  $\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t) - z_2(t)|$ .

b) Kun  $a \in [0, 2]$ , niin merkitään  $f(a)$ :lla funktion  $g(x) = x^2 - 2ax$  pienintä arvoa välillä  $[1, 4]$ . Määritä funktio  $f$  ja piirrä sen kuvaaja. Määritä derivaatta  $f'(\frac{3}{2})$ . Onko  $f$ :llä derivaatta välin  $]0, 2[$  jokaisessa pisteessä?

10. Konstruoi esimerkki funktiosta  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , jolla on täsmälleen yksi epäjatkuvuuspiste ja jolla ei ole derivaattaa kahdessa pisteessä. Anna  $f(x)$ :n lauseke ja piirrä  $f$ :n kuvaaja.



YLIOPPILASTUTKINTO 22.9.1995 MATEMATIIKKA, YLEINEN OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2,3,5,7 ja 10 on kussakin kolme vaihtoehtoa, joista saa suorittaa vain yhden. Vaihtoehto c) on tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille, mutta sen saa valita kuka tahansa.

1. Kirjan myyntihinta saadaan lisäämällä kirjan perushintaan 12 % arvonlisävero. Kirjan, jonka myyntihinta oli ollut 134 mk, perushintaa alennettiin 25 mk. Mikä oli kirjan uusi myyntihinta?
2. a) Osoita, että luku  $(n + 4)^2 - n^2$  on jaollinen kahdeksalla, kun  $n$  on kokonaisluku. Millä arvoilla  $n$  luku on jaollinen 16:lla?  
 b) Määritä  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , kun  $x + y = 52$  ja  $xy = 13$ .  
 c) Autoilija ajoi ajassa 2 h 40 min matkamittarinsa mukaan 205 km. Matkamittari näytti 5 % todellista matkaa suurempaa lukemaa. Mikä oli autoilijan keskinopeus?
3. a) Tuhansia vuosia sitten käytetyn kaavan mukaan ympyrän ala on likimain  $(\frac{8}{9} \cdot \text{halkaisija})^2$ . Mikä luvun  $\pi$  likiarvo sijoitettuna kaavaan  $A = \pi r^2$  antaa saman tuloksen? Vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.  
 b) Neliön muotoiselle tontille rakennetaan suorakaiteen muotoinen talo, jonka pitempi sivu on puolet tontin sivusta ja lyhyempi kolmasosa tontin sivusta. Piha-aluetta jää tällöin 400 m<sup>2</sup>. Laske tontin ala.  
 c) Suosituksen mukaan jokaisessa työryhmässä on oltava vähintään 40 % naisia ja vähintään 40 % miehiä. Kuinka monta miestä ja naista voi olla suosituksen mukaisessa työryhmässä, jossa on  $n$  jäsentä, kun  $2 \leq n \leq 6$ ?
4. Rakentaja valaa 5,0 m pitkän ja 5,0 m leveän betonilaatan, jonka paksuus on 10 cm. Hän sekoittaa betonin itse käyttäen ohjetta: sementtiä 1, hiekkaa 5 ja vettä 3 tilavuusosaa. Montako 40 kg:n säkkiä sementtiä hän tarvitsee? Sementin ominaispaino on tässä 1,34 kg/dm<sup>3</sup>.
5. a) Pisteestä  $A = (-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$  lähtevät vektorit  $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j}$  ja  $\vec{b} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$  ovat suunnikkaan sivuina. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste olkoon  $B$ . Määrää pisteen  $B$  koordinaatit ja vektori  $\vec{AB}$ .  
 b) Harjoittelija Alku postittaa kirje-erän 30 minuutissa. Kun hän tekee saman työn yhdessä ammattitaitoisen Kelson kanssa, aikaa kuluu tasan 5 minuuttia. Missä ajassa Kelpo tekisi saman työn yksin?  
 c) 10-järjestelmän luku  $234_{10}$  tarkoittaa summaa  $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$ . Eräässä toisessa lukujärjestelmässä on
 
$$234_k + 56_k = 312_k.$$
 Mikä on tämän lukujärjestelmän kantaluku  $k$ ?
6. Tieosuudella, jossa oli nopeusrajoitus 80 km/h, oli mittausten mukaan ajoneuvojen keskinopeus 76,0 km/h ja keskihajonta 6,0 km/h. Kuinka monta prosenttia autoilijoista voisi saada rikesakon, ts. ajoi nopeutta, joka oli yli 80 km/h, mutta alle 95 km/h, kun nopeuksien jakauma oli normaali?

KÄÄNNÄ!

7. a) Paperirullan ulkohalkaisija on 12,0 cm ja sisähalkaisija 4,5 cm. Paperin paksuus on 0,1 mm. Kuinka monta metriä rullassa on paperia?
- b) Määrää funktion  $f(x) = |2x^2 - 5x - 1|$  suurin ja pienin arvo välillä  $[0, 3]$ .
- c) Kansainvälisen ilmakuljetusjärjestön IATA:n vaatimusten mukaan matkustamoon otettavan laukun pituuden, leveyden ja korkeuden summa ei saa ylittää 115 cm. Mikä on sellaisen IATA:n hyväksymän laukun suurin tilavuus, jonka korkeus on 20 cm?
8. Laiva kulkee vakionopeudella 18 solmua ja sen suunta pysyy koko ajan samana. Pisteestä A mitattuna suunta majakkaan on  $15^\circ$  kulkusuuntaan nähden, ja 34 minuuttia myöhemmin pisteestä B suunta samaan majakkaan on  $30^\circ$ . Kuinka kaukana majakka on pisteestä A? Yksi solmu on 1,85 km/h.
9. Muuttujan  $x$  saamat arvot ovat  $\{1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 6\}$  ja muuttujan  $y$  saamat arvot vastaavasti  $\{2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$ . Laske kummassakin tapauksessa muuttujan saamien arvojen keskiarvo  $\bar{x}$ , hajonta  $s = s_{n-1}$ , varianssi  $s^2$  (edellisen neliönä) ja vaihteluväli  $r$ . Kuvaa histogrammeilla tai pylväsdiagrammeilla arvojen hajontaa. Kuvaako luku  $s/r$  muuttujan arvojen leviämistä muita hajontalukuja paremmin?
10. a) Funktiota  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ , jolle  $f(x) = f(-x)$  kaikilla  $x \in [-a, a]$ , sanotaan parilliseksi. Osoita, että parillinen funktio ei voi olla aidosti kasvava.
- b) Määrää käyrien  $y = 4x - x^2$  ja  $y = -\sqrt{4x - x^2}$  rajoittaman alueen pinta-ala.
- c) Osoita, että  $\log_2 3$  ei ole rationaaliluku.

Tehtävissä 3, 5, 7 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Autoilija ajoi ajassa 2 h 40 min matkamittarinsa mukaan 205 km. Matkamittari näytti 5 % todellista matkaa suurempaa lukemaa. Mikä oli autoilijan keskinopeus?
2. Ratkaise epäyhtälö  $|3x - 2| \geq |-x + 1|$ .
3. a) Osoita, että jokaisella luvulla  $m = 2, 3, 4, \dots$  vektorin  $2\vec{i} + m\vec{j}$  pituus on pienempi kuin  $m + 1$ .  
  
b) Neliön muotoiselle tontille rakennetaan suorakaiteen muotoinen talo, jonka pitempi sivu on puolet tontin sivusta ja lyhyempi kolmasosa tontin sivusta. Piha-aluetta jää tällöin  $400 \text{ m}^2$ . Laske tontin ala.
4. Paraabelit  $y_a(x) = x^2 - ax + 2a$ ,  $a \in \mathbf{R}$ , kulkevat kaikki saman pisteen kautta. Määritä tämä piste. Määritä paraabelin  $y = y_a(x)$  tangentin kulmakerroin  $a$ :n funktiona tässä pisteessä.
5. a) Rationaaliluku  $\frac{3650401}{2107560}$  on likiarvo luvulle  $\sqrt{3}$ . Tutki, onko se ylä- vai alalikiarvo.  
  
b) Suora ja ympyrä leikkaavat siten, että ympyränkaari jakautuu kahteen osaan suhteessa 1:2. Määritä suoran erottamien ympyrän osien alojen suhde.
6. Suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin vetoisuus on 200 l ja sen sivun pituus on 1,12 m. Kyljellään makaavassa tynnyrissä on polttoainetta 32 cm. Ostaja maksoi tynnyristä polttoaineineen 600 mk. Tekikö ostaja hyvän kaupan, kun polttoaine maksaa 4,67 mk/l ja tynnyri on arvoltaan 100 mk?
7. a) Valmistaja saa myydyksi tuotettaan määrän

$$m = \frac{400}{\sqrt{50 + p}},$$

kun yhden yksikön hinta on  $p$  mk. Tuotemäärän kaikki kustannukset ovat  $800 + 2m$  (mk). Millä  $p$ :n arvoilla valmistaja saa voittoa?

b) Budjettia pitää leikata 25 % kuuden vuoden aikana. Kuinka paljon sitä pitää leikata vuosittain kuutena vuotena, kun prosentuaalinen leikkaus halutaan tehdä samansuuruisena joka vuosi?

KÄÄNNÄ!

8. a) Suoran pyramidin pohja on neliö ja sivutahkot muodostavat pohjan kanssa  $40^\circ$  kulman. Kuinka suuri on sivutahkojen välinen kulma (asteissa)?

b) Ratkaise yhtälöpari

$$xy + y^2 = 4y$$

$$x^2 + xy = 4.$$

9. Valonsäde lähtee origosta mielivaltaiseen suuntaan  $xy$ -tasossa. Pisteiden  $(0,1)$  ja  $(2,1)$  välissä on  $xy$ -tasoa vastaan kohtisuorassa oleva peili. Millä todennäköisyydellä säde kohtaa suoran  $y = -x - 1$ ?

10. Olkoon

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-1} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t+1}{3t-1}.$$

Määritä derivaatta  $f'(x)$ , kun  $x > \frac{1}{3}$ . Laske  $\int_1^2 f(x) dx$ .

Tehtävissä 3, 4, 6, 7, 8 ja 9 on vaihtoehtoja, joista saa käsitellä vain yhtä.

1. Reaaliluvut  $a, b$  ja  $f$  toteuttavat yhtälön  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ . Mikä on  $b$ :n arvo, kun  $a = 5$  ja  $f = 11$ ?
2. Tuula ajoi polkupyörällä pitkin tietä, jonka varrella oli puhelinpylväitä 50 metrin välein. Tuula huomasi ajavansa 14 sekunnissa puhelinpylväältä toiselle. Millä nopeudella (km/h) Tuula ajoi?
3. a) Näytä, että kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä  $(0, 0)$ ,  $(1, \sqrt{3})$  ja  $(2, 0)$ , on tasasivuinen. Piirrä kuvio.  
b) Reaaliluku  $x$  toteuttaa epäyhtälön  $|x - 1| > 3$ . Toteuttaako se aina myös epäyhtälön  $x - \frac{1}{4} < 2x$ ?
4. a) Suomen EU-äänestyksessä annettiin KYLLÄ-ääniä 57 % ja EI-ääniä 43 % äänestysprosentin ollessa 71. Kuinka monta prosenttia KYLLÄ-äänien määrä oli äänioikeutettujen määrästä?  
b) Ympyränmuotoisen lammikon keskellä on pystysuora tanko, jonka yläpää ulottuu 183 cm vedenpinnan yläpuolelle. Kun tanko taittuu pohjasta, se ylettyy lammikon reunalle siten, että yläpäästä on 76 cm ilmassa. Tangon alapää jää entiselle paikalleen. Kuinka syvä lammikko on, kun sen piiri on 17,40 m?  
c) Linja-autoasemalta lähtevät bussilinjat A, B ja C 12, 24 ja 30 minuutin välein. Kello kahdeksalta bussit lähtevät samaan aikaan. Milloin seuraavan kerran lähtee 1<sup>o</sup> kaksi bussia, 2<sup>o</sup> kolme bussia samaan aikaan?
5. Koneen, joka maksaa 29 000 mk, laskettu käyttöikä on 19 000 tuntia, minkä jälkeen sillä on 6 000 mk romuarvo. Viitenä ensimmäisenä vuotena konetta käytettiin 1860, 2200, 2510, 2400 ja 2170 tuntia. Laske käyttötuntien keskiarvo. Esitä graafisesti koneen arvo viitenä ensimmäisenä vuotena. Mikä on koneen arvo viiden vuoden kuluessa?
6. a) Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat  $a$  ja  $b$ , korkeus on  $h$  ja vastakkaiset erisuuntaiset sivut ovat yhtä pitkiä. Johda puolisuunnikkaan pinta-alan lauseke käyttäen hyväksi suorakulmion ja suorakulmaisen kolmion pinta-alojen lausekkeita.  
b) Oletetaan ihmisten lukumäärän kasvavan eksponentiaalisesti. Vuonna 1960 ihmisiä oli 3,02 miljardia ja vuonna 1990 5,29 miljardia. Minä vuonna ihmisten lukumäärä ylittää 10 miljardin rajan?

KÄÄNNÄ!

7. a) Neliöllä ja ympyrällä on yhtä suuret pinta-alat. Kuinka monta prosenttia pidempi on neliön piiri kuin ympyrän kehä? Kuutiolla ja pallolla on yhtä suuret tilavuudet. Kuinka monta prosenttia suurempi on kuution pinta-ala kuin pallon pinta-ala?

b) Neliöön, jonka sivu on  $a$ , piirretään lävistäjän suuntainen leikkaaja, jonka päätepisteet yhdistetään lävistäjän keskipisteeseen. Määritä sen leikkaajan pituus, joka yhdessä yhdistysjanojen kanssa muodostaa pinta-alaltaan suurimman kolmion.

c) Suorakulmaiselle tontille, jonka pituus on 38 m itä-länsisuunnassa ja 34 m pohjois-eteläsuunnassa, rakennetaan koilliskulmaan neliön muotoinen talo. Talo sijaitsee 6 m päässä tontin rajoista, ja sen pinta-ala on  $120 \text{ m}^2$ . Valitse sopiva mittakaava pohjakaaviolle tontista taloineen, kun pohjakaavion pitäisi mahtua  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$  tilaan paperille ja tontin lyhyemmän sivun on kaaviossa oltava vähintään 4 cm. Piirrä luonnos pohjakaaviosta valitsemassasi mittakaavassa. Mikä on tontin neliömetrihinta, kun tontti maksoi 86 000 mk?

8. a) Polkupyörämatkan pituus on 60 km. Alkumatka, 45 km, ajetaan nopeudella 14 km/h ja loppumatka nopeudella 18 km/h. Määritä funktion  $t = t(s)$  lauseke, jossa  $t$  on aika (tunteina), joka on käytetty, kun on poljettu matka  $s$ ,  $0 \leq s \leq 60$ . Piirrä funktion  $t(s)$  kuvaaja. Määritä derivaatta  $t'(15)$ .

b) Anna esimerkki kaikilla reaaliarvoilla määritellystä derivoituvasta funktiosta  $f$ , jolla on vain yksi nollakohta mutta jonka derivaatalla  $f'$  on kaksi nollakohtaa. Piirrä funktion  $f$  kuvaaja.

9. a) Puu, joka on muodoltaan likimäärin kärjellään seisova suora ympyräkartio (korkeus 19 m ja pohjan säde 3,2 m), kaatuu mielivaltaiseen suuntaan. Mikä on todennäköisyys, että se osuu puun tyvestä 15 m päässä seisovaan henkilöön? Henkilön mittoja ei tarvitse ottaa huomioon.

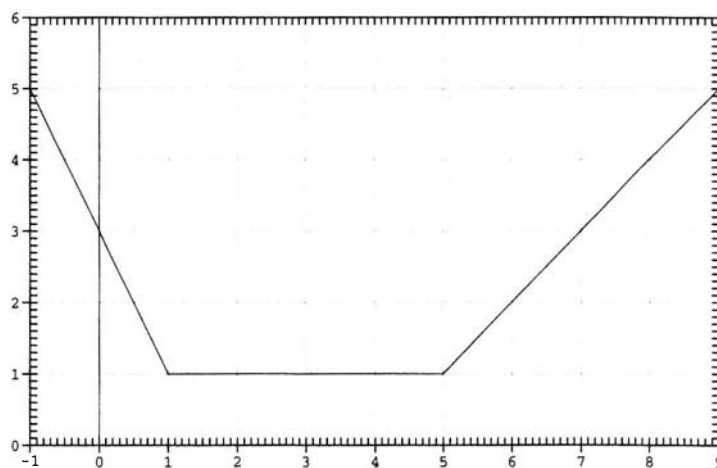
b) Satunnaismuuttuja  $p$  on normaalisti jakautunut keskiarvona 0 ja hajontana 1. Mikä on todennäköisyys, että

$$\int_0^p (x + p) dx \leq 1 \text{ ?}$$

10. Osakeyhtiön nettotuotto vuonna 1994 oli 7,1 % osakepääomasta. Seuraavana vuonna sekä tulot että menot kasvoivat 9,3 %. Kuinka monta prosenttia oli nettotuotto nyt osakepääomasta? Jos tulot olisivat kasvaneet 7,4 % ja menot 11,6 %, niin voitaisiinko näiden tietojen perusteella päätellä nettotuottoprosentti? Perustelu!

Tehtävissä 2, 4, 5, 7 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $(x + 10^{-5})^4 = (2x - 10^{-5})^4$ .
2. a) Onko funktio  $f(x) = x + \sin x \cos x$  funktion  $g(x) = 2 \cos^2 x$  integraalifunktio?  
 b) Yhtälössä  $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$  korvataan luku  $a$  luvulla  $a + 1$ . Miten muuttuvat yhtälön juuret?
3. Palkansaaajien reaaliensioita aiotaan nostaa joko 2 % palkankorotuksella tai alentamalla tuloveroa yhdellä prosenttiyksiköllä. Edellisessä tapauksessa hinnat nousevat 1 %. Kumpi tapa on edullisempi palkansaaajalle, jonka kuukausitulo on 10 000 markkaa, kun tulovero tästä määrästä on 30 % ja sen ylittävistä tulosta 40 %?
4. a) Ratkaise epäyhtälö  $e^x < e^{2x} - 2$  ja piirrä tilannetta valaiseva kuvio.  
 b) Ohessa on funktion  $f : ] - 1, 9[ \rightarrow R$  kuvaaja. Muodosta derivaatan  $f'$  lauseke ja piirrä sen kuvaaja määrittelyjoukossaan.



5. a) Millä arvoilla  $a \in R$  hyperbelillä  $x^2 - 4y^2 = 16$  ja suoralla  $y = ax$  on yhteisiä pisteitä, ja mitkä nämä pisteet ovat?  
 b) Olkoon  $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{c} = d\vec{i} + (d + 1)\vec{j}$ . Onko sellaisia reaalilukuja  $d$ , joilla vektorit  $\vec{a} + \vec{c}$  ja  $\vec{b} + \vec{c}$  ovat samansuuntaiset?

KÄÄNNÄ!

6. Yritys haluaa ostaa kadun varrella olevan suorakaiteen muotoisen tontin rakennuttaakseen sille suorakaiteen muotoisen toimitalon, jonka pohja on  $490 \text{ m}^2$ . Rakennuksen on oltava kadun puolella vähintään 9 metriä ja muilla puolilla vähintään 5 metriä tontin rajasta, ja seinien on oltava tontin rajojen suuntaisia. Mikä on pienin tontti, joka sopii tarkoitukseen?
7. a) Käyrän  $y^2 = x(x + 1)(x - 1)(2 - x)$  pyörähtaessä  $x$ -akselin ympäri syntyy kaksi äärellistä kappaletta. Kumpi niistä on suurempi?  
  
b) Määrää lausekkeen  $|z - 1|^2 + |z - i|^2$  suurin ja pienin arvo, kun  $z$  on kompleksitason käyrällä  $z\bar{z} = 1$ .
8. Funktio  $f : R \rightarrow R$  toteuttaa epäyhtälön (1)  $f(x) - f(y) \geq x - y$  kaikilla arvopareilla  $(x, y)$ , joissa  $x > y$ . Osoita, että  $f$  on kasvava. Osoita edelleen: Jos  $f$  on derivoituva,  $f'(x) \geq 1$  kaikilla  $x \in R$ . Muodosta esimerkki funktiosta, joka täyttää ehdon (1) ja on epäjatkuva  $R$ :ssä.
9. Kultaseppä aikoo ostaa 12 000 markalla joko yhden suuren jalokiven tai kaksi 6 000 mk arvoista pienempää ja hiottaa ostoksensa sitten uudestaan. Uudelleenhionta maksaa tuloksesta riippumatta suuren kiven osalta 1 000 mk ja pienemmän 800 mk sekä nostaa hionnan kestävän kiven arvoa 30 %. Todennäköisyys, että hiottava kivi tuhoutuu sisäisen vian vuoksi, on suurta kiveä käsitellessä 0,1 ja pienempää käsitellessä 0,08. Kannattaako kultaseppän ostaa yksi suuri jalokivi vai kaksi pienempää? Tässä kannattavuuden mittana pidetään hionnan jälkeisen varallisuuden odotusarvoa.
10. a) Metaanimolekyyli  $CH_4$  voidaan ajatella säännölliseksi tetraedriksi, jossa vetyatomit  $H$  ovat kärjissä ja hiiliatomi  $C$  keskipisteessä, yhtä kaukana kärjistä. Määritä metaanimolekyylin sidoskulma, ts. hiiliatomista kahteen vetyatomiin vedettyjen janojen välinen kulma.  
  
b) Graniittilohkareesta on hakattava tilavuudeltaan mahdollisimman suuri suorakulmainen särmiö. Määrää särmiön tilavuus ja sivujen pituudet koordinaatistossa, jossa lohkare on  $G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - 3x^2 - 2y^2\}$ .





Tehtävissä 2, 3, 4, 6, 7 ja 10 on vaihtoehtoja, joista saa suorittaa vain yhden.

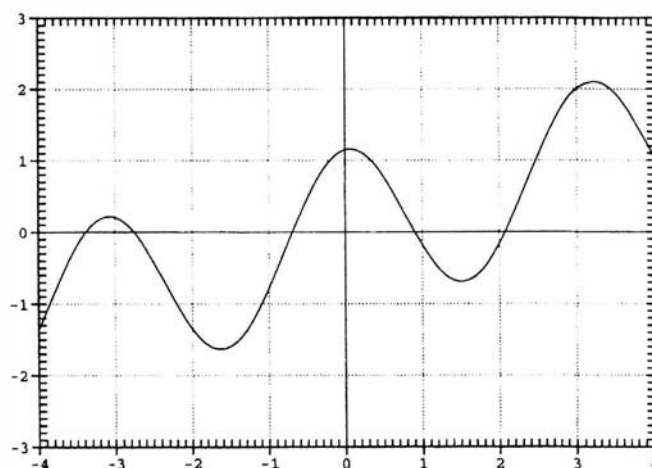
1. Sievennä funktion  $f(x) = (x^2 - 3x + 2)(x - 4) - (x^2 - 5x + 4)(x - 2)$  lauseke ja laske funktion arvo pisteissä 0, 2 ja 4.
2. a) Tasoaluetta rajoittavat suorat  $x = 2$ ,  $y = x$  ja  $y + 3 = 0$ . Piirrä alue ja kirjoita epäyhtälöt, jotka määräävät kyseisen alueen (ilman reunoja).  
  
b) Televisiokuvan korkeuden suhde leveyteen on nykyisin 3 : 4. Uudessa suunnitellussa teräväpiirtotelevisiossa (HDTV) se olisi 9 : 16. Ajatellaan, että nykysysteemillä kuvattu ohjelma näytettäisiin uudella kuvaruudulla. Kuinka suuri osa kuvaruudusta on jätettävä reunoilta mustaksi, jotta pystysuunta tulisi kokonaan näkyviin? Kuinka suuri osa kuva-alasta joutuisi puolestaan kuvaruudun ulkopuolelle, jos kuva levitetäisiin koko ruudun levyiseksi?
3. a) Missä pisteessä ja kuinka suuressa kulmassa käyrä  $y = x^3 - 6x^2 - x + 2$  leikkaa  $y$ -akselin?  
  
b) Katuvalaisimen kannatinvaijeri on kiinnitetty 34,50 m leveän kadun vastakkaisilla puolilla olevien talojen seiniin 6,50 m korkeudelle maasta. Lamppu riippuu vaijerista sen keskikohdalta, joka on 1,10 m vaijerin päitä alempana, ja vetää vaijerin puolikkaat likimain janoiksi. Kuinka pitkä vaijeri on, ja kuinka suuren kulman vaijerin puoliskot muodostavat keskenään?  
  
c) Kaksi samankokoista neliötä (sivu =  $s$ ) on siten osittain päällekkäin, että toisen neliön yksi kärki on toisen neliön keskipisteessä ja yksi tämän sivuista muodostaa toisen neliön sivun kanssa terävän kulman. Laske neliöiden yhteisen osan pinta-ala.
4. a) Sovitaan, että merkintä  $a|b|c$  tarkoittaa samaa kuin lauseke  $\frac{a-b}{b-c}$ . Mikä on tällöin  $2|3|4$ ? Ratkaise yhtälö  $6|x|4 = 2$ .  
  
b) Kiikarin näkökenttä on  $7,0^\circ$ . Kuinka kaukana on 140 m pitkä ohi kulkeva laiva, joka täsmälleen täyttää kiikarin näkökentän?
5. Etsi viisi sellaista peräkkäistä kokonaislukua, että kolmen ensimmäisen luvun neliöiden summa on sama kuin kahden viimeisen luvun neliöiden summa. Kuinka monta tällaista lukuviisikkoa on olemassa?
6. a) Paperista on leikattu suorakulmio, jonka sivut ovat  $a = 8$  cm ja  $b = 16$  cm. Paperi taitetaan toista suorakulmion lävistäjää pitkin litteäksi. Laske sen osan pinta-ala, joka tällöin tulee kaksinkertaiseksi.  
  
b) Perustele, miksi kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ .
7. a) Ilmanpaine laskee noustaessa korkeammalle. Jos ilmanpaine merenpinnan tasolla on  $p_0$ , on korkeudella  $h$  vallitseva paine millibareina  $p = p_0 10^{-0,05435 h/\text{km}}$ . Kuinka monta prosenttia paine laskee, kun noustaan 800 m lähtökohtaa korkeammalle, ja kuinka suuri se on 11 km korkeudessa silloin, kun se on merenpinnan tasolla 980 mbar?

KÄÄNNÄ!

b) Suoraa ympyrälieriötä varten tehdään metrin pituisesta rautalangasta kehikko, joka muodostuu kahdesta samankokoisesta vaakaympyrästä ja niitä yhdistävästä pystysauvasta. Missä rajoissa ympyröiden säde voi vaihdella, jotta syntyisi haluttu kehikko, ja millä säteen arvolla lieriön tilavuus tulisi mahdollisimman suureksi?

c) Sienikurssilla opetettiin tunnistamaan 78 erilaista sientä, joista kurssilainen oppi kuitenkin vain 49. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän tunnisti oikein hänelle satunnaisesti esitetyt kuusi erilaista kurssilla opetettua sientä?

8. Oletetaan, että paperin pinta-alamassa ( $\text{g/m}^2$ ) on normaalijakautunut. Asiakas tilaa paperia, jonka pinta-alamassa on keskimäärin  $80 \text{ g/m}^2$ . Kuinka suuri hajonta saa pintapainossa enintään olla, jotta todennäköisyys saada alle  $75 \text{ g/m}^2$  painavaa paperia olisi pienempi kuin 5 %?
9. Autojono ajaa tasaisella  $100 \text{ km/h}$  nopeudella, kun ensimmäinen autoilija havaitsee tiellä esteen. Oletetaan, että kukin autoilija alkaa jarruttaa  $1,0 \text{ s}$  sen jälkeen kun edellä ajava on ruvennut jarruttamaan. Autojen jarrutusmatkat vaihtelevat tämän "kauhusekunnin" jälkeen renkaiden kunnon ym. syiden mukaan  $150 \text{ m}$  ja  $200 \text{ m}$  välillä. Kuinka pitkiä autojen välimatkojen tulisi olla ajettaessa, jotta jonon pysähtyttyä autot olisivat vielä vähintään  $10 \text{ m}$  päässä toisistaan?
10. a) Funktion  $g$  kuvaaja on oheisessa kuviossa. Funktiosta  $f$  tiedetään, että  $f(x) = g'(x)$ , kun  $-4 < x < 4$ . Määritä  $\int_0^3 f(x) dx$ .



b) Osoita, että suoran  $y = k(x - 2) + 1$  ja ympyrän  $x^2 + y^2 = 5$  toinen leikkauspiste on kaikilla kulmakertoimen  $k$  arvoilla  $(2, 1)$  ja että jos  $k$  on rationaaliluku, myös toisen leikkauspisteen molemmat koordinaatit ovat rationaalilukuja. Mikä tämä leikkauspiste on, jos  $k = 2$ ?

c) Henkilö otti kahden vuoden tasaerä- eli annuiteettilainan 12 % vuotuisella korolla. Hän maksoi lainan suorittamalla kerran kuussa aina saman summan  $a = 2354 \text{ mk}$ , yhteensä 24 kertaa. Kuinka suuresta lainasta oli kysymys?



Tehtävissä 2, 5, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $\frac{(x+1)^2 - \pi^2}{x^2 + \pi^2} = 0$ .

2. a) Laske  $\int_0^{\ln 2} (e^{3x} + 2e^{-x}) dx$ .

b) Tavarán hintaa alennettiin ensin  $p$  % ja näin saatua hintaa vielä  $q$  %. Kuinka monta prosenttia oli kokonaisalennus? Mitä vaikuttaa kokonaisalennukseen, jos  $p$  ja  $q$  vaihdetaan?

3. Säännöllisen  $n$ -kulmion, jonka sivut  $= 2$ , kärjet keskipisteenä piirretään ympyrät, joiden säde  $= 1$ . Määritä sen alueen ala, jonka pisteet kuuluvat  $n$ -kulmioon mutta eivät kuulu mihinkään ympyröistä.

4. Lentokone, jonka nopeus tyynessä säässä on  $v$  km/h, lentää matkan A:sta B:hen ja takaisin. Matkan aikana puhaltaa tuuli, jonka suunta on A:sta B:hen ja nopeus  $c$  km/h. Tällöin matkaan kuluu 20 % enemmän aikaa kuin tyynessä säässä. Laske suhde  $c/v$ .

5. a) Olkoon  $\overrightarrow{OP_1} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\overrightarrow{OP_2} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  ja  $\overrightarrow{OP_3} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ . Laske kolmion  $P_1P_2P_3$  ala.

b) Vuoden 1994 verotuksessa opintorahaa pidettiin ansiotulona, mutta opiskelijalla oli oikeus tehdä kunnallisverotuksessa ansiotuloistaan opintorahavähennys. Vähennyksen enimmäismäärä oli 13 000 mk, kuitenkin enintään saadun opintorahan suuruus. Vähennys pieneni 50 %:lla siitä määrästä, jolla ansiotulot ylittivät 13 000 mk. Vähennystä ei myönnetty, jos ansiotulot ylittivät 39 000 mk. Esitä vähennyksen määrä  $y$  ansiotulojen  $x$  funktiona ja piirrä funktion kuvaaja, kun opiskelijan opintoraha oli 11 000 mk. Mikä oli vähennyksen suuruus, kun ansiotulot olivat 22 500 mk?

6. Määritä funktion  $f : f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$  suurin ja pienin arvo.

7. a) Käyrällä  $y = x^3(x^2 - 1)^{-1}$  on kolme suoraviivaista asymptoottia. Määritä ne ja piirrä käyrä asymptootteineen.

b) Olkoon  $K$  ympyrän keskipiste,  $A$  ja  $B$  ympyrän halkaisijan päätepisteet ja  $C$  mielivaltainen kehän piste, joka ei ole  $A$  eikä  $B$ . Todista, että kehäkulma  $CAB$  on puolet keskuskulmasta  $CKB$ .

KÄÄNNÄ!

8. a) Määritä lukujonon  $\frac{n^4}{2^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) suurin luku. Perustelu.

b) Henkilö lähtee töihin joka aamu autolla samaan aikaan. Hän saapuu työpaikkaan pysäköintialueelle ajankohtana, joka noudattaa normaalijakaumaa. Keskiarvo on klo 8.50 ja hajonta 5 min. Pysäköintialueelta löytyy paikka 65 % todennäköisyydellä, ja sieltä on viiden minuutin kävelymatka työpaikalle. Jos kaikki pysäköintipaikat ovat varattuja, henkilö voi ajaa viidessä minuutissa toiselle alueelle, jolta aina löytyy pysäköintipaikka mutta jolta on 10 minuutin kävelymatka työpaikalle. Mikä on todennäköisyys, että henkilö saapuu työpaikalleen klo 9.00 jälkeen?

9. Osoita, että suora  $(C^2 + 1)x - C^2y + C^2 - 1 = 0$  kaikilla vakion  $C$  arvoilla kulkee kiinteän pisteen kautta. Mikä tämä piste on? Piirrä suoraparvi.

10. a) Funktio  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  on ei-negatiivinen ja toteuttaa yhtälön  $x + f(x) = e^{f(x)}$ .  
1° Määritä  $f(e - 1)$  ja  $f(1)$ . 2° Piirrä käänteisfunktion  $f^{-1}$  kuvaaja ja sen avulla funktion  $f$  kuvaaja.

b) Sydneyn asukasluku toteuttaa erään mallin mukaan differentiaaliyhtälön

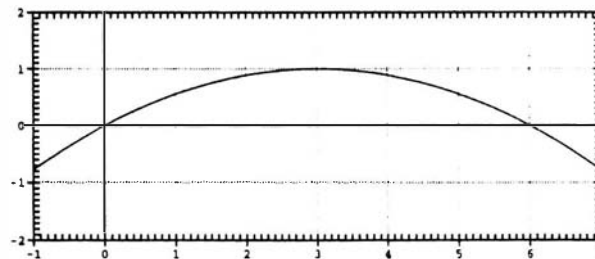
$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{100}y = \frac{17}{1000},$$

jossa  $y = y(t)$  on asukasluku vuonna  $1990 + t$  miljoonina asukkaina. Sydneyn asukasluku vuonna 1990 oli 3 539 000, joten  $y(0) = 3,539$ . Mikä on mallin mukaan Sydneyn asukasluku vuonna 2000?



Tehtävissä 4, 6, 8, 9 ja 10 on vaihtoehtoja, joista saa suorittaa vain yhden.

1. Ratkaise yhtälö  $(3x - 1)(2x + 1) = (6x + 3)(3x - 1)$ .
2. Säiliöstä käytetään 11 litraa öljyä vuorokaudessa. Maaliskuun 26. päivänä 1997 säiliössä on 3 000 litraa öljyä. Riittääkö öljy koko loppuvuodeksi?
3. Ohuen, jäykän levyn pituus on 250 cm ja leveys 210 cm. Voidaanko levy viedä oviaukosta, jonka leveys on 80 cm ja korkeus 200 cm?
4. a) Erään obligaation vuotuinen korko on 5 %. Maksetusta korosta peritään 28 % lähdevero. 1° Mikä on obligaation todellinen korko? 2° Mikä obligaation vuotuisen koron tulisi olla, jotta todellinen korko olisi 5 %?  
b) Määritä sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat suora  $y = 1$  ja paraabeli  $y = 2x^2 - 7$ .
5. Suomalainen Taisto Mäki alitti 10 000 metrin juoksussa ensimmäisenä maailmassa puolen tunnin rajan juoksemalla vuonna 1939 ajan 29 min 52,6 s. Marokon Salah Hissou juoksi vuonna 1996 tällä matkalla maailmanennätyksen 26 min 38,1 s. Kuinka paljon Mäellä olisi vielä ollut matkaa jäljellä Hissoun tullessa maaliin, jos he olisivat lähteneet yhtäaikaa ja kumpikin olisi juossut tasaisella vauhdilla? Kuinka monta kierrosta tämä matka vastaa 400 metrin pituisella radalla?
6. a) Alla olevassa kuvassa on osa erään toisen asteen polynomin kuvaajaa. Määritä polynomin lauseke ja laske sen avulla polynomin arvo muuttujan arvolla 10.



- b) Huippuälykkäiden ihmisten yhdistyksen jäseneksi voi päästä henkilö, jonka älykkyydosamäärä on suurempi kuin 98 prosentilla ihmisistä. Mikä älykkyydosamäärä pitää henkilöllä vähintään olla, että hän voisi päästä yhdistyksen jäseneksi? Oletetaan, että älykkyydosamäärä noudattaa normaalijakaumaa  $N(100, 24)$ .
7. Helsingin kaupunki myy autoilijoille 535 markan hintaista pysäköintimaksulaitetta. Laitetta käyttävä maksaa vain käyttämästään ajasta ja saa 20 % alennuksen taksasta. Henkilö, joka ilman laitetta pysäköidessään maksaa aina varmuuden vuoksi 10 % yliaikaa, ostaa maksulaitteen. Missä ajassa hän saa laitteeseen käyttämänsä rahamäärän takaisin, kun hän ilman laitetta kuluttaa pysäköintiin 20 markkaa viikossa?

KÄÄNNÄ!

8. a) Äänen desibelilukema  $D$  liittyy äänen intensiteettiin  $I$  kaavalla  $D = 10(\log_{10} I + 12)$ . Kaupunki oli asettanut teltassa järjestetyille konsertille 65 desibelin ylärajan. Yläraja ylitettiin kuitenkin kolmella desibelillä. Kuinka monta prosenttia äänen intensiteetti oli sallittua suurempi?

b) Hätäraketin lähettäjää paikannettaessa pisteessä  $A = (0,0)$  oleva havainnoitsija sanoi lähettäjän olevan suunnassa  $\vec{i} + 2\vec{j}$  tai sen oikealla puolella, pisteessä  $B = (6, -2)$  oleva havainnoitsija suunnassa  $-\vec{i} + 3\vec{j}$  tai sen vasemmalla puolella ja pisteessä  $C = (9,0)$  oleva havainnoitsija suunnassa  $-3\vec{i} + 2\vec{j}$  tai sen oikealla puolella. Piirrä kuva alueesta, josta hätäraketti on lähtenyt, ja määritä lähettäjän suurin mahdollinen etäisyys havaintopisteestä  $B$ .

c) Ompeluseuralla on ruskeaa villalankaa 7,2 kg ja vihreää villalankaa 4,8 kg. Seura neuloo niistä kahdenlaisia villapaitoja. Uusikuosiseen villapaitaan menee 400 g ruskeaa ja 400 g vihreää lankaa. Vanhakuosiseen villapaitaan menee 600 g ruskeaa ja 200 g vihreää lankaa. Myyjäisissä saa uusikuosisesta villapaidasta 700 mk ja vanhakuosisesta 600 mk. Mikä on villapaitamyynnin suurin arvo, ja kuinka monta uusi- ja kuinka monta vanhakuosista villapaitaa on siihen neulottava?

9. a) Laihia ja Kaavi ovat likimain 63. leveysasteella. Niiden leveyspiiriä pitkin mitattu etäisyys on 330 kilometriä. Kuinka paljon aikaisemmin aurinko nousee Kaavilla kuin Laihialla? Maapallon säde on 6360 km.

b) Puisen, poikkileikkaukseltaan suorakulmion muotoisen kattopalkin lujuus on verrannollinen korkeuden  $h$  neliön ja leveyden  $d$  tuloon  $h^2d$ . Halkaisijaltaan 38,0 cm olevasta tukista sahataan mahdollisimman luja palkki. Määritä tämän palkin leveys ja korkeus.

c) Tehtäessä porakaivoa eräällä alueella vettä löytyy  $h$  metrin syvyydessä todennäköisyydellä  $p$  seuraavasti.

| <i>Syvyys</i>    | <i>p</i> | <i>Syvyys</i>    | <i>p</i> |
|------------------|----------|------------------|----------|
| $4 < h \leq 10$  | 4 %      | $40 < h \leq 50$ | 20 %     |
| $10 < h \leq 20$ | 6 %      | $50 < h \leq 60$ | 30 %     |
| $20 < h \leq 30$ | 10 %     | $60 < h \leq 70$ | 10 %     |
| $30 < h \leq 40$ | 15 %     | $70 < h \leq 80$ | 5 %      |

Poraus maksaa 200 mk jokaiselta alkavalta metriltä. Mikä on onnistuneen porauksen hinnan odotusarvo?

10. a) Tutki, onko kahden kasvavan funktion tulo aina kasvava.

b) Urheilukentälle on viivoilla merkitty ympyräsektorin muotoinen alue, jonka keskuskulma on  $30,0^\circ$  ja sivut 90,0 m. Toimitsija kiertää alueen ympäri kulkien sen ulkopuolella metrin päässä reunasta. Piirrä kuvio toimitsijan reitistä ja määritä reitin pituus.



Tehtävissä 3, 6, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Suoran ympyrälierion muotoiseen astiaan kaadetaan 5,0 l vettä. Tällöin veden korkeus astiassa on 22 cm. Laske pohjan halkaisija.
2. Määritä ne reaalityluvut  $x$ , joilla  $x|x| + 2x + 1 = 0$ .
3. a) Rusinoita saadaan viinirypäleitä kuivattamalla. Kuinka monta prosenttia rypäleiden vedestä haihtuu kuivatuksessa, kun rypäleiden vesipitoisuus on 82 painoprosenttia ja rusinoiden 24 painoprosenttia?

b) Millä  $x$ :n arvoilla on määritelty lauseke

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \lg(2-x) + \sqrt{5x+3-2x^2} ?$$

4. Erään yhtiön osakkeiden osinkoprosentin oletetaan jakautuvan tasaisesti välille  $[10,16]$ . Mikä on todennäköisyys, että osakkeenomistaja saa omistamistaan 25 000 markan nimellisarvoisista yhtiön osakkeista osinkoa vähintään 3 400 markkaa?
5. Olkoon  $I$  pituudeltaan  $l$ :n mittainen jana tasossa ja  $t > 0$ . Mikä on sen tasojoukon pinta-ala  $A(t)$ , jonka pisteiden etäisyys  $I$ :stä on pienempi kuin  $t$ ? Piirrä kuvio. Määritä  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{t}$ .
6. a) Miten määritellään kasvava funktio? Anna esimerkki epäjatkevasta kasvavasta funktiosta. Anna esimerkki kasvavasta funktiosta, joka on origossa jatkuva mutta ei derivoituva. Piirrä funktioiden kuvaajat.  
b) Millä kompleksiluvuilla  $z$  luku  $(2 - |z - i|)|z|$  on positiivinen? Piirrä kuvio.
7. Havaintopisteestä A näkyy vuoren huippu H suoraan lännessä  $17,4^\circ$  vaakatason yläpuolella. Toisesta havaintopisteestä B, joka on tasan 3 000 metriä pisteestä A pohjoiseen, huippu näkyy  $14,5^\circ$  vaakatason yläpuolella. Mikä on vuoren korkeus merenpinnasta, kun havaintopisteet ovat 200 metrin korkeudella merenpinnasta? Maanpinnan kaarevuutta ei tarvitse ottaa huomioon.
8. a) Joukko koostuu parillisesta määrästä peräkkäisiä luonnollisia lukuja. Näytä, että joukon lukujen keskiarvo ei ole luonnollinen luku.  
b) Origosta siirrytään ensin kaksi pituusyksikköä vektorin  $4\vec{i} + 3\vec{j}$  suuntaan ja sen jälkeen  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) yksikköä vektorin  $5\vec{i} - 12\vec{j}$  suuntaan. Mihin pisteeseen tullaan? Minkä käyrän tämä piste piirtää, kun  $t$  saa kaikki reaaliarvot?

KÄÄNNÄ!

9. Laivan nopeus  $v$  (km/h) riippuu polttoaineen kulutuksesta  $p$  (l/h) kaavan

$$v = 1,2\sqrt{p - 92}$$

mukaisesti. Määritä laivan polttoaineen kulutuksen kannalta taloudellisin nopeus  $v$  ( $v > 0$ ).

10. a) Käyrä  $y = f(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \geq 0$ , pyörrähtää  $x$ -akselin ympäri ja muodostaa kappaleen, jonka tilavuus jokaisella välillä  $[0, x]$ ,  $0 < x \leq 1$ , on  $x^5$ . Määritä  $f(x)$ . Piirrä kuvio.

- b) Funktio  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  on määritelty seuraavasti

$$F(x) = \begin{cases} e^{2x+a}, & \text{kun } x \leq -1, \\ 1, & \text{kun } x > -1. \end{cases}$$

Määritä 1° sellainen vakio  $a$ , että  $F$  on jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan  $\underline{x}$  kertymäfunktio, 2°  $\underline{x}$ :n odotusarvo  $E\underline{x}$ , 3° todennäköisyys  $P(\underline{x} \geq 2)$ .





Tehtävissä 3, 4, 6, 7, 8 ja 9 on vaihtoehtoja, joista saa käsitellä vain yhtä.

1. Laske suureen  $m$  arvo kaavasta  $p = \frac{mgh}{t}$ , kun  $p = 700$ ,  $t = 45$ ,  $g = 9,81$  ja  $h = 4,5$ .
2. Suora kulkee pisteen  $(1, 5)$  kautta leikkaamatta suoraa  $2y - x + 1 = 0$ . Mikä on suoran yhtälö? Piirrä kuvio.
3. a) Toteuttavatko yhtälön  $|x - 1| = 3$  kaikki ratkaisut epäyhtälön  $\frac{x}{x - 3} > 1$ ?  
  
b) Kasvin varren halkaisija  $d$  riippuu kasvuajasta  $t$  yhtälön  $d = k\sqrt{t}$  mukaisesti, jossa  $k > 0$  on verrannollisuuskertoimen. Kasvin varsi on 9 mm paksuinen 36 vuorokauden ikäisenä. Kuinka paksu varsi on 100 vuorokauden ikäisenä?
4. a) Tuotteen myyntihinta laski 8 %. Myyntipalkkio, joka oli 25 % myyntihinnasta, nostettiin samalla 31 prosenttiin uudesta myyntihinnasta. Nousiko vai laskiko myyntipalkkio?  
  
b) Auto maksoi uutena 95 400 mk, ja 8 vuoden kuluttua sen arvo oli 19 000 mk. Auton arvo väheni joka vuosi  $p$  prosenttia. Määritä  $p$ .
5. Suorakulmion muotoisen levyn pituus  $x$  ja leveys  $y$  mitattiin kahdeksan kertaa, ja saatiin seuraavat tulokset:

| mittauskerta | $x$ (cm) | $y$ (cm) |
|--------------|----------|----------|
| 1.           | 83,4     | 54,1     |
| 2.           | 83,6     | 54,3     |
| 3.           | 82,8     | 53,6     |
| 4.           | 82,6     | 53,7     |
| 5.           | 83,1     | 54,0     |
| 6.           | 83,7     | 54,4     |
| 7.           | 83,2     | 54,1     |
| 8.           | 83,3     | 53,9     |

Määritä mitattujen pituuksien ja leveyksien keskiarvot  $x_0$  ja  $y_0$  sekä tämän perusteella "keskimääräisen" levyn pinta-ala. Esitä mittaukset  $(x, y)$ -koordinaatistossa, jonka origo on  $(x_0, y_0)$ . Valitse koordinaatiston yksiköt niin, että mittaustulokset ovat selvästi erotettavissa.

KÄÄNNÄ!

6. a) Pankkilainaa hoidetaan kuukausittain maksamalla korkoa ja tuhannen markan lyhennys. Syyskuussa 1997 lainan hoitokulut ovat 1 308 mk. Vuotuinen korkoprosentti on 8,59. Milloin laina on kokonaan maksettu?
- b) Mitä tarkoitetaan alkuluvulla eli jaottomalla luonnollisella luvulla? Osoita, että jos  $p$  ja  $q$  ovat alkulukuja, jotka ovat suurempia kuin kaksi, niin  $p + q$  ei ole alkuluku.
- c) Desinfointiliuosta sisältävän astian kyljessä on ohje: Väkevyys 40 % – laimenna ennen käyttöä 5-prosenttiseksi liuokseksi. Missä suhteessa liuosta ja vettä on sekoitettava ja kuinka paljon näitä on kaadettava 10 litran sankoon, että sanko tulisi täyteen 5-prosenttista liuosta?
7. a) Pallon tilavuus määritettiin upottamalla pallo nesteeseen, jolloin tilavuudeksi saatiin  $1,52 \pm 0,03$  litraa. Missä rajoissa pallon halkaisija voi vaihdella?
- b) Mitä tarkoitetaan välillä  $[a, b]$  määritellyn funktion  $f$  suurimmalla arvolla? Anna esimerkki välillä  $[0, 1]$  määritellystä funktiosta  $f$ , jolla ei ole suurinta arvoa. Piirrä  $f$ :n kuvaaja.
8. a) Pakkaustehdas on päättänyt valmistaa neliöpohjaisia kannettomia pahvilaatikoita. Mikä on tilavuudeltaan suurin laatikko, kun pahvia saa pohjaan ja seiniin kulua yhteensä  $0,18 \text{ m}^2$ ?
- b) Mikä on todennäköisyys, että funktion  $f(x) = px^2 + x + p$  pienin arvo on suurempi kuin 1, kun  $p$  määrätään heittämällä noppaa kerran?
- c) Puoliympyrän halkaisija kantana piirretään suorakulmio, jonka korkeus on puoliympyrän säde. Suorakulmio sijaitsee puoliympyrän puolella. Missä suhteessa suorakulmion lävistäjä jakaa puoliympyrän kehän?
9. a) Suoran ympyrälieriön muotoisen tangon ympärillä kulkee vaijeri päästä päähän kiertäen tangon neljä kertaa. Laske vaijerin pituus, kun tangon pituus on 9,1 m ja halkaisija on 25 cm.
- b) Paraabelille  $y = -x^2 + 6x - 5$  asetetaan tangentti kohtaan  $x = 2$ . Tällöin syntyy kaksi äärellistä aluetta, joita kumpaakin rajoittavat tangentti, paraabeli ja  $x$ -akseli. Pienempi alue on suuremman osa. Laske alueiden pinta-alat. Piirrä kuvio.
10. Erään 16 500 ihmistä käsittävän ryhmän pituuden oletetaan noudattavan normaalijakaumaa  $N(p; \sigma)$ , jossa  $p = 175 \text{ cm}$  ja  $\sigma = 5 \text{ cm}$ . Ryhmän älykkyysosamäärän oletetaan samoin jakautuvan normaalisti  $N(102; 12)$ . Mikä on todennäköisyys, että ryhmästä löytyy ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja älykkyysosamäärä yli 140? Ryhmän kengännumerot ovat nekin jakautuneet normaalisti  $N(41,6; 0,6)$ . Voidaanko samalla päättelyllä kuin yllä laskea todennäköisyys, että ryhmässä on ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja kengännumero vähintään 45? Perustele.



Tehtävissä 2, 4, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Millä arvoilla  $x$  funktion  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$  derivaatta saa arvon nolla?
2. a) Laske  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ .  
  
b) Suunnistaja lähti 1350 m päässä olevalle rastille suuntaan, joka poikkesi  $4^\circ$  rastin suunnasta. Kuinka kaukana rastista suunnistaja oli juostuaan suoraan 1350 m?
3. Henkilö A saa palkkaa 47,30 mk/h ja henkilö B 38,4 % enemmän. Palkkoja korotetaan 1,05 mk/h, kuitenkin vähintään 1,8 %. Kuinka monta prosenttia enemmän saa B palkkaa kuin A palkankorotuksen jälkeen?
4. a) Luonnollisia lukuja  $a$ ,  $b$  ja  $c$  sanotaan Pythagoraan luvuiksi, jos on olemassa suorakulmainen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat  $a$ ,  $b$  ja  $c$ . Määritä kaikki peräkkäiset luonnolliset luvut, jotka ovat Pythagoraan lukuja.  
  
b) Kokeen kirjauksessa merkittiin erehdyksessä 16 prosentille oppilaista yhden numeron ja 6 prosentille oppilaista kahden numeron verran liian pieni arvosana. Kuinka paljon virheellisillä arvosanoilla laskettu keskiarvo poikkesi oikeasta?
5. Suoran maantietunnelin poikkileikkaus on paraabelin muotoinen. Tunnelin korkeus on 7,50 m ja leveys tienpinnan tasossa 8,10 m. Kuinka korkea, 260 cm leveä rekka-auto mahtuu ajamaan tunnelin läpi keskiviivan oikealla puolella pysyen?
6. a) Osoita, että funktio  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
$$f(x) = \sqrt{x\sqrt{2 + \sqrt{x}} - x\sqrt[4]{x}} \sqrt{x\sqrt{2 + \sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}}$$
on lineaarinen funktio, ja piirrä sen kuvaaja.  
  
b) Todista oikeaksi kaava  $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$  ja määritä tämän kaavan avulla funktion  $f$  suurin ja pienin arvo.
7. a) Suoran ympyräkartion korkeus on 4 ja pohjan säde 3. Määritä sivujanan keskipisteestä pohjaympyrän pisteeseen pitkin kartion vaippapintaa mitatun etäisyyden suurin arvo. Opastus: Levitä kartion vaippapinta tasoon.  
  
b) Osoita, että funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$  on koko  $\mathbb{R}$ :ssä aidosti kasvava. Muodosta  $f$ :n käänteisfunktio.

KÄÄNNÄ!

8. Osoita, että  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$ . Määritä jokin sellainen luku  $h$ , että

$$0 < \sqrt{x^2 + 1} - x < 10^{-3},$$

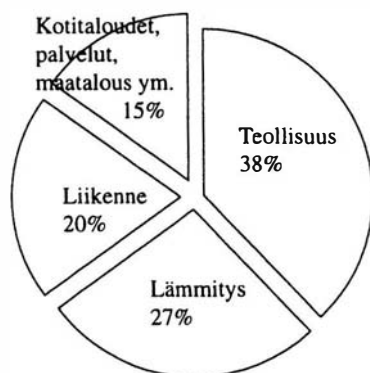
kun  $x > h$ .

9. a) Halkaisijaltaan 20 cm olevaan pyöreään maalitauluun heitetään umpimähkään tikkaa. Olkoon satunnaismuuttuja  $\underline{x}$  tauluun osuneen tikan etäisyys reunasta. Määritä  $\underline{x}$ :n kertymäfunktio, tiheysfunktio, odotusarvo ja keskihajonta.
- b) Reaalilukujen joukossa  $\mathbb{R}$  määritellään yhteenlaskua muistuttava laskutoimitus  $x \circ y$  seuraavasti:  $x \circ y = x + y - 2$  kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ . Osoita, että laskutoimitus toteuttaa seuraavat ehdot: 1°  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$  kaikilla  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . 2°  $x \circ y = y \circ x$  kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ . 3° On olemassa sellainen luku  $\omega \in \mathbb{R}$ , että  $x \circ \omega = \omega \circ x = x$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Mikä  $\omega$  on? 4° Jokaisella  $x \in \mathbb{R}$  on vasta-alkio  $x^*$ , jolle  $x \circ x^* = x^* \circ x = \omega$ .
10. Henkilön on päästävä suoran joen toisella puolella olevaan pisteeseen E, jonne on henkilöä lähinnä olevasta vastarannan kohdasta matkaa 5,2 km myötävirtaan. Henkilön veneen nopeus veteen nähden on 3,2 km/h, joen virtausnopeus 2,3 km/h ja henkilön kävelynopeus 5,9 km/h. Joen leveys on 600 m. Mikä on nopein reitti, kun joki ylitetään suoraviivaisesti, ja kuinka kauan matka pisteeseen E kestää?



Tehtävissä 3, 5, 6, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä yhtälön  $x^2 - x - 1 = 0$  ne ratkaisut, jotka kuuluvat avoimeen väliin  $] -1, \frac{3}{2}[$ .
2. Viiden jalkapalloilijan yhteispaino on 425 kg, ja kymmenen balettitantsijan keskimääräinen paino on 52 kg. Mikä on kaikkien viidentoista keskimääräinen paino?
3. a) Pekka kävelee neljä kilometriä tunnissa ja hölkkää kuusi kilometriä tunnissa. Hölkkätessään kouluun hän käyttää 3 min 45 s vähemmän aikaa kuin kävellessään sinne. Määritä Pekan koulumatkan pituus.  
  
b) Kutsuilla on 10 avioparia. Jokainen läsnäolija kättelee jokaista muuta paitsi avio puolisoaan. Kuinka monta kättelyä suoritetaan?
4. Oheinen diagrammi esittää hiilidioksidipäästöjen jakautumista eri alojen kesken Suomessa vuonna 1994. Kuinka monta prosenttia hiilidioksidin kokonaispäästö vähenisi, jos sektori, johon kuuluvat kotitaloudet, palvelut, maatalous ym., vähentäisi päästöjään 20 % ja muut pysyisivät ennallaan? Kuinka monta prosenttia hiilidioksidin kokonaispäästö vähenisi, jos teollisuus ja liikenne kumpikin vähentäisivät päästöjään 20 % ja muut pysyisivät ennallaan?



HIILIDIOKSIDIPÄÄSTÖT  
KULUTUSSEKTOREITTAIN

Vuosi 1994 (kokonaispäästöt 57,2 milj. tonnia)

Lähde: Suomen Luonto 3/1997

5. a) Kellohametta valmistettaessa tarvitaan kahden samakeskisen ympyräviivan rajoittama pala kangasta. Sisempi ympyrä muodostaa hameen vyötärön ja ulompi helman. Tytölle, jonka vyötärön ympärysmitta on 60 cm, halutaan ommella 60 cm pitkä kellohame. Kuinka leveää kankaan pitää vähintään olla, jotta siitä voitaisiin leikata hameeseen tarvittava ympyrärenkaan muotoinen pala? Saumavaroja ja päärmeitä ei tarvitse ottaa huomioon.  
  
b) Ratkaise täydellisesti yhtälö  $ax + b = 0$ , jossa  $a$  ja  $b$  ovat reaalilukuja. Huomaa kaikki erikoistapaukset.

KÄÄNNÄ!

6. a) Erään vuorokauden aikana on hetkellä  $t$  ulkoilman lämpötila

$$x(t) = -0,02t^2 + 0,61t + 4,00, \quad 0 \leq t \leq 24;$$

aika  $t$  on annettu tunteina ja lämpötila  $x(t)$  celsiusasteina. Milloin lämpötila on korkeimmillaan ja milloin matalimmillaan?

b) Teräskuulilla, joiden halkaisija on 2,1 cm, täytetään suoran ympyrälieriön muotoinen astia, jonka pohjan halkaisija on 17 cm ja korkeus 20 cm. Osoita, että kuulia mahtuu astiaan vähemmän kuin 940.

7. a) Kolmion  $A$  kärjet ovat pisteissä  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$  ja  $(\sqrt{5}, 2)$  ja kolmion  $B$  pisteissä  $(1, 4)$ ,  $(-1, 0)$  ja  $(-3, 2\sqrt{5})$ . Ovatko kolmiot  $A$  ja  $B$  yhdenmuotoisia? Mikä on niiden pinta-alojen suhde? Piirrä kuvio.

b) Veneen pohjassa olevasta reiästä tulee aikayksikössä sisään vesimäärä, joka on suoraan verrannollinen reiän halkaisijan neljänteen potenssiin. Yhdellä pumpulla pystytään pitämään tyhjänä vene, jonka pohjassa on 1,2 cm:n läpimittainen reikä. Kuinka monta samanlaista pumppua tarvitaan pitämään tyhjänä vene, jonka pohjassa on 1,9 cm:n läpimittainen reikä?

8. a) Kivi heitetään umpimähkään ympyrään. Millä todennäköisyydellä se osuu lähemmäksi ympyrän keskipistettä kuin sen kehää?

b) Määritä suurin sellainen luonnollinen luku  $m$ , että  $1 + 2 + 3 + \dots + m \leq 462\,241$ .

9. Tietokoneella, johon voidaan kytkeä joko kirjoitin  $A$  tai kirjoitin  $B$ , valmistetaan 1 200 kappaleen erä mainoslehtisiä. Käyttämällä ensin kirjoitinta  $A$  1 h 55 min ja sitten kirjoitinta  $B$  1 h 30 min tulee työ tehtyä. Sama työ saadaan tehdyksi käyttämällä ensin kirjoitinta  $B$  1 h 20 min ja sitten kirjoitinta  $A$  2 h 10 min. Kuinka monta mainoslehteä kirjoittimet  $A$  ja  $B$  tulostavat minuutissa? Kuinka kauan työ kestää, jos käytetään vain nopeampaa kirjoitinta?

10. a) Maahantuoja asetti tavaralle sellaisen myyntihinnan, että hänen voittonsa tulisi olemaan 10 % kustannuksista, kun kaikki kustannukset otettaisiin huomioon. Kustannuksista 75 % muodostui maksuista hankintamaan valuuttana. Tavaramäärästä oli toimitettu yksi kolmasosa, ja tämän erän oli maahantuoja jo maksanut ja myynyt. Tämän jälkeen hankintamaan valuutan arvo nousi 20 %. Kuinka monta prosenttia maahantuojan pitäisi korottaa tavarantoimittajan myyntihintaa jäljellä olevan kahden kolmasosan erän osalta saadakseen alkuperäisen markkamääräisen voiton?

b) Mikä eksponenttifunktio  $f(x) = a^x$  toteuttaa yhtälön  $f(x+1) = 2f(x)$  kaikilla reaaliluvuilla  $x$ ? Onko olemassa ensimmäisen asteen polynomia  $P$ , joka toteuttaa yhtälön  $P(x+1) = P(x) + 2$  kaikilla reaaliluvuilla  $x$ ? Entä toisen asteen polynomia?



Tehtävissä 3, 5, 8 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä sellainen luku  $x$ , että lukujen  $\pi + 1$ ,  $\pi + x$  ja  $\pi x$  keskiarvo on  $2\pi$ .
2. Kolmion sivujen pituudet ovat 6, 6 ja 8. Määritä kolmion pienimmän kulman sini ja suurimman kulman puolikkaan kosini.
3. a) Määritä ne reaaliluvut  $x$ , jotka ovat käänteislukuaan  $\frac{1}{x}$  suurempia.  
b) Suunnikkaan lävistäjinä ovat vektorit  $\vec{d} = 12\vec{i} + 8\vec{j}$  ja  $\vec{e} = 4\vec{i} - 6\vec{j}$ . Osoita, että kyseessä on neljäkäs.
4. Puutarhuri tarvitsee tuholaitosten torjuntaan 1,5-prosentista mäntysaippualiuosta. Hänellä on käytettävissään liuos, jossa on 20 % saippuaa ja loput vettä. Tästä saadaan sopiva torjuntaliuos vettä lisäämällä. Kuinka monta prosenttia liuoksen vesimäärä tällöin kasvaa?
5. a) On annettu funktiot  $f(x) = e^{2x}$  ja  $g(x) = \ln x$ . Ratkaise yhtälö
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x^3).$$
b) Kyläkaupan kahdesta pysäköintipaikasta kumpikin on keskimäärin 40 minuuttia tunnista varattuna ja loput ajasta vapaana. Keskimäärin 32 minuuttia tunnista ovat molemmat pysäköintipaikat yhtäaikaan varattuina. Kaupalle saapuu samalla hetkellä kaksi autoilijaa. Mikä on todennäköisyys, että molemmat pääsevät heti näihin pysäköintipaikkoihin?
6. Suorakulmaisen särmiön muotoisessa suljetussa lasisäiliössä on 1,20 l vettä. Vaakasuuralla alustalla mitattuna vedenkorkeus on 40 mm. Kun säiliö käännetään kyljelleen, on vedenkorkeus 50 mm, ja kun säiliö käännetään toiselle kyljelleen, on vedenkorkeus 60 mm. Määritä säiliön tilavuus.
7. Euroopan unionin tarkastaja mallintaa satelliittikuvassa näkyvän, trombin tuhoaman metsän alueeksi, joka jää käyrien  $y = \sin x$  ja  $y = \sin 2x$  väliin, kun  $x \in [0, \pi]$ . Mikä on tuhoalueen tarkka pinta-ala mallin mukaan? Pituuden mittayksikkö on kilometri. Oletetaan, että trombin tuhoista maksetaan korvausta 11 500 mk/ha. Kuinka paljon metsän omistaja saa korvausta?

KÄÄNNÄ!

8. a) Pallon sisään asetetaan mahdollisimman suuri neliöpohjainen suora pyramidi. Laske pyramidin ja pallon tilavuuksien suhde.

b) Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$  on

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

9. a) Käyrän  $y = \frac{x^2+1}{x}$  mielivaltaiseen pisteeseen  $P(a, b)$  asetettu tangentti ja käyrän asymptootit rajoittavat kolmion. Osoita, että kolmion ala ei riipu tangentin sivuamispisteestä  $P$ . Piirrä kuvio.

b) Kakku, jonka lämpötila on  $21^\circ\text{C}$ , pannaan paistumaan uuniin, joka pysyy vakio­lämpötilassa  $225^\circ\text{C}$ . Kakun lämpötilan muutos aikayksikössä on suoraan verrannollinen uunin lämpötilan ja kakun lämpötilan erotukseen. Kymmenen minuutin kuluttua kakun lämpötila on  $67^\circ\text{C}$ . Määritä kakun lämpötila  $T$  ajan  $t$  funktiona. Määritä funktion  $T(t)$  avulla kakun lämpötila 40 minuutin kuluttua. Milloin uuniin unohtuneen kakun lämpötila saavuttaa mallin mukaan uunin lämpötilan?

10. Mitä tarkoitetaan avoimella välillä määritellyn funktion  $f$  integraalifunktiolla? Määritä funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x+1| - x$  integraalifunktio. Onko funktiolla  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

integraalifunktiota?





Tehtävissä 4, 7, 8, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä lausekkeen  $x^2 - 6x + 5$  arvo sillä  $x$ :n arvolla, joka toteuttaa yhtälön  $3x + 1 = 0$ .
2. Määritä suorien  $x + 2y = 3$  ja  $2x - 3y = 1$  leikkauspiste. Piirrä kuvio.
3. Tietokilpailussa vastaukset soitetaan palvelunumeroon. Puhelun hinta on 3,90 mk/min + paikallispuhelumaksu. Kilpailun palkintojen yhteisarvo on 160 000 mk. Oletetaan, että kilpailun järjestäjä saa itselleen 75 % edellä mainitusta maksusta 3,90 mk/min ja että yksi puhelu kestää keskimäärin 3 minuuttia. Kuinka monta soittoa järjestäjän on saatava palkintojen arvon keräämiseen?
4. a) Helsinki, Salo ja Turku ovat likipitään samalla suoralla. Helsingin ja Turun välimatka on noin 165 km sekä Salon ja Turun välimatka noin 55 km. Helsingissä oli eräänä päivänä lämpötila 17,1 °C ja Turussa 22,3 °C. Lämpötila muuttui tasaisesti Helsingin ja Turun välillä. Mikä oli tällöin lämpötila Salossa?  
  
b) Millä arvoilla  $x$  on polynomin  $9 + 6x - x^3$  derivaatta positiivinen?
5. Vuonna 1995 erään pesujauheen markkinaosuus oli 15 %. Vuonna 1996 tämän pesujauheen myynti kasvoi 20 % ja pesujauheiden kokonaismyynti kasvoi 10 %. Mikä oli ko. pesujauheen markkinaosuus vuonna 1996?
6. Suorakulmaisen särmiön muotoisen veistoksen leveys on 2,00 m, pituus 1,00 m ja korkeus 3,00 m. Veistoksesta tehdään pienoismalli, jonka tilavuus on sadasosa alkuperäisen veistoksen tilavuudesta. Mitkä ovat pienoismallin mitat?
7. a) Purjehdittaessa näkyi majakka suoraan veneen edessä 2°:n kulmassa veden pintaan nähden. Kun oli edetty majakkaa kohti 250 m, se näkyi 3°:n kulmassa. Kuinka kaukana vene oli nyt majakasta, ja mikä oli majakan korkeus?  
  
b) Lämpömittareiden  $A$  ja  $B$  lukemia  $T_A$  ja  $T_B$  verrattiin tarkan lämpömittarin lukemiin  $T$ . Tulokset ovat oheisessa taulukossa. Laske mittareiden  $A$  ja  $B$  virheet  $T_A - T$  ja  $T_B - T$  ja vertaa mittareiden paremmuutta kussakin lämpötilassa  $T$  erikseen. Tutki, kumman mittarin virheiden keskiarvo on pienempi, ja vertaa tulosta aiempiin. Voidaanko mittareita paremmin vertailla jollakin muulla tunnusluvulla?

|       |       |      |      |      |      |       |
|-------|-------|------|------|------|------|-------|
| $T$   | +10,0 | +6,0 | +2,0 | -2,0 | -6,0 | -10,0 |
| $T_A$ | +11,2 | +7,1 | +0,7 | -1,2 | -6,9 | -10,7 |
| $T_B$ | +10,6 | +6,5 | +2,4 | -1,6 | -5,7 | -9,8  |

KÄÄNNÄ!

8. a) Puolisuunnikkaan yksi kulma on suora ja toinen  $45^\circ$ . Lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista on pituudeltaan  $a$ . Pitemmän lävistäjän pituus on  $4a$ . Määritä puolisuunnikkaan ala.
- b) Hirsirakennuksen pystyttäjä ilmoittaa seinien painuvan kokoon ensimmäisenä vuotena 1 % korkeudesta ja kunakin seuraavana vuotena 60 % edellisen vuoden painumasta. Voiko vastavalmistuneen hirsirakennuksen 270 cm korkeaan huoneeseen huoletta pystyttää 262 cm korkean kaapin?
9. a) Cup-kilpailu järjestetään siten, että osallistujat arvotaan kullakin kierroksella pareiksi. Kukin pari ottelee keskenään, ja voittaja jatkaa seuraavalle kierrokselle, jolla taas arvotaan jäljellä olevat osallistujat pareiksi. Näin jatketaan, kunnes jäljellä on enää kaksi osallistujaa, jotka ottelevat loppuottelun. Kilpailuun on ilmoittautunut 32 osallistujaa. Millä todennäköisyydellä loppuottelussa on kaksi parasta osallistujaa?
- b) Kolmion sivujen pituudet ovat  $3a$ ,  $3a$  ja  $4a$ . Kolmion sisään piirretään alaltaan mahdollisimman suuri suorakulmio, jonka yksi sivu on kolmion pisimmällä sivulla. Määritä tämän suorakulmion ja kolmion alojen suhde.
10. a) Vuonna 1997 kunnallisverotukseen tuli uusi ansiotulovähennys. Vähennys on 20 prosenttia ansiotulojen 15 000 markkaa ylittävältä osalta. Vähennyksen enimmäismäärä on kuitenkin 5 500 markkaa. Verovelvollisen ansiotulon ylittäessä 43 000 markkaa vähennyksen määrä pienenee 2 prosentilla ansiotulon 43 000 markkaa ylittävältä osalta. Esitä vähennyksen  $y$  määrä ansiotulon  $x$  funktiona ja piirrä funktion kuvaaja. Millä tuloilla vähennys loppuu kokonaan?
- b) Koneen ostohinta on 130 000 mk. Käyttöikä on viisi vuotta, jonka jälkeen koneella on 20 000 mk:n poistoarvo. Koneen vuosittainen nettotuotto on 25 000 mk. Laske koneen poistoarvon ja koneen tuottojen ostohetkeen muunnetut nykyarvot, kun vuotuinen korkokanta on 5 %. Päätele tuloksesta, kannattaako koneen ostoa. Opastus: rahamäärän nykyarvo on rahasumma, joka korkoineen ja koron korkoineen vastaa ko. rahamäärää.



Tehtävissä 5, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $\frac{x^2 - 3x}{2x + 3} = x - 3$ .
2. Tuotteen hintaa korotetaan kolmesti  $p$  %, mikä nostaa hinnan kaksinkertaiseksi. Määritä korotusprosentti  $p$ .
3. Millä  $x$ :n arvoilla funktio  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$  ja sen derivaatta  $f'(x)$  saavat yhtäaikaan positiivisia arvoja?
4. Tasamaalla sijaitsevalta räjäytystyömaalta lentää kivi 72 metrin päähän. Kivi katkaisee 48 metrin päässä olevan ohuen puun 13,5 metrin korkeudelta. Oletetaan, että kiven lentorata on paraabeli. Kuinka korkealla kivi käy?
5. a) Tavalliseen korttipakkaan kuuluu 52 korttia, joista 4 on ässiä. Täydestä pakasta vedetään umpimähkään kortti, sitten toinen kortti ja tämän jälkeen vielä kaksi korttia. Vedettyjä kortteja ei panna takaisin pakkaan. 1° Millä todennäköisyydellä ensimmäinen kortti on ässä? 2° Jos ensimmäinen kortti oli ässä, niin millä todennäköisyydellä toinen on ässä? 3° Jos ensimmäinen ja toinen kortti olivat ässiä, niin millä todennäköisyydellä viimeiset kaksi korttia ovat ässiä?

b) Määritä funktion  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{kun } x < 0, \\ e^{3x} + 1, & \text{kun } x \geq 0, \end{cases}$$

se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen  $(1, 2)$  kautta.

6. Kaupungeilla A ja B on kummallakin keskustassaan paikallisradioasema, jonka kuuluvuusalue ulottuu 60 kilometrin päähän asemasta joka suuntaan. Asemien välimatka on 102 km. Autoilija, joka ajaa suoraa tietä kohti kaupunkia B, saapuu kaupungin A aseman kuuluvuusalueelle. Tämän jälkeen hän ajaa 38 km, ennen kuin A:n aseman lähetys lakkaa kuulumasta. Onko hän tällöin jo kaupungin B aseman kuuluvuusalueella?
7. a) Millä  $a$ :n arvoilla yhtälö  $x^2 + y^2 + 2ax + 4ay + 2y + 6a + 1 = 0$  on ympyrän yhtälö? Määritä näiden ympyröiden keskipisteiden muodostama joukko.

b) Kompleksiluku  $z = x + iy$  on myös vektori  $x\vec{i} + y\vec{j}$ . Määritä kaikki kompleksiluvut  $z_1, z_2$ , joille pätee  $z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2$ . Tässä  $z_1 \cdot z_2$  tarkoittaa vektoreiden  $z_1$  ja  $z_2$  skalaarituloa ja  $z_1 z_2$  kompleksilukujen  $z_1$  ja  $z_2$  tuloa.

KÄÄNNÄ!

8. a) Osoita, että yhtälöllä  $5 \tan x - 3 = 10x$  on välillä  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  täsmälleen yksi juuri. Määritä tämän jälkeen juuren arvo yhden desimaalin tarkkuudella.
- b) Taso leikkaa koordinaattiakselit pisteissä  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (0, 5, 0)$  ja  $C = (0, 0, 4)$ . Pisteen  $P = (0, 0, 1)$  kautta asetetaan tasoa vastaan normaali. Missä pisteessä tämä leikkaa tason?
9. Anna esimerkki suljetulla välillä  $[0, 1]$  määritellystä funktiosta  $f$ , jolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa. Piirrä funktion kuvaaja. Voiko tällainen funktio olla kasvava?
10. a) Suoran ympyräkartion muotoisen teltan pohjan säde on 2,4 m ja sivujana 4,0 m. Telttaan sen pohjalle asetetaan suorakulmaisen särmiön muotoinen, neliöpohjainen, tilavuudeltaan mahdollisimman suuri laatikko siten, että sen sivutahkon puolittava pystysuora yhtyy kartion akseliin. Määritä laatikon pohjasärmä, korkeus ja tilavuus.
- b) Kultaseppä valmistaa pikarin 2,20 cm korkean jalan hopeasta valamalla. Valumuotti on ympyräpohjainen pyörähdyskappale, joka syntyy käyrän  $y = 3e^{-(x/2)^2}$ ,  $0 \leq x \leq 2,20$ , pyörittäessä  $x$ -akselin ympäri. Määritä jalan tilavuus kolmen numeron tarkkuudella. Hopean tiheys on  $10,5 \text{ kg/dm}^3$ , ja kultaseppä maksaa hopeasta 897,50 mk/kg. Kuinka paljon maksaa jalan raaka-aine?