

# MATEMAATTISET TEHTÄVÄT

YLIOPPILASKIRJOITUKSISSA

VUOSINA 1874.—1915

VASTAUKSILLA JA OHJEILLA VARUSTANUT

**RAFAËL LAURÉN**

FIL. MAIST.

TOINEN LISÄTTY PAINOS



JYVÄSKYLÄ  
K. J. GUMMERUS OSAKEYHTIÖ

510.2  
HAT  
Lau

JYVÄSKYLÄSSÄ 1916  
K. J. GUMMERUS OSAKEYHTIÖN KIRJAPAINOSSA

Koska vuoden 1912 alussa julkaistu, toimittamani ylioppilaskirjoituksissa suoritettujen matemaattisten tehtävien kokoelma on loppuun myyty, olen noudattanut kustantajan kehoitusta toimittaa uuden painoksen mainittua kokoelmaa. Tähän kokoelmaan olen tietysti entisten lisäksi ottanut vuosien 1912—1915 ylioppilas-esimerkit. Tässäkin kokoelmassa olen esimerkit järjestänyt ajanmukaisesti puolustaen asiaa samoilla sanoilla kuin edellisessä painoksessa: »Oppilaitten, jotka tämänlaatuista kokoelmaa aikovat käyttää, täytyy otaksua tutustuneen koulun koko matematiikkakurssiin ja siis vain kaipaavan tilaisuutta koettaa voimiaan kurssin viimeisen koetehtävien suorittamisessa. Tietenkin haluavat oppilaat silloin saada tehtävät juuri siinä järjestyksessä kuin ne aikoinaan ovat ylioppilaskokelaille annetut. Ajanmukainen järjestys herättää suurempaa harrastusta kuin aineenmukainen, sillä oppilaat ovat edellisessä tapauksessa paremmin tilaisuudessa näkemään, millä edistysasteella he ovat.»

Loppuun olen liittänyt yksityiskohtaisen luettelon esimerkeistä aineenmukaisesti järjestettynä, jotta ne oppilaat, jotka haluavat suorittaa määrätynlaisia tehtäviä, näkisivät, mihin alaan kunkin vuoden kukin esimerkki kuuluu.

Kokoelmaan olen myöskin liittänyt luettelon niistä eri oppikirjoissa tavattavista vastaavista termeistä, jotka kokoelmassa esiintyvät.

Lappeenrannassa tammikuulla 1916.

Tekijä.

**Luettelo eri geometrian oppikirjoissa esiintyvistä termeistä.**

asema = (kuvion) kanta, (kappaleen) pohja.  
 kartio = kooni.  
 korkeusviiva = korkeusjana.  
 pallosegmentin sivupinta = kalotti tai vyöhyke.  
 parallelipipeedi = suuntaissärmiö.  
 perspektiiviasento = homoteettinen asento.  
 prisma = särmiö.  
 proportionsaali = verto.  
 pyramiidi = särmäkartio.  
 segmentti = lohko.  
 sekantti = leikkaaja.  
 sektori = leikkale.  
 sentraali = keskusjana.  
 sentrikulma = keskuskulma.  
 sivupinta = vaippapinta.  
 sivutaso = sivutahko.  
 sivuviiva = sivujana.  
 suorakaide = suorakulmio.  
 sylinteri = lieriö.  
 tangentti = sivuaja.  
 transversaali = suora, joka leikkaa suoria tahi kuviota.  
 tylsä = tylppä.  
 yhdenmukainen = yhdenmuotoinen ( $\infty$ ).  
 yhteellinen = yhteneväinen ( $\infty$ ,  $\infty$ ,  $\equiv$ ).

**Tehtävät.**

**1874.**

1. Montako vuotta pitää 1250 markan olla lainassa 6 % mukaan, jotta sen tuottama korko olisi yhtä suuri kuin 1000 markan korko 5 % mukaan 9 vuodessa?

2. Piirrä neliö, jonka ala on yhtä suuri kuin kahden annetun neliön alojen erotus.

3. Todista seuraava väittämä: Jos neliön keskipisteen kautta piirretään kaksi toinen toistansa vastaan kohtisuoraa viivaa, niin neliö jakaantuu neljään yhteelliseen osaan.

4. Mies sanoi: »Hääpäivänäni oli ikäni vaimoni ikään kuin 4:3, mutta 9 vuotta myöhemmin kuin 5:4.» Vanhako mies oli ja vanhako vaimo heidän hääpäivänensä?

5. Mitkä ovat yhtälön

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

juuret?

6. Yhtiön kauppavoitto 150 mk on jaettava tasan osakkaille. Jos osakkaita olisi ollut 5 enemmän, olisi jokainen saanut 5 mk vähemmän. Montako osakasta oli yhtiössä?

7. Pellolla on pitkin tienviertä 20 kuhilasta 10 m päässä toisistaan. Nämä ovat koottavat pellon päähän

siihen, missä ensimmäinen kuhilas on. Pitkähkö matka on kuljettava, ennenkuin kaikki kuhilaat saadaan kokoon, jos yksi kuhilas kerrallaan viedään?

8. Pallon pinta on  $178,52 \text{ dm}^2$ ; suuriko sen säde on?

9. Suunnikkaan viereiset sivut ovat  $1,72$  ja  $0,85 \text{ m}$  ja niiden välinen kulma on  $125^\circ 3' 40''$ ; suuriko on suunnikkaan ala?

10. Kahden kirkon välillä on korkea vuori. Molemmat kirkot näkyvät paikkaan, josta on  $7 \text{ km}$  toiselle ja  $4 \text{ km}$  toiselle kirkolle. Tähtäyssuunnat mainitusta paikasta kirkkoihin muodostavat keskenään  $62^\circ 21' 20''$  suuruisen kulman. Kuinka etäällä kirkot ovat toisistaan?

## 1875.

1. Todista, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

2. Piirrä ympyrään kolmio, jonka kulmat suhtautuvat toisiinsa kuin  $1:2:3$ .

3. On ympyrä ja sen tasossa piste. Piirrä pisteestä sekantti, joka erottaa ympyrän kehästä kolmannen osan.

4. Isä jakaa  $4400 \text{ mk}$  kahdelle lapsellensa, joista toinen on  $11$  ja toinen  $16$  vuoden vanha, niin, että kummankin osa lisättynä  $5\%$  yksinkertaisilla korollaan hänen täyttäessään  $21$  vuotta on yhtä suuri. Paljonko kumpainenkin lapsi saa jaossa ja mikä osien lopullinen suuruus?

5. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{6x+22} - \sqrt{2x+3} = 3.$$

6. Mies ostaa perunoita  $12$  markalla. Kun hän jonkun ajan kuluttua taas ostaa samalla määrällä

perunoita, on niiden hinta noussut  $20$  penniä kapalta ja hän saa sen vuoksi niitä  $5$  kappa vähemmän. Montako kappa hän ensimmäisellä kerralla rahoillaan sai?

7. Geometrisessa sarjassa on toinen termi  $20$  ja viides termi  $160$ ; suuriko kymmenen ensimmäisen termin summa on?

8. Katkaistun kartion muotoinen astia vetää  $100$  litraa. Pohjan säde on  $3 \text{ dm}$  ja astian korkeus  $4,78 \text{ dm}$ . Suuriko astian suun säde on?

9. Kolmiossa on sivu  $a = 3,1896 \text{ m}$  ja  $b = 2,5762 \text{ m}$  sekä niiden välinen kulma  $C = 57^\circ 11' 12''$ ; määrää kolmion muut kulmat, kolmas sivu ja ala.

10. Pallo, jonka säde on  $2,5 \text{ dm}$  ja paino  $5 \text{ kg}$ , riippuu sileällä pystysuoralla seinällä  $4 \text{ dm}$  pituisessa nauhassa, joka on kiinnitetty pisteeseen pallon pinnalla. Laske nauhan jännitys, ja pallon paine seinää vastaan.

Huom.! Tehtävä voidaan ratkaista käyttämättä trigonometrisia tauluja.

## 1876.

1. On kolme pistettä. Piirrä kolmio, jonka sivut näissä pisteissä jakaantuvat kahteen yhtä suureen osaan.

2. Todista, että suunnikkaassa lävistäjien neliöiden summa on yhtä suuri kuin sivujen neliöiden summa.

3. Todista väittämä: Jos kolmiossa kahden korkeusviivan kantapisteet yhdistetään, saadaan alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmukainen kolmio.

4. Tilastollisten tietojen mukaan  $1000$  miehestä, jotka ovat täyttäneet  $21$  vuotta,  $14$  kuolee  $51$ :llä ikävuodellaan. Sen vuoden lopussa, jonka kuluessa  $1000$

2  
2  
miestä on täyttänyt 21 vuotta, päättävät he yhteisesti panna sellaisen rahasumman kasvamaan korkoa korolle  $4\frac{1}{2}\%$  mukaan, että kun se viimeisen 50-vuotiaan kuolinvuoden lopussa jaetaan niiden 14 perheen kesken, joilta isä 50 vuotiaana on kuollut, kullekin tulee 10000 mk. Paljonko jokaisen on annettava?

5. Kolmessa kylässä on yhteensä 43 taloa; näihin majoitetaan 360 sotamiestä siten, että ensimmäisen kylän taloihin jokaiseen sijoitetaan 6, toisen kylän taloihin kuhunkin 10 ja kolmannen kylän taloihin kuhunkin 12 miestä. Ensimmäisessä kylässä majoilevien sotamiesten luku on yhtä paljon suurempi toisessa kylässä majoilevien miesten lukua, kuin tämä jälkimäinen on kolmanteen kylään majoitettujen miesten lukua suurempi. Montako taloa kussakin kylässä on?

6. Luokan oppilaat päättävät antaa opettajallensa muistolahjan, joka maksaa 84 mk. Kun kaksi oppilasta kieltäytyy ottamasta siihen osaa, täytyy toisten kunkin maksaa 10 penniä enemmän kuin muuten. Montako oppilasta on luokalla?

7. Jaa polynoomi

$$x^2 - 15x + 56$$

tekijöihinsä.

8. Pallosegmentin muotoisen padan korkeus on 1,2 dm ja suun halkasija 2 dm. Paljonko se vetää?

9. Korkkipalloon, jonka halkasija on 1 dm, on asetettava siksi raskas lyijysydän, että pallo vedessä uppoaa tasan puoleen tilavuuttaan. Mikä on sydänpallon säde, jos lyijyn ominaispaino on  $11,33$  ja korkin  $0,24$ ?

2  
10. Maan säde on 6377 km pitkä; suuriko maan ja kuun keskipisteiden väli on, kun maan säde näkyy kuun keskipisteestä  $0^\circ 57' 10''$ :n kulmassa.

1877.

1. Todista väittämä: Jos tasakylkisen kolmion toinen kylki jatketaan kärjen toiselle puolelle itsensä pituisella janalla ja jatkeen päätepiste yhdistetään aseman toiseen päätepisteeseen, niin yhdistysjana on kohtisuorassa asemaa vastaan.

2. Puolita kolmion pinta suoralla, joka kulkee kolmion sivulla olevan pisteen kautta.

3. Kolmion kärjet keskipisteinä on piirrettävä kolme ympyrää niin, että ne kaksittain sivuavat toisensa ulkopuolitse.

4. Vuosikymmenen 1860—70 kuluessa lisääntyi Helsingin väkiluku puolella vuoden 1860 väkiluvulla. Jos väkiluvun lisäys tapahtuisi seuraavinakin vuosikymmeninä samassa suhteessa, paljonko väkeä Helsingissä olisi 1890, kun siellä 1860 oli 21700 asukasta?

5. Mies kävelee kaupungista lähimpään kestikievariin. Kun hän on käynyt 1 tunnin, ajaa matkustaja kyydillä hänen ohitsensa. Kestikievarissa viipyy kyytimies  $\frac{1}{4}$  tuntia ja tapaa paluumatkallansa jalkamiehen 2 km kestikievarista. Kuinka kaukana kaupungista kestikievari on, kun jalkamies 10 km matkalla viipyy 2 tuntia ja kyytimies 50 minuuttia?

6. Kolminumeroisessa luvussa on numeroiden summa 15. Jos luku jaetaan yksiköiden numerolla, saadaan osamääräksi 91; jos lukuun lisätään 99, saadaan toinen luku, jossa on samat numerot kuin alkuperäisessä vaikka vastakkaisessa järjestyksessä. Mikä luku on?

7. 600 m pitkä ja 400 m leveä suorakaiteen muotoinen pelto on keskellä joka kohdalta yhtä leveätä niittyä, jonka ala on 4 kertaa niin suuri kuin pellon. Kuinka leveä niitty on?

8. Paperineliöön, jonka sivu on  $1\frac{1}{2}$  dm, piirretään neliön sivun keskipiste keskipisteenä ja neliön sivu säteenä, ympyränkaari. Jos tätä kaarta vastaava ympyränsektori tehdään kartion sivupinnaksi, suuriko siten saadun kartion tilavuus on?

X 9. Kahdesta eri paikasta katsottuna, joiden etäisyys toisistaan on 100 km, näyttää sama lentotähti syttyvän yhtä korkealla, nim.  $45^\circ$  yli horisontin, mutta aivan päinvastaisissa ilmansuunnissa. Kuinka korkealla maan pinnasta lentotähti on syttynyt, jos maan kehä on 40000 km?

10. Missä on tasa-aineisen ympyränmuotoisen levyn painopiste, jos siinä jossakin kohdassa on ympyränmuotoinen reikä?

## 1878.

1. Pitkäksi tasasivuisen kolmion sivu on, kun sen ala on  $50 \text{ m}^2$ ?

2. Kolmion sivulla on määrättävä sellainen piste, että sen kautta piirretty aseman suuntainen suora erottaa kolmion, joka on yhtä suuri kuin se kolmio, joka aseman puolella syntyy, kun tunnettu piste ja aseman päätepiste yhdistetään.

3. Nelikulmion kolmittain yhdistettyjen sivujen summat ovat 90, 100, 110 ja 120 metriä. Kuinka pitkät sivut ovat?

4. Joukko sotamiehiä marssii täyteen ahdettuna suorakaiteena, jossa on pitkittäin 14 miestä enemmän kuin eturinnassa. Vihollisten nähtävissä lisätään eturintaan 828 miestä niin, että ainoastaan 5 miestä seiso peräkkäin. Kuinka monimiehininen on joukko?

5. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} = 2 + \frac{a}{xy} \\ x^2 - y^2 = b. \end{cases}$$

6. Helsingissä oli 1878 40000 asukasta. Milloin on siellä 1 miljoona asukasta, jos väen lisääntyminen otaksutaan olevan  $2\frac{1}{2}\%$  vuodessa?

7. Suunnikkaassa on yksi sivu  $a = 35 \text{ m}$ , toinen lävistäjä  $d = 63 \text{ m}$  ja lävistäjien tekemä kulma  $v = 21^\circ 36' 30''$ . Määrää toinen lävistäjä  $e$  ja tunnetun sivun (a) viereinen sivu b.

8. Ympyränmuotoisen paperilevyn säde on  $\sqrt{7}$  dm. Neljännes mainitusta ympyrästä leikataan erilleen ja jäljelle jäävästä sektorista tehdään kartion sivupinta. Suuriko kartion tilavuus on?

X 9. Suomi on niiden parallelipiirien välillä, joiden maantieteelliset leveydet ovat  $60^\circ$  ja  $69^\circ$  sekä niiden meridiaanien välillä, joiden maantieteelliset pituudet ovat  $40^\circ$  ja  $48^\circ$ . Suuriko on Suomen ala, jos maan ekvaattori on 5400 maantieteellistä peninkulmaa?

10. Minkä matkan päässä maan keskipisteestä on maan ja kuun vetovoima yhtäsuuri, kun molempien taivaankappalten keskipisteiden väli on 60 maan sädettä ja kuun massa on  $\frac{1}{80}$  maan massasta?

## 1879.

1. Kylässä on kolme taloa, joiden manttaaliluvut ovat  $\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{1}{3}$  ja  $\frac{3}{4}$ . Manttaalien suhteen tulee näitten talojen rakentaa 7 kilometrin pituinen tie. Keskimäisen talon tieosalla on  $\frac{1}{4}$  km leveä suo. Tien rakentaminen suon poikki arvellaan maksavan saman

verran kuin 2 km muuta tietä. Paljonko tietä tulee jokaisen talon osaksi?

2. Etsi polynomin

$$2(3a + 2)x^2 + 9 + (a^2 - 12)x^4 + 9x^6 + 12x + 2(2a - 9)x^3 - 6ax^5$$

neliöjuuri.

3. Kolmen suorakaiteen alat ovat 200, 300 ja 600 m<sup>2</sup>. Suorakaiteilla on kaksittain yksi yhteinen sivu. Pitkätkö niiden sivut ovat?

4. Vuoden 1878 lopussa oli eräällä naisella säästöpankissa 200 mk. Pääomaansa lisää hän joka vuoden alussa 10 mk. Milloin on pääoma kasvanut 500 markaksi, jos luetaan korkoa korolle 5 %:n mukaan?

5. Kolmiossa on määrättävä piste, josta kolmion kärkiin piirretyt janat jakavat kolmion kolmeen yhtäsuureen osaan.

6. Piirrä ympyräviiva, joka kulkee määrätyn pisteen kautta ja sivuaa kahta annettua suoraa.

7. Määrää kulma C kolmiossa, jossa  $a = 100$  m,  $b = 150$  m ja  $c = 200$  m?

8. Suora salama näkyy 40° kulmassa. Salaman ja pamahduksen väli oli 13 sek ja jyrinätä kesti leimahduksen jälkeen vielä 4 sek. Pitkähkö oli salama, kun ääni sekunnissa kulkee  $\frac{1}{3}$  km?

9. Kuinka monta kannua litra on, kun kannu on 100 kuutiokymmenystuumaa, 1 m on 3,3681 jalkaa ja jalka on 10 kymmenystuumaa?

10. Kun harpilla piirretään ympyrä ja harppia kuljetetaan niin, että sen kylkien muodostama taso on alati kohtisuorassa paperin tasoa vastaan, niin harpin kyljet muodostavat liikuntonsa kautta sekä suoran eheän että suoran katkaistun kartion sivupinnat. Suuretke ovat näiden pintojen alat ja sen kappaleen tila-

vuus, jota rajoittavat nämä pinnat ja ympyrän taso, kun harpin kyljet ovat 5 dm ja kärkien väli on 6 dm?

11. Hevonen vetää 500 kg ylämäkeä, jonka nousu on 3 sadalta. Suurenko vastavoiman tulee hevosen voittaa, jos kitkakoeffisientti on 0,03?

1880.

1. Todista väittämä: Jos kolmion kahdesta kärjestä piirretään korkeusjanat, niin näiden kärkien ja korkeusjanojen kantapisteitten kautta käy piirtäminen ympyräviiva.

2. Piirrä kahden samaan tasoon kuuluvan ympyrän yhteiset tangentit.

3. Puolenpäivän aikana tammikuun 1 p. 1880 osoittaa kello Helsingissä 6 t 41 min 50 sek; vuoden kuluessa se edistää säännöllisesti vuorokaudessa 3 min 56,56 sek. Milloin se vuoden kuluessa osottaa samaa tuntia, minuuttia ja sekuntia kun tavallinen oikein käypä kello?

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 9 \\ 5x - 3y + 6z = 15 \\ 8x + 6y - 4z = 32. \end{cases}$$

5. Laivaväelle jaettiin joka päivä matkan kestäessä sama määrä leipää ja matkan päätyttyä oli leipä lopussa. Jos matka olisi kestänyt 5 vuorokautta kauvemmin, niin olisi täytynyt jakaa 6 kg vähemmän päivää kohden, jotta leipävarat riittäisivät. Jos taas matkaan olisi mennyt neljä vuorokautta vähemmän aikaa, niin olisi sopinut jakaa 6 kg enemmän vuorokaudessa ja perille päästessä olisi kuitenkin ollut

jäljellä 18 kg leipää. Montako päivää matka kesti ja paljonko leipää joka päivä jaettiin?

6. Helsingin Nikolainkirkon portaat ovat lampuilla valaistavat; ylimmälle portaalalle asetetaan yksi lamppu, toiselle kaksi, kolmannelle kolme j. n. e., niin että kullekin portaalalle pannaan yksi lamppu enemmän kuin lähinnä olevalle ylimmälle portaalalle. Tähän tarvitaan 1081 lampputta. Montako porrasta on?

7. On tehtävä sylinterin muotoinen rasia niin, että siihen tarkalleen mahtuu pallo, jonka tilavuus on  $14,13 \text{ dm}^3$ . Montako  $\text{dm}^2$  peltiä tarvitaan rasiaan ilman kantta?

8. Kolmiossa on sivu  $a = 19,8 \text{ m}$ , kulma  $A = 17^\circ 0' 12''$  ja kulma  $B = 116^\circ 20' 10''$ ; määrää sivu  $b$ , kulma  $C$  ja kolmion ala.

9. Suorakulmaisen kolmion isompi kateetti on pienemmän ja hypotenuusan keskiproportsionaali ja kolmion ala on  $5 \text{ m}^2$ . Määrää kolmion sivut ja kulmat.

10. Painovoiman kiihtyväisyyden lukuarvo on 981, jos  $\text{cm}$  on pituuden ja sek ajan yksikköinä. Mikä on kiihtyväisyyden lukuarvo, jos  $\text{m}$  on pituuden ja min ajan yksikköinä.

### 1881.

1. On piirrettävä tunnetulla säteellä ne ympyrät, jotka sivuavat tunnettua ympyrää ja joiden keskipisteet ovat tunnetulla, ympyrän tasossa olevalla, suoralla viivalla.

2. Piirrä kolmio, kun kaksi sen kulmista ja sivujen summa on tunnettu.

3. Todista väittämä: Jos tasakylkisen kolmion asemakulmat jaetaan kahtia ja ne pisteet, joissa nämä kah-

tiajakajat leikkaavat kolmion kylkiä, yhdistetään, niin yhdistävä jana on yhdensuuntainen aseman kanssa.

4. Vuokraaja saa suorittaa vuotuisen vuokramaksunsa joko rahassa tai rukiissa ja maidossa näille sovittu hinnasta. Suuriko vuokra on rahassa laskettuna ja mikä rukiille ja maidolle sovittu hinta on, kun vuokraa yhtenä vuonna maksettiin 80 hl ruista, 300 l maitoa ja 320 mk, toisena vuotena 65 hl ruista, 200 l maitoa ja 586 mk 25 p sekä kolmantena 85 hl ruista, 500 l maitoa ja 181 mk 25 p?

5. Ratkaise yhtälö

$$\frac{x-6}{x-12} - \frac{x-12}{x-6} = \frac{5}{6}.$$

6. Myllyssä jauhetaan 5 tunnissa kahdella kivi-parilla yhteensä 9 hehtol. rukiita. Toisella parilla yksin jauhetaan ruishehtolitra 15 minuuttia lyhemässä ajassa kuin toisella. Missä ajassa kumpaisellakin kivi-parilla erikseen jauhetaan ruishehtolitra?

7. Astia on katkaistun kartion muotoinen, sen syvyys on 9 cm, pohjan halkaisija 4 cm ja suun halkaisija 6 cm. Paljonko astia vetää ja suuriko on sen sisäpuolisen pinnan ala?

8. Kolmiossa on  $a = 22 \text{ m}$ ,  $b = 15 \text{ m}$  ja  $C = 33^\circ 45' 12''$ ; määrää muut kulmat ja kolmas sivu.

9. Ympyrän kaaren vastaava jänne on 4 dm ja kaari itse  $225^\circ$ . Suuriko on sen ympyräviivan säde, josta kaari on osa?

10. Kuinka korkea olisi ilmakehä, jos sen tiheys joka kohdalta olisi sama kuin maanpinnalla, jossa sen ominaispaine on 0,0013, kun barometrikorkeus on 760 mm ja elohopean ominaispaine on 13,6?

## 1882.

1.  $\text{R}$  Todista väittämä: Suunnikkaan vastakkaisten kulmain kahtiajakajat ovat joko yhdensuuntaiset tai yhtyvät.

2.  $\text{R}$  Piirrä ympyrässä olevan pisteen kautta jänne siten, että se tässä pisteessä jakaantuu kahteen osaan, joista toinen on kaksi kertaa niin suuri kuin toinen.

3. On piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen asema ja toinen asemakulma, sekä niiden kahden ympyrän keskipisteiden väli, joista toinen on piirretty kolmion sisään ja toinen sivuaa tunnettua asemaa sekä molempien toisten sivujen jatkoja.

4. Mestarilla on apunansa sälli ja oppipoika ja ansaitsee ensimmäisenä kuukautena 60 mk; toisena kuukautena on hänellä kaksi sälliä ja kolme oppipoikaa ja paitsi sitä kuun jälkipuoliskolla kolmaskin sälli sekä ansaitsee 110 mk; kolmantena kuukautena tekee hänen kanssaan työtä kuun edellisellä puoliskolla viisi sälliä ja kolme oppipoikaa sekä kuun jälkipuoliskolla kuusi sälliä ja kaksi oppipoikaa, ja ansaitsee silloin 165 mk. Paljonko ansaitsee hän kuukaudessa erikseen omasta, sällinsä ja oppipoikansa työstä?

5.  $\text{R}$  Ratkaise yhtälö

$$(x + 0,5)(x - 0,5) + \frac{5}{12} = \frac{5x}{6}.$$

6. Määrää  $c$  yhtälöstä  $5x^2 - 7,5x + c = 0$  niin, että juurien neliöiden erotus on  $0,15$ .

7. Suorassa kartiossa suhtautuu korkeus aseman säteeseen kuin  $4:3$ . Jos kartion sivupinta tasoitetaan, niin suuriko on siten syntyneen ympyrän sektorin kulma?

8. Kolmiossa on  $a = 47,96$  dm,  $b = 55,82$  dm ja  $c = 62,62$  dm. Suuriko on  $A$  ja mikä on kolmion ala?

9. Kolmiossa on yksi sivuista 12 cm ja toinen 9 cm; näiden sivujen vastassa olevista kulmista on isomman sini yhtäsuuri kuin pienemmän tangentti. Suuret ovat kolmion kulmat?

10. Pitkähkö matkan tonnin painoinen kappale kulkee 2 minuutissa, jos siihen koko ajan vaikuttaa 10 kilon suuruinen voima liikkeen suuntaan? Painovoiman kiihtyväisyys on  $9,81$ , kun metri on pituuden ja sekunti ajan yksikköinä.

## 1883.

1.  $\text{R}$  Etsi lukujen 1221, 2849, 3367 ja 4995 suurin yhteinen tekijä.

2.  $\text{A:n}$ ,  $\text{B:n}$  ja  $\text{C:n}$  piti jakaa keskenänsä erään rahasumman suhteessa  $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$ . Jostakin syystä täytyi  $\text{C:n}$  jättää puolet osastansa  $\text{A:n}$  ja  $\text{B:n}$  kesken jaettavaksi suhteessa  $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ . Miten on summa jaettava?

3.  $\text{R}$  Näytä toteen, että viisikulmiossa kaikkien lävistäjien summa on pienempi kuin 2-kertainen piiri.

4. Suorakaiteen sivut ovat 225 ja 157 pituusyksikköä. Suorakaide on jaettava vähimpään lukuun neliöitä. Montako saadaan ja pitkätkö ovat niiden sivut?

5.  $\text{A}$  oli velkaa  $\text{B:lle}$  113 mk. Suorittaessaan oli  $\text{A:lla}$  ainoastaan 5 markan ja  $\text{B:llä}$  ainoastaan 12 markan seteleitä. Maksu tapahtui siten, että he vaihtivat setelit keskenänsä. Paljonko rahaa oli kummallakin, kun heillä yhteensä oli 257 mk?

6.  $\text{R}$  Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2(x + y) = 9 \\ x - y = 7. \end{cases}$$

7. Kolmion sivut jaetaan  $n + 1$  yhtä suureen osaan ja jakopisteet yhdistetään siten, että yhdistävät janat tulevat sivujen suuntaisiksi. Monesko osa on transversaalien summa kolmion piiristä ja milloin on tämä summa yhtä suuri kuin piiri?

8. Laske  $\cos \frac{5}{2}^\circ$  juurilausekkeena.

9. Muuta logaritmeja käyttämättä  $\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$  desimaaliluvuksi kahdella desimaalilla.

10. Syyskuussa v. 1872 mitattiin Helsingin tähtitornista Nikolainkirkon huipun ja zenitin väli; tämä kulma oli  $87^\circ 5' 59''$ . Tähtitornin ja kirkon vaakasuora väli on 950 m; tähtäyskone oli 30,6 m yli merenpinnan. Korkeallako yli merenpinnan on kirkon huippu?

11. Kartion aseman säde on  $\sqrt[3]{3}$  dm ja korkeus  $\sqrt{27}$  dm. Määrää kartion tilavuus ottamalla kolme desimaalia.

12. Miten sopii tangolla, joka on tasa-aineinen ja joka kohdaltaan yhtä vahva, määrätä kappaleen paino, jos tangon paino tunnetaan?

## 1884.

1. Etsi lukujen 989, 2623 ja 3139 pienin yhteinen jaettava. 440401.

2. Todista, että kaikkien niiden kolminumeroisten lukujen summa, joissa on samat numerot, on jaollinen 3:lla, 37:llä sekä numeroiden summalla.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

4. Suorakaiteen piiri on 16 m ja ala  $7 \text{ m}^2$ . Pitkätkö ovat suorakaiteen sivut?

5. Toisen asteen yhtälössä on juurien summa a ja niiden neliöiden summa b. Mikä on yhtälö?

6. Piirrä x, jos  $x : a = 1 : \sqrt{2}$  ja a on tunnettu jana.

7. Suora viiva ja sen ulkopuolella oleva piste tunnetaan; pisteen kautta on asetettava taso kohtisuoraan tunnettua suoraa vastaan.

8. Laske  $\sin x$ , kun  $\cotg \frac{x}{2} = a$ . Mikä on  $\sin x$  arvo, jos  $a = 1 + \sqrt{2}$ ?

9. Kolmiossa on yksi sivuista  $a = 704$  ja toinen  $b = 302$  sekä jälkimäisen sivun vastainen kulma  $B = 25^\circ 14' 13''$ . Määrää muut sivut ja kulmat.

10. Kartio leikataan aseman suuntaisella tasolla kahteen osaan, jotka suhtautuvat toisiinsa kuin m:n. Miten on taso asetettava? Miten, jos kartio on jaettava kahtia?

11. Tunnetaan taso ja sen ulkopuolella kaksi pistettä, jotka molemmat ovat samalla puolella tasoa. On tasossa määrättävä piste, missä kimmoinen kappale kohtaa tasoa, jos kappale heitettynä toisesta tunnetusta pisteestä ponnahduksen jälkeen kulkee toisen pisteen kautta.

## 1885 A.

1. Todista, että luku, jonka  $m + n$  viimeistä numeroa muodostavat  $2^m \cdot 5^n$ :llä jaollisen luvun, itsekkin on jaollinen sillä tulolla.

2. Toisen asteen yhtälön koeffisientit ovat ratsionaalisia lukuja ja yhtälön toisena juurena on  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ . Mikä on yhtälö?

3. Opettaja antoi oppilaillensa kaksi kokonaista lukua kerrottavaksi keskenänsä ja käski heidän, kertomisen toimitettua, koettaaksensa oliko oikein laskettu, jakaa tulo pienemmällä luvulla. Kolmen oppilaan jakolasku ei käynyt tasan, vaan sai yksi heistä 672 osamääräksi ja 77 jäännökseksi, toinen 667 osamääräksi ja 82 jäännökseksi ja kolmas 611 osamääräksi ja 14 jäännökseksi. Jakaminen oli kyllä oikein toimitettu, mutta kertomisessa oli kukin heistä tehnyt laskuvirheen; ensimmäinen oli nimittäin unhottanut eräässä paikassa lisätä 2 »muistista», toinen oli seuraavassa paikassa vasemmalle kädelle unhottanut lisätä 5 »muistista» ja kolmas oli unhottanut tätä seuraavassa paikassa lisätä 6 »muistista». Mitkä olivat ne kaksi lukua, mikä oikea tulo ja mitkä niiden kolmen oppilaan tulot?

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x : y = y : z \\ x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$$

5. Jos murtoluku, jonka nimittäjä on 7, muutetaan desimaaliluvuksi, niin mitkä luvut saattavat olla sen jaksoina?

6. Etsi yhtälön  $(\frac{2}{3})^{2x} + (\frac{2}{3})^x = \frac{2}{3}$  reaaliuuri desimaalilukuna, jossa on 5 desimaalia.

7. Montako ympyrää, joissa säteet ovat yhtä suuret, sopii piirtää niin, että ne sivuavat toisiansa peräkkäin sekä erästä ympyrää, jonka säde on yhtä suuri kuin edellä mainittujen ympyröiden?

8. Tunnetulla suoralla on määrättävä ne pisteet, joista tunnettu ympyrä näkyy määrätysssä kulmassa.

9. Kahden kuutionmuotoisen jyvähinkalon asemesta on otettava suorakulmaisen parallelipipeedin muotoinen hinkalo, jonka asemana on neliö ja jonka korkeus on oleva yhtä suuri kuin molempien tunnettujen hinkaloiden korkeudet yhteensä. Määrää hinkalon aseman särmä.

10. Minkä sentrikulman tangentit ja vastaavaiset jänteet ovat yhtä suuret?

11. Kun pilvi nähtiin erästä paikasta, näkyi se lounaassa ja oli  $43^\circ 35' 8''$  yli horisontin. Toiseen, 2526 metriä etelään päin olevaan paikkaan, näkyi samalla kertaa mainittu pilvi luoteessa. Korkeallako yli maanpinnan oli pilvi?

12. Kun oli purjehdittava A:sta B:hen, joiden paikkojen välillä meressä käy virta, suunnattiin laiva suoraan etelään. Jollei virtaa olisi ollut, olisi laiva purjehtinut tähän suuntaan 50 km nopeudella tunnissa. Perille saapui se 54 tunnin kuluttua. Paluumatkalla ohjattiin laiva luoteeseen, johon suuntaan se olisi purjehtinut 60 km tunnissa, jollei virta olisi siihen vaikuttanut, ja saavuttiin 66 tunnin kuluttua A:han. Määrää virran suunta ja nopeus.

1885 B. \*)

1. Kun muutamien henkilöiden kesken jaettiin 247 mk, tuli jokainen saamaan 6 mk enemmän kuin oli henkilöitä. Montako henkeä oli?

2. Ympyrän kehällä, jonka pituus on 100 metriä, liikkuu kaksi kappaletta niin, että ne kohtaavat tois-

\*) Koska yleisesti valitettiin, että 1885-vuoden tehtävät olivat liian vaikeat, antoi ylioppilastutkintovalikunta uudet esimerkit.

sensa joka 20:s sekunti, jos liikkuvat samaan suuntaan, mutta joka 4:s sekunti, jos liikkuvat eri suuntiin. Kuinka suuri on kummankin kappaleen nopeus?

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10. \end{cases}$$

4. Jaa luku  $a$  kahteen tekijään, joiden summa on mitä pienin.

5. Mikä on päättymättömän sarjan  $1 - \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^4 - \dots$  summa?

6. Jos kolmioon on piirretty ympyrä ja sen keskipisteen kautta yhden sivun suuntainen suora viiva, niin tämä viiva leikkaa molemmat muut sivut osiin niin, että ensimmäitun sivun vieressä olevien osien summa on yhtä suuri kuin kolmion sisälle lankeava osa yhdensuuntaisesta suorasta.

7. Piirrä neliön ympäri toinen tunnettu neliö. Milloin on tehtävä mahdollinen?

8. Minkä matkan päässä pallosta näkyy  $\frac{1}{4}$  sen pinnasta?

9. Kolmiossa on  $a:b = 3:4$  ja  $B = 2A$ . Suuriko on kulma  $A$ ?

10. Kun erivartisen vaa'an toiseen kuppiin pantiin eräs tavara, painoi se 3 kg; mutta pantuna toiseen kuppiin  $3\frac{1}{3}$  kg. Mikä on tavarän oikea paino?

1886.

1. Kahdenmarkkan rahassa on kehäkirjoituksena: Hopeata  $83\frac{1}{3}$  osaa. Vaskea  $12\frac{2}{3}$  osaa. Rahan toisella puolen on kirjoitettu: 47,24 kappaletta naulasta selvää hopeata. On määrättävä, paljonko painaa yhden markkan raha.

2. Kaupungissa tuli jokaisen talonomistajan suostaa kaupungin kassaan 5 % saadusta hyörymäärästä. Sitten määrättiin, että mainittu prosentti oli oleva 10. Monellako prosentilla täytyy talonomistajien korottaa hyöryä saadakseen saman puhtaan säästön kuin ennen?

3. Jaa trinoomi  $11x^2 - 8x - 3$  tekijöihin, jotka ovat ensimmäistä astetta  $x$ :n suhteen.

4. Kahden luvun summa on 1886 ja niiden pienin yhteinen jaettava 35351. Mitkä ovat luvut?

5. Hangon radan perustajat tarjosivat aikoinaan radan Suomen valtion lunastettavaksi sillä ehdolla, että valtio kaupan päätettäessä maksaisi 600000 mk ja sittemmin joka puolen vuoden loputtua saman summan 37 vuotena. Minkä summan olisi valtion pitänyt heti ja yhdellä kertaa maksaa, jos luetaan korkoa korolta 6 % mukaan?

6. Todista, että teräväkulmaisessa kolmiossa kaksi korkeusviivaa leikkaa toisiaan niin, että toisen osien tulo on yhtä suuri kuin toisen osien tulo.

7. Piirrä suunnikas, kun tunnetaan sen sivut ja toinen niistä kulmista, joita lävistäjät muodostavat keskenänsä.

8. Tukkikaupassa lasketaan toisinaan sylinterinmuotoisen tukin tilavuus, jos tukissa on sydän-mätä, siten että tukin halkaisijasta ( $d$ ) vähennetään mädän halkaisija ( $d_1$ ) ja jäännös pidetään semmoisen sylinterinmuotoisen tukin halkaisijana, jossa ei ole mätää. Kumpainenkö, ostaja vai myyjä häviää tämän laskun mukaan, ja montako % kelpaavasta puusta on tuo häviö?

9. Kahden yhdenmukaisen kartion tilavuudet suhtautuvat toisiinsa kuin  $m:n$ . Miten suhtautuvat toisiinsa niiden sivupinnat?

10.  $\sin x = \frac{3}{4}$  ja  $\sin y = \frac{5}{13}$ . Laske  $\sin(x + y)$ .

11. Kolmiossa on yksi sivuista 10 m ja toinen 20 m sekä kolmion ala 60 m<sup>2</sup>. Määrää kolmas sivu.

12. Miten on kolmeen pisteeseen, joiden keskinäiset välit tunnetaan, jaettava eräs paino, jotta siten saatujen painovoimien painopisteenä tulisi olemaan kolmioon piirretyn ympyrän keskipiste?

1887.

1. Eräänä vuonna oli vehnätynnyrin hinta 2 % ja sen paino 4 % suurempi kuin edellisenä vuotena. Monellako %:lla pitää leipurin korottaa tai alentaa vehnäleivän hintaa, saadakseen saman voiton kuin ennenkin?

2. Kun kahden luvun suurin yhteinen tekijä etsitään uudistettujen jakojen kautta, saadaan osamääräksi järjestyksessä 4, 5, 1 ja 2 sekä suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi 111. Mitkä ovat luvut?

3. Huvilan hinta oli maksettava siten, että 4000 mk maksettaisiin heti ja 5253 mk  $\frac{1}{2}$  vuoden kuluttua; sittemmin ehdotti myyjä, että ostaessa piti maksaa 6500 mk ja 1 vuoden kuluttua 2756 mk. Jos molemmat maksutavat ovat yhtä edulliset, kysytään, minkä %:n mukaan laskettiin korko ja paljonko piti myyjän saada, jos kauppasumma olisi heti maksettu?

4. Suunnikkaan piiri on 10 m ja sen toinen lävistäjä 4 m sekä sen vastassa oleva kulma 60°. Suuriko on toinen lävistäjä ja ala?

5. Todista, että säännöllisen viisikulmion kaksi lävistäjää, jotka eivät lähde samasta kärjestä, jakavat toisensa jatkuvaisessa suhteessa.

6. Miten on oppikirjoissa tavattava kahden janan keskiproportsionaalin etsimistä koskeva sääntö muo-

dostettava, jos puoliympyrän asemesta piirretään joku mielivaltainen ympyränkaari?

7. Katkaistun kartion muotoisen vesisäiliön korkeus oli 4  $\frac{1}{2}$  m, pohjan halkaisija 5 m ja suun halkaisija 5  $\frac{1}{2}$  m. Uusi säiliö oli tehtävä edellisen kanssa yhdenmukaiseksi niin, että se tulisi vetämään 300 m<sup>3</sup>. Minkä mittaisiksi ovat uuden säiliön osat tehtävät?

8. Ympyrään piirretty jänne on  $\frac{1}{4}$  kehän pituudesta. Suuriko on pienempi niistä kahdesta kaaresta, joihin jänne jakaa kehän?

9. Kolmiossa on yksi sivuista 10 m, vastainen kulma 31° 21' 36" sekä molempien toisten sivujen summa 20 m. Laske joko muiden sivujen pituudet taikka kolmion ala.

10. Katkaistun suoran kartion muotoisessa kuppaussarvessa oli sivuviiva 4 cm, pohjan halkaisija 1  $\frac{1}{2}$  cm ja suun halkaisija 3 cm sekä siihen suljetun ilman jänteveys 360 mm. Monenko kilon voimalla painaa ulkoilma särven ihoa vastaan, jos barometrin silloinen korkeus oli 760 mm? (Elohopean ominaispaino = 13,6).

1888.

1. Mikä on  $\frac{a}{b}$ :n arvo, jos

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{2} \quad (1)^*$$

2. Maitoon, jota eräs määrä maksoi 60 penniä, lisättiin sen verran vettä, että seosta maksoi sama määrä vain 40 penniä. Montako % vettä lisättiin? (1)\*

3. Tukkukauppias myi tehtaasta ostamansa tavaran vähittäismyyjälle hintaan, joka eräällä %:lla oli korkeampi kuin tehtaan hinta. Vähittäismyyjä myi

\*) (1) = helppo.

tavarahan hintaan, joka oli yhtä monta % känen osto-hintaansa suurempi. Tavarahan hinta tuli silloin olemaan 21 % korkeampi kuin tehtaan hinta. Montako % voitti kumpainenkin kauppias? (1)

4. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{3-x}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

5. Etsi yhtälöiden

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

juuriryhmät. (2)\*

6. Kolmio, jonka sivut ovat  $a = 3$  m,  $b = 29$  m ja  $c = 30$  m, on muutettava toiseksi, niin että sivun  $b$  vastassa oleva kulma jää muuttumatta, mutta piiri on tuleva puoleksi tunnetun kolmion piiristä. Mitkä ovat uuden kolmion sivut  $a'$ ,  $b'$  ja  $c'$ ? (3)\*\*

7. Jos kahdesta pisteestä, jotka ovat ympyrän halkaisijalla tahi sen jatkeilla molemmin puolin keskipistettä ja yhtä kaukana siitä, piirretään kohtisuorat jananat mielivaltaista tangenttia vastaan, niin on todistettava, että näiden kohtisuorien summa tai erotus on yhtä suuri kuin halkasija. (1)

8. Neljä suoraa  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$  ovat samassa tasossa. Piirrä  $d$ :n suuntainen suora niin, että  $b$  jakaa kahtia sen osan piirretystä suorasta, joka on  $a$ :n ja  $c$ :n välillä. (2)

9. Sylinterinmuotoinen tukki, jolla on vaakasuora asema, uppoaa veteen  $\frac{3}{4}$ :ksi halkaisijataan. Määrää tämän mukaan puun ominaispaino. (2)

10. Siihen tähtitieteelliseen työhön, jonka tarkoituksena oli taivaan pohjoispuoliskon tutkiminen, otti

\*) (2) = keskink. vaikea; \*\*) (3) = vaikea.

osaa Helsingin observatorio, tarkastamalla sitä vyöhykettä, joka on 55:n ja 65:n deklinatsioonipiirien välillä. Monesko osa koko työstä tuli mainitun observatorion osalle? (1)

11. Ympyrän kehästä on erotettava kaari niin, että vastaavan janteen suhte säteeseen on yhtä suuri kuin kaaren cosini. Mikä on kaaren asteluku? (2)

12. Kolmiossa on sivu  $a = 99,78$  cm,  $b = 43,56$  cm ja  $c = 86,86$  cm. Suuriko on kulma  $A$ ? (1)

1889.

1. Laske yhteen lausekkeet  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  ja  $\frac{a - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  sekä saata summa yksinkertaisimpaan muotoonsa. (1)

2. Joku aika sitten oli hopean ja kullan arvojen suhde 1:15; nykyään on suhde 1:21. Montako % on kullan arvo kohonnut ja montako % hopean arvo alentunut? (1)

3. Mies osti 8075 markalla kahdenlaisia arvopapereita, joiden kumpaisenkin nimellisarvo oli 100 mk. Toisen arvopaperilaadun silloinen arvo oli  $101\frac{1}{4}$  sekä tuotti korkoa 4 %; toisen arvo oli  $100\frac{3}{4}$  ja tuotti korkoa  $4\frac{1}{2}$  %. Vuotuista korkoa sai mies kaikkiaan 345 mk. Mootako kappaletta kumpaakin laatua osti mies? (1)

4. Ratkaise yhtälöryhmä

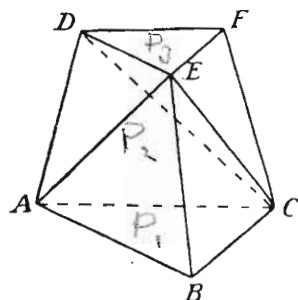
$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ xz = 90 \\ x^2 + z^2 - y^2 = 68. \end{cases} \quad (1)$$

5. Piirrä se jana, jonka lukuarvona on yhtälön  $x^2 + px = q^2$  positiivijuuuri, jos  $p$  ja  $q$  ovat tunnettujen janojen lukuarvoja saman mitan suhteen. (1)

6. Jos on piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sivut  $a$  ja  $b$  sekä kulma  $B$ , niin saattaa, jos  $b < a$ , piirtää kaksi kolmiota  $ABC$  ja  $A'BC$ . Todista, jos kolmiatta sivua kumpaisessakin kolmiossa merkitään  $c$  ja  $c'$ , että  $a^2 - b^2 = cc'$ . (2)

7. Piirrä tunnettu jana asemana kolmio, jonka vastakkainen kärki on tunnetulla suoralla ja painopiste toisella tunnetulla suoralla. (2)

8. Miten on piirrettävä ympyrä, jonka ala on yhtäsuuri kuin tunnetun suoran sylinterin tai kartion koko pinta-ala? (1)



Kuva 1.

9. Kolmisivuinen katkaistu pyramiidi,  $ABCDEF$  on jaettu kahdella tasolla  $EAC$  ja  $ECD$  kolmeen pyramidiin  $EABC = P_1$ ,  $EACD = P_2$  ja  $CDEF = P_3$ . Todista, että  $P_1 : P_2 = P_2 : P_3$ . Mikä sääntö saadaan tästä katkaistun pyramiidin tilavuuden laskua varten? (3) (Katso kuv. 1.)

10. Määrää kolmion kulma  $A$  yhtälöstä

$$\sin A + \cos A = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (2)$$

11. Laske kolmion ala, jos kaksi sen kulmista on  $137^\circ 19' 18''$  ja  $23^\circ 53' 20''$  sekä niiden välissä oleva sivu  $19,243$  metriä. (1)

12. Heilurikello, joka ei ole lämmön vaikutuksen alainen, käy oikein Helsingissä. Jos kello muutetaan Pariisiin, niin hidastuu sen kulku 44 sek vuorokaudessa. Missä suhteessa keskenänsä ovat painovoiman kiihtyväisyydet Helsingissä ja Pariisissa? (1)

1890.

1. Suomen hopearahassa on hopean ja kuparin painosuhte sama kuin  $83 \frac{1}{3} : 12 \frac{2}{3}$  ja  $94,48$  markassa on 1 naula selvää hopeata. Mikä raha-arvo on markanrahassa olevalla kuparilla, jos naulasta kuparia saadaan kuparirahoja 3 markan 32 pennin arvosta? (1)

2. Toimita jako  $(a^5 b^2 + a^2 b^5) : (a + b)$ . (1)

3. A ja B olivat kauppaliikkeeseen panneet rahoja, joiden keskinäinen suhde oli  $28 : 29$ . A otti pois 292 päivän kuluttua rahansa sekä niille kasvaneen koron; B otti rahansa korkoineen pois jo 219 päivän kuluttua. Koska molemmat henkilöt saivat yhtäsuuret summat, kysytään: minkä % mukaan oli korko laskettu, jos vuoteen luetaan 365 päivää? (1)

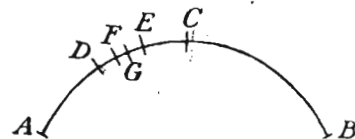
4. Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{x^2 - 2} + \frac{\sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} = 1. \quad (1)$$

5. Ympyrän kaari

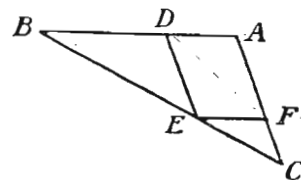
$AB$  jaetaan kahtia pisteessä  $C$ , kaari  $CA$  kahtia pisteessä  $D$ , kaari  $DC$  kahtia pisteessä  $E$ , kaari  $ED$  pisteessä  $F$  j. n. e. Si-

ten saadaan rajapiste  $X$ . Suuriko osa on  $AX$  koko kaaresta  $AB$ ? (1) (Katso kuv. 2).



Kuva 2.

6. Kolmioon  $ABC$  piirretyn suunnikkaan  $ADEF$  ala on  $\frac{1}{n}$  kolmion alasta. Laske, suuretko ovat suhteet  $AD : AB$  ja  $AF : AC$ . (2) (Katso kuv. 3).



Kuva 3.

7. Neljä pistettä A, B, C ja D ovat sellaisessa asennossa, että A:n ja B:n kautta sekä C:n ja D:n kautta piirretyt suorat leikkaavat toisensa pisteessä E niin, että  $EA : EC = ED : EB$ ; todista että mainittujen neljän pisteen kautta käy piirtäminen ympyräviiva. (1)

8. Etsi nelikulmiossa sellainen piste, että siitä kumpaan hyvänsä pariin vastakkaisia kärkiä piirretyt janat jakavat nelikulmion kahteen yhtäsuureen osaan. (3)

9. Määrää sen sylinterin korkeus ja aseman säde, jonka sivupinta ja tilavuus ovat yhtä suuret kuin pallon pinta ja tilavuus, jos pallon säde on  $r$ . (1)

10. Sin  $x$  on määrättävä  $\operatorname{tg} x$ :n funktioonina ja selitettävä, miten kaavassa tavattava kaksoismerkki on käytettävä. (1)

11. Suorakulmaisessa kolmiossa ovat kateetit 244 m ja 151 m. Määrää kolmion kulmat. (1)

12. Kalle ja Otto laskevat alas suorasta sileästä mäestä. Kun Kalle on joutunut puoliväliin mäkeä, lähtee Otto liikkeelle. Minkä osan mäestä on Otto laskenut silloin, kun Kalle on joutunut mäen alapäähän, jos niiden alkunopeudet oli 0 ja kitka on kumpaisenkin kelkalla sama. (2)

## 1891.

1. Kolme miestä A, B ja C oli eräänä päivänä yht'aikaa työstään vapaana; A on vapaa joka 12:s, B joka 15:s ja C joka 16:s päivä. Monenko päivän kulluttua ovat he ensi kerran kaikki kolme yht'aikaa vapaana?

2. Etsi kolminumeroinen luku, jossa 1:ksi kymmenien luku on 3 kertaa niin suuri kuin satojen luku, 2:ksi yksiköiden luku on 1 pienempi kuin kymmenien

luku ja 3:ksi, jos luvun numerot kirjoitetaan vastakkaiseen järjestykseen, saadaan luku, joka on 297 suurempi kuin etsittävä luku.

3. Etsi polynoomien  $a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3$  ja  $a^2 - 5ab + 4b^2$  suurin yhteinen tekijä.

4. Näytä toteen, että  $a^2$  ja  $a^3$  ovat parittomia lukuja, jos  $a$  on pariton luku.

5. Miehiä ja naisia, yhteensä 32 henkeä, purkivat 480 säkin suuruisen kahvilastin. Joka miehen piti kantaa 3 kertaa niin monta säkkiä kuin miesten luku oli, mutta joka naisen vain puolet naisten luvusta. montako miestä ja montako naista oli työssä?

6. Ratkaise yhtälöryhmä

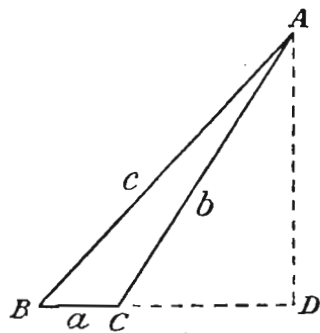
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 y^2 = a^2 b^2 - b^4 \end{cases}$$

7. Kaksi vuorta, joista kumpaisenkin huippu on 1000 m yli meren pinnan, ovat semmoisen etäisyyden päässä toisistaan, että välillä olevan meren kuperuuden takia toisen huipulta näkyy toisen huippu aivan meren pinnassa. Vuorten huippujen väli on 225 km. On määrättävä maan säde.

8. Jos nelikulmion sivut jaetaan kahtia ja perätiin seuraavat jakopisteet yhdistetään, saadaan suunnikas. Todista, että sen ala on puoli tunnetun nelikulmion alasta.

9. Tunnetaan ympyrä ja sen ulkopuolella piste. Piirrä pisteestä sekantti niin, että ympyrän sisään lankeava osa siitä on yhtä suuri kuin säde.

10. Määrää sen pyramiidin korkeus jonka asemana on säännöllinen kuusikulmio, ja jonka kuutiosisältö on yhtäsuuri kuin aseman särmän lukuarvo kuutioksi korotettuna.



Kuva 4.

11. Kolmiossa ABC tunnetaan kulma  $B = 47^\circ 30' 12''$ , kulma  $C = 122^\circ 41' 24''$  sekä korkeusviiva  $AD = 11,11$  cm. Määrää sivut  $b$  ja  $c$ . (Katso kuv. 4).

12. Paljonko mekaanista työtä tulee käyttää 3000 vesilitran nostamiseen 240 metrin syvyydestä?

## 1892.

1. Kaksi miestä A ja B kyntää peltoa. Sillä aikaa, kun A kyntää 6 vakoa, kyntää B 5 vakoa, vaikka A:n kyntämät vaot ovat 100 metrin ja B:n kyntämät vain 90 metrin pituisia. Minkä ajan kuluessa on B:n aura kulkenut saman matkan, kuin A:n aura on kulkenut 10 tunnissa?

2. A ja B yhteisesti tekevät erään työn 12 päivässä, A ja C yhteisesti toimittavat saman työn 16 päivässä sekä B ja C yhteisesti 24 päivässä. Missä ajassa A, B ja C yksin tekisivät mainitun työn?

3. Eräs luku sisaruksia peri 168000 mk, jotka olivat tasan jaettavat heidän kesken. Koska kaksi heistä kuoli, jaettiin niiden osuudet tasan muitten kesken, joten kukin heistä tuli näiden kahden osasta saamaan 7000 mk. Montako sisarusta oli elossa?

4. Jaa tekijöihinsä polynomi

$$a^4 - 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3b^2c^2 - 4c^4.$$

5. Jaa luku  $a$  kahteen semmoiseen osaan, että summa niiden osien kuutioista on mitä pienin ja määrää tämä minimiarvo.

6. Etsi sen ympyrän keskipiste, jolle kolmesta tunnetusta pisteestä piirretyt tangentit ovat yhtä suuret.

7. Piirrä suora, joka kolmion ABC:n sivun BC:n kanssa tekee määrätyn suuruisen kulman sekä leikkaa CA:n jatkon niin, että se osa piirretystä suorasta, joka on kolmion sisällä, on yhtä suuri kuin se osa siitä, mikä on CA:n jatkon ja AB:n välillä.

8. Piirrä ympyrä, jonka kehä kulkee kahden tunnetun pisteen kautta ja sivuaa tunnettua ympyrää.

9. Kolmio, jonka asema on 5 m ja korkeus 2,4 m, ajatellaan kerran kääntyvän asemansa ympäri. Suuriko on siten syntyneen kappaleen tilavuus?

10. Suunnikkaassa ovat lävistäjät 18 cm ja 24 cm sekä isommat sivut 16 cm pituiset. Suuret ovat lävistäjien tekemät kulmat?

11. Määrää suorakulmaisessa kolmiossa terävät kulmat, jos toinen kateetti on hypotenuusan ja toisen kateetin keskiproportsionaali.

12. Kappale, joka painaa 4 kg, nostetaan kädellä ylös siten, että se joutuu tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen, jonka kiihtyväisyys on puolet painovoiman kiihtyväisyydestä. Suuriko paine vaikuttaa käteen, kun kappaleen oma painokin otetaan lukuun?

## 1893. K.

1. Ratsastaja, joka vuorokaudessa matkustaa 15 tuntia, kulkee 20 vuorokaudessa 1875 km. Montako tuntia vuorokaudessa pitäisi hänen matkustaa, että hän 18 vuorokaudessa ennättäisi 2000 km, kun hän kumpaisessakin tapauksessa matkustaa samalla nopeudella?

2. Etsi polynomin  $49a^2b^2 - 8b^3 (3a - 2b) + 5a^3 (5a - 6b)$  neliöjuuri.

3. // Todista, että kokonaisluku, jossa numeroiden summa on jaollinen 9:llä, itsekin on jaollinen 9:llä.

4. Määrää ne y:n arvot, jotka vastaavat  $x = -1$  yhtälössä  $x^2 + 3y - 2y^2 - 2x = 1$ .

5. Mies kylvää pienen määrän ulkomaalaista kau-raa. Sadon tästä hän kylvää toisena vuotena ja sitten joka vuosi edellisen vuoden sadon. Kolmannen vuoden sato oli 51,2 litraa ja viidennen vuoden sato 3276,8 litraa. Paljonko kylvi hän ensimmäisenä vuotena ja monennenko jyvän sai hän pellostaan, jos otaksutaan, että sadon ja kylvön suhde pysyi kunakin vuotena samana?

6. Piirrä suorakaide, jonka ala on yhtä suuri kuin tunnetun neliön ala ja jossa kahden viereisen sivun erotus on tunnettu.

7. Ympyrä ja sen ulkopuolella oleva piste tunne-taan. Etsi tunnettua pistettä ja ympyrän keskipistettä yhdistävällä suoralla sellainen piste, että sen väli tun-netusta pisteestä on yhtä suuri kuin ne tangentit, jotka etsitystä pisteestä piirretään ympyrälle.

8. Pallosegmentin korkeus on  $k$  ja sen asemaan piirretyn tasasivuisen kolmion sivu on  $l$ . Mikä on sen pallon säde, josta segmentti on erotettu?

9. Kello  $11^h 2^m 4^s$  e. p.p. oli kulma, jonka tähtäys-viiva erästä höyrylaivasta majakkaan tekee laivan kulkusuunnan kanssa,  $68^\circ 4' 13''$ ; kello  $11^h 35^m 40^s$  e.p.p. samana päivänä oli mainittu kulma  $108^\circ 46' 50''$ . Laske, kuinka kaukana mainittuina hetkinä oli laiva maja-kasta, jos laivan nopeus oli 20 km tunnissa ja se koko ajan kulki samaan suuntaan.

10. Lyijypallo, joka painaa 10 kg, putoaa 20 m korkeudesta liikahtamattomalle pinnalle, Paljonko läm-pöä syntyy työnnon kautta?

## 1893. S.

1. Eräs luku henkilöitä suostui maksamaan tasan määrätyn summan hätäakärsiville. Jos jokainen mak-saisi 5 mk, niin koottu summa olisi 110 mk liian suuri; jos taas jokainen olisi maksanut vain 3 mk, niin olisi se jäänyt 90 mk vaille. Montako osanottajaa oli ja suuriko oli koottava summa?

2. Etsi polynomien  $x^2 - 3xy - 10y^2$ ,  $x^2 + 2xy - 35y^2$  ja  $x^2 - 8xy + 15y^2$  pienin yhteinen jaettava.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}(y + z) = 102 \\ y + \frac{1}{3}(x + z) = 78 \\ z + \frac{1}{4}(x + y) = 61. \end{cases}$$

4. Henkilö sijoitti erään pääoman liikkeeseen ja antoi ensimmäisen vuoden koron myös jäädä liikkeeseen. Toisena vuotena menetti hän saman %, minkä hän ensimmäisenä vuotena voitti, ja kun hän otti rahansa pois liikkeestä, sai hän vain  $\frac{1}{4}$  alkuperäisestä pää-omasta. Montako % voitti hän ensimmäisenä vuonna?

5. Ratkaise yhtälö

$$6^{x-1} + 6^{-x} = 1\frac{1}{6}.$$

6. Todista väittämä: Jos tasasivuisen kolmion ympäri on piirretty ympyrä ja jostakin pisteestä ympyrän kehällä piirretään janoja kolmion kärkiin, niin keski-mäinen näistä janoista on yhtä suuri kuin molempien toisten summa.

7. Ympyrän halkaisijan AB päätepisteestä B on piirretty tangentti ympyrälle. Siitä erotetaan B:stä al-kaen jana BC yhtä suureksi kuin AB. Pisteet A ja C yhdistetään. Erään kolmiossa ABC olevan BC:n suun-taisen transversaalin jakaa ympyrän kehä kahteen

yhtäsuureen osaan. Missä suhteessa jakaa mainittu transversaali AB:n?

8. Kartiossa, jonka korkeus on 5 m ja aseman säde 3 m, piirretään 2 m päässä asemasta sen kanssa yhdensuuntainen taso. Suuriko on saadun katkaistun kartion sivupinta ja tilavuus?

9. Kolmiossa on sivu  $a = 332,6$  m,  $b = 418,2$  m ja  $c = 374,5$  m. Suuriko on kulma A ja kolmion ala?

10. Pendeli, jonka pituus on 1432,5 mm, heilahtaa Helsingissä 50 kertaa minuutissa. Mikä on painovoiman kiihtyväisyys mainitulla paikkakunnalla?

### 1894. K.

1. Eräseen tehtaaseen ostettiin kerran vuoden tarpeeksi öljyä 247 markalla 50 pennillä, mutta kaikki ei kulunut sinä vuotena. Seuraavana vuotena ostettiin 245 markalla öljyä, joka määrä viime vuotisen jäänöksen kanssa juuri riitti täksi vuodeksi. Edellisenä vuonna oli lamppujen luku 50 ja öljyn hinta 2 mk 25 p 10 litralta. Jälkimäisenä vuonna oli lamppujen luku 72 ja öljyn hinta 2 mk 50 p 10 litralta. Jokainen jälkimäisen vuoden lampuista kulutti ainoastaan  $\frac{3}{4}$  siitä öljymäärästä, jonka jokainen edellisen vuoden lampuista kulutti. Kuinka paljon öljyä kulutti yksi lamppu kumpaakin lajia vuoden kuluessa ja kuinka paljon öljyä jäi järeille ensimmäisenä vuotena?

2. Puolisuunnikkaan pinta-ala on 2000 m<sup>2</sup> ja pitempi sen yhdensuuntaisista sivuista on 60 m. Kuinka pitkä on lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista, kun tiedetään, että sen pituus on sama kuin yhdensuuntaisten sivujen etäisyys toisistaan?

3. Jaa polynoomi  $6x^2 - (a - 7)xy - (a + 2)(a - 1)y^2$  yksinkertaisimpiin tekijöihinsä.

4. Kuinka pitkässä ajassa tulee kaksinkertaiseksi pääoma, joka tuottaa 6% korkoa vuodessa ja kasvaa korkoa korolle, jos korko joka puolen vuoden kulluttua lisätään pääomaan?

5. Pisteestä A, joka on ulkopuolisemmalla kahdesta ympyräviivasta, joilla on sama keskipiste, piirretään kaksi suoraa siten, että ne sivuavat sisäpuolista ympyrää pisteissä B ja C, sekä leikkaavat ulkopuolisen ympyrän pisteissä D ja E. Todista, että etäisyys BC on puolet etäisyydestä DE.

6. Piirrä suorakaide, jonka piiri on a ja jonka pinta-ala on b<sup>2</sup>. Milloin on tehtävä mahdollinen?

7. Laske kolmesivuisen pyramiidin tilavuus, kun tunnetaan, että sen sivu- ja asemasärmät kaikki ovat keskenänsä yhtä suuret ja  $= 1$  dm.

8. Järven pituutta AB määrättäessä on mitattu sen päitten A ja B etäisyys erästä maalla olevasta pisteestä C ja huomattu, että etäisyys AC = 289 m ja etäisyys BC = 601 m sekä kulma ACB = 100° 19' 6". Kuinka pitkä on järvi.

9. Hae se kulma x ensimmäisessä kvadrantissa, joka täyttää ehdon

$$\sin x + \cos x = \frac{5}{4}.$$

10. Kolme matemaattista pendeliä, joitten pituudet ovat 144 mm, 324 mm ja 1024 mm, kulkevat yhtäaikaan, määrättyssä silmänräpäyksessä, tasapainoasemiensa kautta. Laske kuinka monta heilahdusta kunkin niistä tämän jälkeen on tehtävä, kunnes ne kaikki jälleen samaan aikaan kulkevat tasapainoasemiensa kautta.

### 1894. S.

1. Seos alkoholia ja vettä sisältää 68  $\frac{1}{3}$  % alkoholia, jos lasketaan painon mukaan. Montako %

*aike kypä drinkkis.  
kan. pois enä nappuloi*

alkohoolia, tilavuuden mukaan laskettuna, sisältää seos, jos alkohoolin ominaispaine on 0,81?

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{x + 0,5y - 3}{x - 5} + 7 = 0 \\ \frac{3y - 10(x - 1)}{6} + \frac{x - y}{4} + 1 = 0. \end{cases}$$

3. Kahden kaksinumeroisen luvun,  $x:n$  ja  $y:n$ , tulo on 930. Jos luku  $x$  kirjoitetaan luvun  $y:n$  eteen ja niin saatu nelinumeroinen luku jaetaan luvulla  $y$ , saadaan osamääräksi 25 ja jäännökseksi 12. Mitkä ovat luvut  $x$  ja  $y$ ?

4. Rautatieasemalta A lähtee matkustajajuna aseman B:n kautta, siinä kuitenkin pysähtymättä, asemalle C. Junan nopeus on 36 km tunnissa ja A:n ja B:n väli on 24 km. Samaa aikaan lähtee B:stä kaksi tavarajunaa, toinen A:han, toinen C:hen, molemmat samalla nopeudella. A:sta tuleva matkustajajuna kohtaa toisen tavarajunan  $\frac{1}{2}$  tuntia aikaisemmin kuin se saavuttaa toisen. Kuinka suuri on tavarajunain nopeus?

5. Vedä tasakylkisessä kolmiossa transversaali, joka jakaa yhtä suuret sivut niin, että ne osat niistä, jotka joutuvat transversaalin ja aseman väliin, tulevat kumpikin yhtäsuuriksi kuin transversaali.

6. Kolmion kärjestä on vedetty suora asemalla olevaan pisteeseen X ja siten saatuihin pieniin kolmioihin on piirretty ympyrät. Todista, että ympyröiden säteiden tulo on yhtä suuri kuin niiden ison kolmion aseman osien tulo, jotka ovat pisteen X ja ympyröiden sivuamispisteiden välillä.

7. Ympyrä A sivuaa ympyrää B sisäpuolin pisteessä P. Suora viiva sivuaa A:ta pisteessä Q ja leikkaa B:n

pisteissä R ja S. Todista, että kulma RPQ on yhtä suuri kuin kulma SPQ.

8. Meidän (katkaistun) kartion muotoisista mitta-astioistamme säädetään, että kahden litran ja sitä pienemmissä astioissa suun läpimitan pitää olla kaksi kolmasosaa pohjan läpimitasta ja neljä viidesosaa kohtisuorasta korkeudesta. Laske sen muotoisen kahden litran astian korkeus sekä pohjan ja suun halkasijat!

9. Kolmiossa on sivu  $a = 56$  cm, sivu  $b = 41$  cm ja kulma  $A = 108^\circ 12' 42''$ . Laske kulmat B ja C sekä sivu c.

10. Kalasumpun kanteen on tehty ympyränmuotoinen aukko, jonka halkaisija on 60 cm. Aukon keskipisteestä pystysuoraan ylöspäin on 50 cm päässä valolähde, joka oletetaan loistavaksi pisteeksi. Kuinka suuri on sen valoympyrän halkaisija, joka syntyy sumpun tallselle, vaakasuoralle pohjalle, jos sumpu on yhden metrin syvyinen ja täynnä vettä? Ilman ja veden välinen taite-eksponentti on 1,33.

## 1895 K.

1. Hiekkänäyte sisältää kaksi mineraalia, kvartsia ja maasälpää. Kvartsi on puhdasta piihappoa, mutta maasälpä sisältää, paitsi 64 % piihappoa, myös 36 % muita aineita. Kun näytteestä tehdään kemiallinen analyysi, huomataan sen sisältävän 73 % piihappoa. Montako % kvartsia ja montako % maasälpää sisältää tämä näyte?

2. Eräs keino, jolla voi tarkastaa, onko yhteenlasku oikein suoritettu, perustuu seuraavaan lauselmaan:

Jos useampien kokonaisten lukujen summa ja samoin näiden lukujen numerosummien summa jaetaan

9:llä, niin tulevat jäännökset yhtä suuriksi. Todista tämä lauselmalla.

3. Erään toisen asteen yhtälön juurien summa on 12 ja näyttien juurien kuutioiden summa 576. Mikä on yhtälö?

4. // Helsingin kaupunki on myynyt tehdastontteja sellaisilla ehdoilla, että ostaja, maksamatta koko hintaa yhdellä kertaa, vuosittain maksaa 6 % tontin hinnasta, josta maksusta  $4\frac{1}{2}\%$  luetaan maksamattoman pääoman koroksi ja loput pääoman kuolettamiseen. Maksut suoritetaan vuoden lopussa, luettuna siitä päivästä, jolloin kauppa tehdään. Monenko vuoden kuluttua tulee velka maksetuksi?

5. Neliönmuotoisen ruohokentän läpi, jonka sivu on  $a$  m, kulkee kaksi suoraa, samanleveyistä käytävää ristiin yhdensuuntaisesti sivujen kanssa. Mikä on käytävien leveys, jos niiden pinta-ala on puoli koko neliön pinta-alasta?

6. Piirrä kolmion sivulle (sisäänpäin) ympyrän kaari, jonka sentrikulma on yhtä suuri kuin sivun viereisten kulmien summa. Todista, että tämä kaari kulkee kolmioon piirretyn ympyrän keskipisteen kautta.

7. Tunnetussa suorakulmaisessa kolmiossa ABC on kulma  $A = 90^\circ$ . Kateetille AB on piirretty neliö ADEB ja AC:lle neliö AFGC. Vedä suorat viivat BG ja CE sekä todista, että ne leikkaavat toisensa kohtisuoralla, joka suoran kulman kärjestä piirretään hypotenuusaa vastaan.

8. Sylinterinmuotoinen rautakanki on tehtävä 2,5 metrin pituiseksi. Kuinka suuri tulee sen halkaisijan olla, jotta sen paino olisi 10 kg, kun raudan ominaispaino on 7,2?

9. Henkilö seisoo tasangolla 15 metrin päässä maahan asetetusta pystysuorasta viiritangosta, jota nähdessä syntyy  $32^\circ 15'$  suuruinen näkökulma. Katselijan silmä on 1,6 m korkeudella maanpinnasta. Kuinka korkea on tanko?

10. Kuinka suuri kantovoima on montgolfierillä (lämpöilmapallolla), jonka tilavuus on  $380\text{ m}^3$ , jos lämpö määrä pallossa on  $+77^\circ$ , ulkoilman lämpö  $0^\circ$  ja ilmanpaine sillä korkeudella, jossa pallo on, 700 mm? Huomattava on, että  $1\text{ m}^3$  ilmaa painaa 1,293 kg, kun lämpö määrä on  $0^\circ$  ja ilmanpaine 760 mm sekä ilman laajennuskoffisientti on  $\frac{1}{273}$ .

## 1895 S.

1. // Syyskuun 12 p. 1894 otettiin 16000 markan laina ja maksettiin takaisin kesäkuun 21 p. 1895, jolloin velka korkoineen teki 16589 mk. Minkä % mukaan maksettiin lainasta korkoa?

2. Yhtälön

$$6x^4 - 35x^3 + 18x^2 + 119x - 60 = 0$$

juurista on yksi  $+4$  ja toinen  $+3$ . Mitkä ovat muut juuret?

3. // Kultasepällä oli kahta metallisekoitusta, joista toinen sisältää 750 osaa kultaa ja 250 osaa kuparia, toinen 950 osaa kultaa ja 50 osaa kuparia. Paljonko kumpaakin sekoitusta on sulatettava yhteen, jotta saataisiin 300 gr semmoista sekoitusta, joka sisältää 830 osaa kultaa ja 170 osaa kuparia?

4. // A matkustaa 80 km  $1\frac{1}{2}$  tuntia lyhemmassä ajassa kuin B. A. ehtii 9 tunnissa 24 km pitemmälle kuin B. Kuinka pitkät matkat kulkevat A ja B näissä 9:ssä tunnissa?

5. Ympyrä on piirretty suorakulmaisen kolmion sisään. Todista, että kateettien summan ja hypotenuusan erotus on yhtäsuuri kuin ympyrän halkaisija.

6. Kolmio ABC on määrätty. Hae kolmion tasossa niin asetettu piste X, että kulmat AXB, BXC ja CXA, jos ne piirretään, tulevat yhtäsuuriksi.

7. Piirrä tasasivuisen kolmion sisään toinen tasasivuinen kolmio, jonka sivut ovat kohtisuorassa kukin sivuansa vastaan ensin mainitussa kolmiossa.

8. Sylinterin muotoisen venttiilitorven kautta, jonka halkaisija on 8 cm, juoksee ilmaa huoneesta ulos nopeudella, joka on 1,4 metriä sekunnissa. Montako kuutiometriä ilmaa juoksee huoneesta ulos 10 minuutissa.

9. Peltö on nelikulmion muotoinen. Sivut ovat 200, 240, 280 ja 300 m. Kulma kahden ensinmainitun sivun välillä on  $102^{\circ} 13' 12''$ . Suuriko on pellon pinta-ala?

10. Kuparin ominaislämpö on 0,095. Kuparikappale, joka painaa 600 gr ja on lämmitetty  $100^{\circ}\text{C}$  asteeseen, lasketaan sulavaan jäähän. Paljonko jäätä sulaa, ennenkuin kuparin lämpö on laskeutunut 0 asteeseen, jos lämmön vaihtoa ympäristön kanssa ei tapahdu? Jään sulamislämpö otaksutaan olevan 79 kaloria.

## 1896. K.

1. Metalliseos sisältää 20 % kuparia, 50 % sinkkiä ja 30 % nikkeliä, toinen seos 70 % kuparia, 10 % sinkkiä ja 20 % nikkeliä, kolmas 20 % kuparia, 20 % sinkkiä ja 60 % nikkeliä. Kuinka suuret määrät on näistä kolmesta seoksesta otettava, jotta yhteensulattamalla saataisiin 2 kg seosta, joka sisältää 40 % kuparia, 27,25 % sinkkiä ja 32,75 % nikkeliä?

2. Kaksi tiilentekijää valaa yhteensä 1 tunnissa 350 tiiltä. Toinen valaa 10 tiiltä 1 minuuttia lyhemässä ajassa kuin toinen. Kuinka pitkässä ajassa kumpainenkin erikseen valaa 100 tiiltä?

3. Todista, että  $a^3b - b^3a$  on tasan jaollinen 3:lla, jos a ja b ovat kokonaislukuja ja  $a > b$ .

4. Kolme positiivista lukua muodostaa geometrisen sarjan; niiden summa on 5,07 ja niiden inversiarvojen summa 3. Mitkä ovat luvut?

5. Todista väittämä: Jos tasasivuisen kolmion kaksi kulmaa jaetaan kahtia ja jakoviivoja vastaan niiden leikkauspisteen kautta piirretään kohtisuoria, niin kohtisuorat jakavat mainittujen kulmien välisen sivun kolmeen yhtäsuureen osaan.

6. Piirrä suunnikas, kun tunnetaan yksi sivu, lävistäjien summa sekä lävistäjien välisistä kulmista se, joka on tunnetun sivun vastainen.

7. Kaksi ympyrää, joilla on eripitkät säteet, leikkaa toisensa. Piirrä toisen leikkauspisteen kautta suora niin, että ne osat viivasta, jotka tulevat olemaan eri ympyröiden sisäpuolella, tulevat yhtäsuuriksi.

8. Ontto kuparipallo, jonka halkaisija on 16 cm, painaa 5 kg. Kuinka suuri on pallonmuotoisen ontelon halkaisija, jos  $1\text{ cm}^3$  kuparia painaa 8,8 gr?

9. Rautatielinjassa on kahden paikan A:n ja B:n välillä kolme osaa, kaksi suoraviivaista osaa sekä niiden välillä käyräviivainen osa, joka muodostaa ympyrän kaaren, jota suorat osat sen päätepisteissä sivuavat. Kaaren säde on 1000 m. Jos A ja B ajatellaan yhdistetyksi suoralla, niin yhdistävä jana muodostaa rautatielinjan kanssa A:ssa  $43^{\circ} 18'$  ja B:ssä  $37^{\circ} 42'$  suuruisen kulman ja janan pituus on 5755 m. Kuinka pitkä on A:n ja B:n välinen rautatielinja?

10. Toisesta päästä umpinainen, sylinterinmuotoinen, 2 m pitkä torvi upotetaan pystysuorasti, avonainen pää alaspäin, veteen koko pituuttaan myöten niin, että yläpää on tasan veden pinnan kanssa. Kuinka korkealle tunkeutuu vesi putkeen, jos ilman paine sillä kertaa on 760 mm ja veden sekä ilman lämpö määrä on  $+4^{\circ}\text{C}$ ? Elohopean ominaispaino on 13,6.

### 1896. S.

1. Henkilö, jonka pääoma ennen on ollut lainassa 4 % mukaan ostaa rahoillaan  $4\frac{1}{2}$  %:n 100 markan arvoisia obligatiooneja. Paljonko kannattaa hänen maksaa tällaisesta obligatsioonista, jos hän tahtoo saada rahoilleen saman koron kuin ennen?

2. Vesisäiliön voi täyttää kolmen sylinterinmuotoisen torven kautta, joiden halkaisijat suhtautuvat toisiinsa kuin 1:2:3. Vesisäiliö täyttyy suurimman torven kautta 4 tunnissa 40 minuutissa. Missä ajassa täyttyy säiliö, jos kaikki kolme torvea ovat auki ja määrättyssä ajassa jokaisen torven kautta juokseva vesimäärä on suhteellinen torven läpileikkauspintaan?

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ xy = 60 \end{cases}$$

4. Henkilö on henkivakuutettu 10000 markasta ja maksaa vuosittain 250 mk vakuutusmaksua. Monenko vuoden kuluttua ensimmäisen maksun suorittamisesta ovat vuosimaksut korkoineen, kun lasketaan korkoa korolle 4 % mukaan, nousseet vakuutussumman suuruiseksi tai sitä lähinnä suuremmaksi?

5. Piirrä kolmio, jonka ala on kolmen yhdenmuokaisen kolmion alojen summan suuruinen.

6. Ympyrään, jonka säde on R, on piirretty kolme pienempää, keskenänsä yhtäsuurta ympyrää niin, että ne sivuavat suurempaa ympyrää sisäpuolelta sekä kukin niistä molempia toisia ulkopuolelta. Kuinka suuri on näitten pienempien ympyröiden säde?

7. Tasakylkisessä kolmiossa erotetaan asemakulmien kärjistä lähtien toisesta kyljestä sekä toisen kyljen jatkosta aseman toiselle puolelle yhtäsuuret janat. Jos näiden janojen päätepisteet yhdistetään, niin asema jakaa yhdistysjanan kahtia. Todista väittämä.

8. Ympyränsä sektorin muotoinen rautapelti kierretään kartion sivupinnaksi. Kuinka suuri on sektorin kaaren asteluku oleva, jotta kartion akselinleikkauksen kulma tulisi suoraksi?

9. Suorakulmaisessa kolmiossa on suoran kulman kärjestä piirretty hypotenuusaa vastaan kohtisuora, joka jakaa hypotenuusan osiin, joiden keskinäinen suhde on 1:2. Suuretko ovat kolmion terävät kulmat?

10. Millä nopeudella on pallo heitettävä pystysuoraan ylös, jotta se nousisi 20 metrin korkeuteen, jos painovoiman kiihtyväisyys on  $9,81$  metriä sekunnissa ja ilman vastustus jätetään lukuun ottamatta?

### 1897. K.

1. Maaliskuun 1 päivänä 1896 sijoitettiin pankkiin talletettavaksi 5100 mk 4 %:n vuotuista korkoa vastaan. Pääoma sekä siitä tullut korko otettiin pois pankista saman vuoden marraskuun 1 päivänä. Samana päivänä ostettiin näillä rahoilla pankki-osakkeita, jotka maksoivat kukin osake 476 mk. Maaliskuun 1 päivänä 1897 saatiin osuutena 20 mk osakkeelta ja samana päivänä myytiin osakkeet 464 mar-

kasta kappale. Montako % oli alkuperäinen pääoma tuottanut voittoa?

2. Tunnetun kolmion suurin sivu on lävistäjänä ja molemmat toiset sivut viereisinä sivuina nelikulmiossa, jossa vastakkaiset kulmat ovat supplementtikulmia ja jonka molemmat lävistäjät ovat yhtäsuuret. Piirrä nelikulmio.

3. Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä A ja B. Piste A kautta piirretään joku suora, joka leikkaa ympyröitä paitsi A:ssa, myöskin pisteissä C ja D. Jos B yhdistetään C:n ja D:n kanssa, on todistettava, että  $BC:BD$  on yhtäsuuri kuin ympyröiden säteiden suhde.

4. Kaksi ympyrää, joiden säteet ovat  $r_1$  ja  $r_2$  sivuaa toisiaan ulkopuolelta. Laske sen kolmion ala, jonka ympyröiden yhteiset tangentit muodostavat.

5. A, B ja C ovat osakkaita eräässä liikkeessä, jossa A:lla ja B:llä samalla on virka. Vuosivoitosta saa A 40 % ja B 20 % ja loput jaetaan A:n, B:n ja C:n kesken suhteellisesti heidän liikkeeseen asettamiin rahoihinsa. Siten saa A kaikkiaan 3 ja B 2 kertaa niin paljon kuin C. Missä suhteessa ovat A:n, B:n ja C:n sijoittamat rahat toisiinsa?

6. Peltiseppä tekee suorakaiteen muotoisesta pelistä, taivuttamalla sitä kahdesta kohdasta kohtisuorasti, pohjan ja kaksi laitaa suorakulmaisen parallelipedin muotoiseen astiaan. Miten tulee hänen taivuttaa pelti, jotta astia saisi suurimman tilavuuden?

7. Etsi suurempi niistä kahdesta luvusta, joiden summa ja erotus ovat juuria yhtälössä

$$9x^2 - 54x + 80 = 0.$$

8. Tornin katto on suoran kartion muotoinen, jonka kohtisuora korkeus on 6,4 m ja akselikulma (= kar-

tion akselin ja sivuviivan tekemä kulma)  $23^\circ 40'$ . Suuriko on katon ala?

9. Kolmion sivut ovat 14, 48 ja 50 cm. Laske suurin kulma ja pienin korkeusviiva.

10. Kaltevalla pinnalla, joka vaakasuoran tason kanssa tekee  $30^\circ$ -kulman, vierii pallo, jonka alkunopeus on 0. Pallo kulkee pisteen A ohitse 2,1 m nopeudella sekunnissa. Mikä on pallon nopeus B-pisteessä, joka on 0,8 m A:n alapuolella? Painovoiman kiihtyväisyys otaksutaan  $= 9,8$ , kun m ja sek ovat pituuden ja ajan yksikköinä. Kitka ja ilman vastus jätetään huomioon ottamatta.

## 1897. S.

1. Eräässä laudoitustyössä laskettiin lauta-aineiden hinnan nousevan 450 markkaan, sillä edellytyksellä, että käytettäisiin 150 mm leveitä lautoja ja että niiden hinta olisi 18 penniä juoksevalta metriltä. Työhön käytettiin kuitenkin lautoja, joista maksettiin vain 14 penniä metriltä, mutta joiden leveys oli ainoastaan 125 mm. Paljonko halvemmaksi tuli työ kuin kustannusarvion mukaan?

2. Tunnetaan jana AB ja sillä piste C. AB hypotenuusana on piirrettävä suorakulmainen kolmio ADB, jonka kateettien suhde  $= AC:BC$ .

3. Jos kolmiossa ABC sivulla AB otetaan piste D ja sivulla AC piste E niin, että kolmiot ABC ja AED tulevat yhdenmukaisiksi, jolloin AB ja AE sekä AC ja AD ovat parittain homoloogisivia sekä piirretään janat BE ja CD, jotka leikkaavat toisensa pisteessä F, niin tulevat myöskin kolmiot BFD ja CEF yhdenmukaisiksi. Todista väittämä.

4. Pallolla on sama tilavuus kuin sylinterillä, jonka korkeus on yhtä suuri kuin sen aseman halkaisija. Mikä on sylinterin aseman säteen ja pallon säteen suhde.

5. 8200 markan suuruinen laina maksetaan korkoineen kahdessa yhtäsuuressa osassa sillä tavoin, että edellinen maksu tapahtuu vuoden ja jälkimäinen kaksi vuotta lainan saamisen jälkeen. Kuinka suuria tulee näiden maksumäärien olla, jos korkoa lasketaan 5 % mukaan?

6. Kaksi yhtä suurta ympyrää leikkaa toisensa niin, että sillä suunnikkaalla, jonka kärkipisteinä ovat leikkauspisteet ja keskipisteet, on suurin mahdollinen ala. Kuinka suuri on ympyröiden keskipisteiden väli?

7. Muodosta se toisen asteen yhtälö, jonka juurina ovat yhtälön

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

juurien erotukset.

8. Millä kulmalla on se ominaisuus, että sen tangentin ja cotangentin summa on  $2\frac{1}{2}$ ?

9. Kolmiossa on kulma  $A = 37^\circ 21' 10''$  ja kulma  $B = 98^\circ 15' 22''$  sekä välinen sivu  $c = 400$  mm. Kuinka suuri on suurin väli sisäänpiirretyn ympyrän keskipisteestä kolmion kärkipisteisiin?

10. Eräässä sylinterinmuotoisessa yläpäätä suljettussa lasiputkessa, joka pystysuorassa asemassa on osaksi upotettu elohopea-astiaan, on elohopeapatsas ja sen yläpuolella joku määrä ilmaa; elohopean korkeus astian pinnan yli on 260 mm, samalla kun ilmalla täytetyn tilan korkeus on 230 mm. Kun putki upotetaan niin, että elohopeapatsaan korkeus tulee olemaan 44 mm, niin on ilmapatsaan korkeus 161 mm. Mikä on silloin barometrikorkeus?

## 1898. K.

1. Kuinka paksua on rautalanka, jota 300 metriä painaa 1 kg, kun tiedetään, että 27 cm pituinen ja 5 mm paksuinen lanka samanlaista rautaa painaa 40 grammaa?

2. Piirrä semmonen jana, että, kun se jaetaan jatkuvaisessa suhteessa, sen pienemmällä osalla on määrätty pituus.

3. Kolmion sivulle piirretään, sitä jänteenä käyttäen, kaksi ympyrän kaarta niin, että toista sivuaa toinen ja toista toinen kolmion muista sivuista. Todista, että näiden kaarten säteet ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin vastaavaiset ympyröitä sivuavat kolmion sivut.

4. Suorakulmaisessa kolmiossa on kateettien summa 60 ja korkeusviiva suoran kulman kärjestä 11 cm. Kuinka pitkä on hypotenuusa?

5. Liikemies A hankkii toiselle, B:lle, tavaroita, jotka tämän tulisi maksaa 9 kuukauden kuluttua. Kuukautta myöhemmin hankinnasta on A:n pakko suorittaa suurenlainen maksu, jota varten hänen täytyisi lainata rahoja 6 % vuotuista korkoa vastaan. Sen vuoksi pyytää hän B:ltä lainansa takaisin. Montako % on alkuperäisestä velasta enintään vähennettävä, jottei A joutuisi tappiolle?

6. 36500 markan suuruinen summa jaetaan kolmen lapsen kesken, jotka ovat 5, 9 ja 15 vuotta vanhat, siten, että kaikki kolme osaa, lisättyinä 5 %:n vuotuisella yksinkertaisella korolla, tulevat yhtä suuriksi, kun kukin lapsi täyttää 21 vuotta. Kuinka suuret ovat osat?

7. Eräs isäntä, aikoen antaa iäkkäälle uskolliselle palvelijalleen 450 markan suuruisen vuotuisen eläkkeen, tallettaa sitä varten niin suuren pääoman, että se riittäisi 25 vuodeksi. Kuinka suuren tulee talletuksen olla, jos korkoa luetaan 4 % mukaan vuodessa ja ensimmäinen eläkemaksu suoritetaan vuoden kuluttua rahasumman talletuksesta lukien?

8. Etsi se kulma, jonka tangentti on  $\frac{2}{3}$  kulman cosinista.

9. Asemana suorassa prismassa, jonka korkeus on 24 cm, on kolmio ABC, jossa sivu  $AB = 7$  cm ja  $AC = 18$  cm. Kuinka suuri on sivu BC, kun A:n kautta piirretyt sivutasojen lävistäjät muodostavat keskenänsä  $29^\circ 55' 34''$  kulman.

10. Esine, jonka ominaispaino on 0,771, pudotetaan mereen 12 metrin korkeudelta merenpinnasta lukien. Kuinka syvälle vajoo esine, jos meriveden ominaispaino on 1,028 sekä otetaan huomioon vain veden kannatusvoima?

## 1898. S.

1. 1000 gr Marienbadervettä sisältää 4,958 gr Glaubersuolaa ja 3,442 gr muita suoloja. Kuinka paljon Glaubersuolaa on pantava 1000 gr puhdasta vettä, jos tahdotaan valmistaa keinotekoisia Marienbadervettä?

2. Muuta tunnettu neliö tasasivuiseksi kolmioksi.

3. Tunnetaan ympyrä ja siinä halkaisija AB. Piirretään A keskipisteenä toinen ympyrä mielivaltaisella säteellä. Todista, että edellisen ympyrän kehä jakaa kahtia jokaisen jälkimäisen ympyrän jängteen, joka, jos niin tarvitaan, pitennettynä kulkee B:n kautta.

4. Kolmiossa on yksi kulma  $60^\circ$ . Ympyrä, jossa mainitun kulman vastainen sivu on jängteenä, leikkaa

toiset sivut siten, että ympyrän ulkopuolella ja sen sisäpuolella olevien osien suhde on toisella sivulla 6:1 ja toisella 3:11. Kuinka suuret ovat muut kulmat?

5. Höyrylaiva kulkee 4 tunnissa yhteensä 28 km virrattomassa vedessä ja 24 km vasten virtaa, jonka nopeus on 2 km tunnissa. Kuinka suuri on laivan nopeus virrattomassa vedessä?

6. Glyseriinistä ja vedestä saatuun sekoitukseen, jota 1 cm<sup>3</sup> painaa 1,11 gr, lisätään alkookolia, kunnes nestemäärä on 200 cm<sup>3</sup>. Sekoituksen paino on nyt 201 gr. Kuinka paljon glyseriiniä, vettä ja alkookolia on sekoituksessa, kun tiedetään, että 1 cm<sup>3</sup> glyseriiniä painaa 1,26 gr ja 1 cm<sup>3</sup> alkookolia 0,81 gr?

7. Jos eräiden lukujen logaritmit muodostavat aritmeettisen sarjan, niin itse luvut muodostavat geometrisen sarjan. Todista tämä.

8. Pallon, jonka säde on  $1\frac{2}{3}$  dm, leikkaa kaksi yhdensuuntaista tasoa, joiden keskinäinen etäisyys on 1 dm ja väli keskipisteestä, toisen  $\frac{1}{3}$  dm ja toisen  $\frac{2}{3}$  dm. Laske tasojen välisen pallon osan tilavuus.

9. Kolmiossa on sivu  $a = 0,5$  cm, sivu  $b = 0,3$  cm ja kulma  $C = 47^\circ 30'$ . Suuriko on sivu  $c$ ?

10. Lastivene, joka on suorakulmaisen parallelipiipeedin muotoinen, on tyhjänä yhtä syvällä keulasta kuin perältä. Jonkun verran lastattuna on perä painunut 9 cm ja keula 6 cm. Kuinka painava on lasti, kun tiedetään, että veneen pituus on 14 m ja leveys 4 m sekä veden ominaispaino 1,02?

## 1899. K.

1. Suoran metallisylinterin korkeus on 40 cm ja aseman halkaisija 20 cm. Sylinterin aseman hopeoi-

miseen menee 12,4 gr hopeata, kun hopeakerros tehdään 0,04 mm vahvaksi. Paljonko hopeata menee sylinterin koko pinnan hopeoimiseen, jos kerros tehdään 0,03 mm vahvaksi?

2. Ympyrä sivuaa toisen sisäpuolitse. Todista, että pienemmän ympyrän kehä jakaa kaikki sivuamispisteiden kautta piirretyt isomman ympyrän jänteet samassa suhteessa.

3. Ympyrälle on tunnetusta pisteestä piirrettävä tangentti ilman että keskipiste ensin määrätään.

4. Tunnetaan kolmio ABC, jossa kulma A on tylsä. Pisteestä B piirretään suora viiva, joka sivun AB:n kanssa tekee kulman, joka on yhtäsuuri kuin kulma ABC. Suora kohtaa sivun CA jatkeen pisteessä D. Suuriko on jana BD?

5. Kolmessa sylinterinmuotoisessa astiassa ovat halkaisijat 3, 4 ja 5 cm. Vedellä täytettyinä painavat ne yhteensä 1050 gr. Jonkun ajan kuluttua punnitaan astiat uudestaan ja silloin on niiden yhteinen paino 900 gr. Paljonko vettä on haihtunut kustakin astiasta, kun haihtuminen on verrannollinen nesteen vapaan pinnan suuruuteen?

6. Miksi sopii toisen asteen yhtälöllä etsiä maksimi- ja minimiarvoja?

7. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^{\frac{4}{3}} - 15y^{-\frac{4}{3}} = 81 \\ xy = 8. \end{cases}$$

8. Mitkä ovat yhtälön

$$x^4 + x^2 \sin v \operatorname{tg} v - 1 = 0$$

reaalijuuret, kun ottaa huomioon ne eri tapaukset, jolloin  $v$  on eri kvadranteissa?

9. Suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 2,1 cm ja yksi kulmista  $20^\circ 30'$ , kääntyy kerran isomman kateetin ympäri. Suuriko on siten syntyneen kartion tilavuus?

10. Platinakappale ja rautakappale painavat kumpikin 1 kg ilmattomassa paikassa. Platinan ominaispaino on 21,5 ja raudan 7,5 sekä ilman 0,00129. Suuriko on kappalten painojen erotus, kun ne punnitaan ilmassa?

11. Suora prisma, jonka asema on tasasivuinen kolmio, leikataan tasolla, joka on kohtisuorassa yhtä prisman sivutasoa vastaan, niin, että leikkauskuvio tulee suorakulmaiseksi kolmioksi. Mikä on leikkaavan tason ja prisman aseman kalteuskulma?

## 1899. S.

1. Eräässä rautatietyössä tarvitaan ratavalliin arviolta 38 santajunaa, joissa kussakin on 30 hiekkavaunua, kaikki samankokoisia. Kun 11:ssä tällaisessa junassa on työpaikalle kuletettu hiekkaa, muutetaan kuljetustapa siten, että joka junassa 12 vaunua vaihdetaan yhtä moneen semmoiseen vaunuun, joihin kuhunkin mahtuu  $\frac{1}{3}$  enemmän hiekkaa kuin entisiin. Montako tällaista junaa on työpaikalle lähetettävä?

2. Kun ympyrä sivuaa toisen ympyrän sisäpuolitse, niin pienemmän kehä jakaa kaikki sivuamispisteistä piirretyt isomman ympyrän jänteet samassa suhteessa. Piirrä, käyttämällä tätä väittämää, säännöllinen kymmenkulmio, jonka sivu on määrätty.

3. Jos suorakulmaisen kolmion hypotenuusalla tai sen jatkeella määrätään piste P, jonka etäisyys suoran kul-

man kärjestä, A:sta, on yhtäsuuri kuin toinen kateetti ja jos toisen kateetin keskipisteestä piirretään kohtisuora janalle PA, niin kohtisuora leikkaa tämän janan kahteen osaan, jotka suhtautuvat toisiinsa kuin kateettien neliöt. Todista tämä.

4. Kuinka suuri on sellaisen ympyrän säde, jonka keskipiste on 13 cm:n etäisyydellä pisteestä A ja jonka kehä leikkaa A:n kautta piirretyn suoran 6 cm:n ja 24 cm:n etäisyydellä A:sta?

5. // Kaksi pyöräilijää ajaa vastakkaisiin suuntiin ympyränmuotoisella radalla. He lähtevät yhtäaikaan samasta pisteestä ja kohtaavat toisensa ensi kerran 40 sekunnin kuluttua. Toinen tarvitsee 1 min 12 sek. vähemmän aikaa kuin toinen ajaakseen radan ympäri 4 kertaa. Kuinka pitkässä ajassa suorittaa kumpainkin yhden kierroksen, jos ajonopeus koko ajan on sama?

6. Todista, että suoran katkaistun kartion sivupinta on aina suurempi kuin asemien pinta-alojen erotus.

7. Ratkaise yhtälö

$$2 - 6 \sin x^2 - 5 \cos x = 0.$$

8. // Minkä prosentin mukaan tulee pääoman kasvaa korkoa korolle, tullakseen 17 vuoden kuluttua kaksinkertaiseksi?

9. Kolmiossa suhtautuvat sivut toisiinsa kuin 29 : 420 : 421. Määrää kulmat.

10. Ilmattomassa paikassa putoavan kappaleen nopeus on ensimmäisen sekunnin kuluttua 9,818 m sekunnissa. Kuinka pitkän ajan kuluttua on sen nopeus 200 m sekunnissa ja pitkähkö matkan on kappale tämän ajan kuluessa pudonnut?

1900. K.

1. Erään Keplerin lain mukaan suhtautuvat kahden kiertotähden kiertoaikojen neliöt toisiinsa niinkuin niiden auringosta luettujen keskimääräisten etäisyyksien kuutiot. Mikä on Marsin keskimääräinen etäisyys auringosta, kun tiedetään, että maapallo tekee 216 kierosta saman ajan kuluessa kuin Mars tekee 125. sekä maapallon keskimääräinen etäisyys auringosta on 20 miljoonaa peninkulmaa?

X 2. Mielivaltaisesta pisteestä kolmion ABC sisäpuolella piirretään kohtisuoria kolmion sivuja vastaan. Jos D, E ja F ovat kohtisuorien kantapisteet sivuilla AB, BC ja CA, niin on

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = AF^2 + CE^2 + BD^2.$$

Todista tämä.

X 3. Piirrä ympyrän ympäri suunnikas siten, että jokainen sivuamispiste jakaa sivun suhteessa 1 : 3.

X 4. Määrää sen pinnan ala, joka syntyy, kun säännöllinen kuusikulmio, jonka sivu on a, kääntyy keskipisteensä kautta kulkevan lävistäjänsä ympäri.

X 5. Säännöllisen pyramiidin kaksi vastakkaista sivusärmää muodostaa pyramiidin kärjessä suoran kulman. Kuinka suuret ovat sivupintoina olevien kolmioiden kulmat, kun tiedetään, että pyramiidin asemana on neliö?

X 6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{2}{3}y \\ x - y = 2y(1 + \sqrt{y}). \end{cases}$$

X 7. 1800 tyhjää granaattia painaa yhteensä 7750 kg. Granaatit ovat painonsa puolesta kahta lajia. Toista lajia oleviin granaatteihin pannaan kuhunkin 2 kg räjähdysainetta, toista lajia oleviin kuhunkin 1,3 kg.

Tämän jälkeen huomataan edellisten painavan yhteensä 4200 kg ja jälkimäisten yhteensä 6380 kg. Kuinka monta granaattia on kumpaakin lajia ja paljonko kummankin lajinen granaatti painaa?

8. Neljä lukua muodostavat geometrisen sarjan. Niiden summa on 217,6 ja ensimmäisen ja kolmannen luvun erotus on 64. Mitkä ovat luvut?

9. Mitkä kulmat toteuttavat yhtälön  
$$\operatorname{tg} x^2 - \sin x^2 = \frac{1}{2}.$$

10. Tasakylkisessä kolmiossa, jonka kylki on 189 mm ja kärkikulma  $78^\circ 6'$ , on suora piirretty kärjen kautta niin, että sen ja aseman muodostama kulma on myös  $78^\circ 6'$ . Kuinka suuri on se osa tätä suoraa, joka lankeaa kolmion sisälle?

11. Sulkuportissa on  $1 \text{ cm}^2$  kokoinen reikä, joka toisella puolella porttia on veden pinnan yläpuolella, mutta toisella puolella 90 cm veden pinnan alapuolella. Paljonko vettä vuotaa tästä reiästä 5 min kuluessa, jos painovoiman kiihtyväisyys otaksutaan olevan 9,8 ja jos kitka sekä vesisuihkun supistuminen jätetään lukuun ottamatta?

## 1900. S.

1. Rautatiejunan kulkunopeuden saa selville lasquemalla 27 sek. kuluessa niiden sysähdysten lukumäärän, jotka syntyvät vaunun pyörien kulkemisesta kiskojen liitoskohtien yli. Niiden kiskojen lukumäärä, joiden yli mainitussa ajassa kuljetaan, on nim. yhtä suuri kuin se kilometrilukumäärä, minkä juna suorittaa  $1 \frac{1}{4}$  tunnissa. Kuinka pitkä on siis jokainen kisko?

2. Kolmio on muutettava tasakylkiseksi siten, että kärkikulma tulee määrätyn kulman suuruiseksi.

3. Pisteestä A ympyrän ulkopuolella piirretään tangentti ja sivuamispisteestä kohtisuora sitä suoraa vastaan, joka yhdistää pisteen A ja ympyrän keskipisteen C; B on kohtisuoran kantapiste. Mielivaltaisesta ympyrän kehällä olevasta pisteestä P piirretään janat PA, PB ja PC. Todista, että kulma CPB = kulma PAC.

4. Ympyrän sisällä, jonka säde on 20 cm, on kaksi pistettä 14 cm:n etäisyydellä toisistaan sekä 13 cm:n ja 15 cm:n etäisyydellä keskipisteestä. Laske sen janteen pituus, joka kulkee niiden kahden pisteen kautta.

5. On tehty kaksi ehdotusta hyötymansikoiden istuttamisesta erääseen maahan. Toisen ehdotuksen mukaan oli käytettävä kolmea lajia istukkaita, nim. 450 kpl ensimmäistä lajia, 520 kpl toista ja 540 kpl kolmatta lajia. Toisen ehdotuksen mukaan oli käytettävä 630 kpl ensimmäistä lajia ja 760 kpl toista lajia, mutta ei ollenkaan kolmatta lajia. Kuinka monta ensimmäisen lajin istukasta on istutettuna yhdelle  $\text{m}^2$ :lle ja kuinka suuri on kullekin istukaslajille tuleva maanala kummankin ehdotuksen mukaan, kun tiedetään, että yhdelle neliömetrille on istutettava toista lajia 2 kpl enemmän ja kolmatta lajia 3 kpl enemmän kuin ensimmäistä lajia?

6. Luvut x, 20 ja y muodostavat kolme toistaan seuraavaa termiä aritmeettisessa sarjassa ja samoin luvut x, 16 ja y geometrisessä sarjassa. Laske x:n ja y:n arvot.

7. Sylinterin muotoisesta torvesta on leikattu osa kahden sylinterin akselia vastaan kohtisuoran tason avulla. Torven suuremman halkasijan pituus on 20 cm ja torven seinämän paksuus 2 cm. Missä suhteessa on seinämän tilavuus torvikappaleen sisustan tilavuuteen.

X 8. Suorakulmaisessa kolmiossa on suoran kulman kärjestä piirretty korkeusviiva yhtä suuri kuin tulo, joka saadaan, kun toinen kateetti ja kaksinkertaisen vastassa olevan kulman sini kerrotaan keskenänsä. Suuriko on tuo vastassa oleva kulma?

X 9. Kuinka kauas merelle näkyisi 8800 m korkuinen Gaurisankar vuori, jos se olisi meren rannalla? Maan halkaisijan pituus on 12744 km.

X 10. Raketista lentää pystysuoraan, mutta vastakaisille suunnille, kaksi osasta samalla nopeudella, a metriä sekunnissa. Laske niiden hetkien välinen aika, jolloin osaset kohtaavat maanpinnan. Ilman vastus jätetään lukuunottamatta.

### 1901. K.

X 1. Sylinterinmuotoinen astia, jonka sisäpuolinen halkaisija on 125 cm, täytetään vesijohtohanasta 1 tunnissa 15 minuutissa. Kuinka pitkässä ajassa täytetään samasta vesijohtohanasta kaksi kertaa korkeampi sylinterimuotoinen astia, jonka sisäpuolinen halkaisija on 75 cm?

X 2. Kolmion kärkipisteistä A, B ja C vedetään sisäänpiirretyn ympyrän keskipisteen kautta viivat, jotka leikkaavat vastassa olevia kolmion sivuja pisteissä  $A^1$ ,  $B^1$  ja  $C^1$ . Todista että  $AC^1 \times BA^1 \times CB^1 = A^1C \times B^1A \times C^1B$ .

X 3. Tunnetun ympyrän tangentilla olevasta tunnetusta pisteestä on vedettävä ympyrän sekantti siten, että se sekantin osa, joka on ympyrän sisäpuolella, suhtautuu tunnetun pisteen ja sivuamispisteen väliin etäisyyteen niinkuin 3 suhtautuu 2:een.

X 4. Kaksi yhtä suurta ympyrää, joiden säde on 10 cm, liikkuvat samassa tasossa siten, että niiden keski-

pisteet siirtyvät suoran kulman kylkiä pitkin kulman kärkipistettä kohden, toinen 2 cm:n toinen 4 cm:n nopeudella sekunnissa. Määrätyllä hetkellä on edellinen keskipiste 30:n, jälkimäinen 40:n cm:n etäisyydellä suoran kulman kärkipisteestä. Kuinka monta sekuntia myöhemmin ympyrät sivuavat toisiaan ulkopuolisesti?

X 5. Erään testamentin määräyksen mukaan on 56900 mk jaettava kahden eri paikkakunnalla asuvan henkilön kesken siten, että kumpaisellekin, sittenkuin perintövero on maksettu, jää yhtä paljon. Kuinka suuri on kumpaisenkin alkuperäinen osuus, kun perintövero toisella paikkakunnalla lasketaan  $2\frac{1}{2}$ :n, toisella taas 6:n mk:n mukaan tuhannelta?

X 6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 1. \end{cases}$$

X 7. Eräessä seurassa hyväntekeväistä tarkoitusta varten koottiin 56 mk siten, että kukin läsnäoleva maksoi yhtä paljon. Koska seuran myöhemmin saapui 10 henkilöä, jotka myös kukin suorittivat saman maksun kuin edelliset, niin päätettiin, jotta loppusumma saataisiin kohoamaan 100 mk:ksi, että jokainen vielä maksaisi 60 penniä. Kuinka suuri oli itsekunkin alkuperäinen maksu?

X 8. Pallon, jonka säde on 5,5 cm, on sisäänpiirretty suora kartio, jonka korkeus on 8,8 cm. Miten pallon ja kartion tilavuudet suhtautuvat toisiinsa?

X 9. Kuinka suuri on Helsingin ja maan-akselin välinen kohtisuora etäisyys, jos pidetään maapalloa todellisenä pallona, jonka säde on 6370 km, ja kun tiedetään, että Helsingin leveysaste on  $60^\circ 9' 40''$ ?

10. Todista, että säännöllisessä pyramiidissa, jossa sivutasoja on useampia kuin kolme, sivutasojen ja aseman välinen kalteuskulma aina on pienempi kuin sivutasona olevan kolmion asemakulma.

11. Kuinka kaukana täytyy loistavan pisteen olla koverosta, pallon pintaosan muotoisesta peilistä, jonka säde on 42 cm, jotta loistavan pisteen kuva olisi 40 cm peiliä lähempänä?

## 1901. S.

1. Kaksi suoran kartion muotoista puupalaa painaa yhtä paljon. Toisen, koivusta tehdyn, korkeus on 25 cm ja aseman säde 7 cm. Kuinka pitkä on toisen, kuusesta tehdyn, kartion aseman säde, kun sen korkeus on 4 cm ja tiedetään, että  $\text{dm}^3$  koivupuuta painaa 640 gr, mutta  $\text{dm}^3$  kuusipuuta painaa 490 gr?

2. Muuta kolmio toiseksi kolmioksi siten, että yksi sivu tulee määrätyn janan pituiseksi ja sivun vastassa oleva kulma yhtäsuureksi kuin tunnettu kulma.

3. Jokaisessa kolmiossa on kahden sivun neliöiden summa yhtäsuuri kuin kaksi kertaa se summa, joka saadaan, kun kolmannen sivun puoliskon neliöön lisätään tämän sivun keskipisteen ja vastassa olevan kärkipisteen välisen etäisyyden neliö. Todista tämä.

4. Puolisuunnikkaassa, jonka erisuuntaiset sivut ovat yhtäsuuret, on korkeus 60 cm ja yhdensuuntaisten sivujen eroitus 50 cm, jonka ohessa lävistäjä on yhtä suuri kuin pitempi yhdensuuntaisista sivuista. Laske lävistäjän pituus.

5. Kaksi pääomaa, toinen kahta vertaa suurempi kuin toinen, annettiin lainaksi yhtäaikaa 5 % vuotuista yksinkertaista korkoa vastaan. Jonkun ajan kuluttua korotettiin pienemmän lainasumman korko 6 %:ksi ja

vuotta myöhemmin suuremman lainasumman korko  $5\frac{1}{2}$  %:ksi. Seitsemän vuotta lainaksiantopäivän jälkeen on pienempi lainasumma tuottanut korkoa yhteensä 3900 mk ja suurempi 7300 mk. Kuinka suuria lainasumat olivat ja kauvanko alkuperäinen korko pysytettiin muuttumattomana?

6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} ax - by - (a - b)z = \frac{a^4 - b^4}{a + b} = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \\ bx + ay - (a + b)z = 0 \\ (a + b)x - (a - b)y - (a - b)z = a^3 + b^3 \end{cases}$$

7. Polkupyöräradalla eräs polkupyöräilijä ajaa yhden kierroksen 6 sek. lyhemässä ajassa kuin toinen, jonka tähden hän joka kolmas minuutti ajaa toisen ohitse, molempien ajaessa samaan suuntaan. Kuinka pitkän ajan hän tarvitsee yhteis kierrokseen?

8. Kaksi palloa, joiden säteet ovat yhtäsuuret, leikkaa toinen toisensa siten, että toisen pinta kulkee toisen keskipisteen kautta. Kuinka suuri osa toisen pallon pintaa on toisen pallon sisällä?

9. Ympyrään, jonka säde on 20,3 cm, on piirretty säännöllinen 25-kulmio. Kuinka suuri sen sivu on?

10. Minkä painoinen täytyy korkkilevyn vähintään olla, jos sen tulee estää 56 kg painoinen henkilö veden uppoamasta? Korkin ominaispaino on 0,28, henkilön 1,12 ja veden 1.

## 1902. K.

### Matemaattisia tehtäviä

niitä kokelaita varten, jotka vieraskielisessä koekirjoituksessa eivät suorittaneet käännöstä latinasta äidinkielen.

1. Eräs muuri saatetaan, ilman että sen ulottuvaisuudet muuttuvat, rakentaa joko tiilistä, jotka mak-

savat 40 markkaa, tai semmoisista, jotka maksavat 55 markkaa tuhannelta. Jälkimäisten kaikki kolme ulottuvaisuutta ovat kymmenettä osaa suuremmat kuin edellisten. Missä suhteessa toisiinsa ovat kustannukset tarpeellisista tiilistä molemmissa tapauksissa?

2. Käyttämällä määrättyä janaa asemana on piirrettävä kolmio, kun tunnetaan vastaisen kulman suuruus ja se piste asemalla, jossa sitä leikkaa se viiva, joka jakaa kulman kahtia.

3. A, B, C ja D ovat neljä toisiansa seuraavaa kärkipistettä säännöllisessä kymmenkulmiossa. Todista, että se suora viiva, joka yhdistää keskipisteen pisteen B:n kanssa, jakaa lävistäjän AD:n jatkuvassa suhteessa.

4. Laske niiden ympyränsegmenttien pinta-alat, joihin ympyrän jakaa sisäänpiirretyn tasasivuisen kolmion sivu, kun säde on määrätty.

5. Katkaistulla pyramiidilla, jonka asemapinnat ovat neliöitä, on 1176:n kuutiosentimetrin tilavuus. Sen korkeusviiva on 16 senttimetriä ja sen asemasärmät ovat toisiinsa suhteessa 5:3. Kuinka suuret ovat asemasärmät?

X 6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{x-1}{a} + \frac{y-1}{b} = 0 \\ (a+b)(x+y) = \frac{(a^2+b^2)(x-y)}{a-b} \end{cases}$$

X 7. Kahdesta höyrylaivasta läksi toinen klo 6 a. p. Helsingistä Hankoon ja toinen klo 8 a. p. Hangosta Helsinkiin. Ne kulkivat toistensa ohitse klo 10.40 a. p. samana päivänä. Milloin ne saapuivat määräpaikkoihinsa, kun tiedetään, että edellinen kulkee mainitun matkan tuntia lyhemässä ajassa kuin jälkinäinen?

8. Luvut a, b, c ja tulo ab muodostavat aritmeettisen ja luvut a, b ja ab geometrisen sarjan. Mitkä ovat luvut?

9. Kuinka pitkä on kahden paikan A:n ja B:n välimatka, kun välimatkat AC ja BC kolmanteen paikkaan C ovat 175 ja 232 metriä sekä kulma ACB on  $52^\circ 30'$ ?

10. Kuinka pitkän matkan kulkee vapaasti putoava kappale, jonka alkunopeus on 0, sinä aikana, jona 50 senttimetrin pituinen pendeli suorittaa neljä heilahdusta?

Oppilaille, jotka suorittivat latinalaisen käännöstehtävän, olivat 7 ensimmäistä esimerkkiä samat kuin muillakin, mutta 3 viimeistä vaihdetut seuraaviin:

8 a. Hätäapulaina annetaan seuraavilla ehdoilla: joka vuoden lopussa maksetaan kahdeskymmenes osa alkuperäisestä lainasummasta ja maksamattomasta osasta lainaa suoritetaan vuotuinen korko, joka ensimmäisenä vuonna luetaan  $1\frac{1}{2}$  prosenttia, toisena vuonna  $1\frac{3}{4}$  %, kolmantena vuonna 2 % mukaan j. n. e., s. o. niin, että prosentti vuotuisesti lisääntyy  $\frac{1}{4}$  lla. Minä vuonna maksetaan suurin rahamäärä korkoina?

X 9 a. Vinoneliössä on jokainen sivu 75 metriä ja suurempi lävistäjä 137,8 m; kuinka suuret ovat kulmat?

X 10 a. Missä lämpötilassa osoittavat Celciuksen ja Fahrenheitin lämpömittarit samaa astemäärää, kun  $0^\circ$  Cels. vastaa  $+32^\circ$  Fahr. ja  $100^\circ$  Cels.  $+212^\circ$  Fahr.?

1902. S.

X 1. Kaksi korotonta velkaa, jotka ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin 5:6, suoritetaan yhtäsuurilla vähittäismaksuilla. Kun tällainen vähittäismaksu pienemmästä velasta maksetaan joka neljäs viikko, tu-

lee velka kokonaan suoritetuksi 80:ssä viikossa. Kuinka usein ovat vähittäismaksut suuremmasta velasta suoritettavat, jotta se 72:ssä viikossa täydelleen suoritetaisiin?

X 2. Piirrä tunnetusta pisteestä ulkopuolella tunnettua ympyrää tälle sekantti niin, että sekantin ympyrän sisäpuolella oleva osa tulee kolmanneksi proportionaaliksi koko sekantille ja halkaisijalle.

X 3. Kolmion kärjistä piirretyt kolme korkeusviivaa ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin vastakkaisten sivujen inversiarvot. Todista tämä.

X 4. Laske käyttämättä trigonometriasta laskua sisäänpiirretyn säännöllisen kahdeksankulmion sivu, jos ympyrän säde on  $r$ .

X 5. Eräs polkupyöräilijä ajaa erästä paikasta  $1\frac{1}{2}$  tuntia sen jälkeen kuin eräs jalkamatkailija on lähtenyt sieltä samalle taholle ja samaa tietä;  $\frac{3}{4}$  tuntia myöhemmin hän saavuttaa jalkamatkailijan ja ajaa hänen ohitsensa. Kuljettuaan 17 kilometriä lähtökohdasta kääntyy polkupyöräilijä ja ajaa pysähtymättä samaa tietä takaisin sekä tapaa jalkamatkailijan tuntia myöhemmin, kuin hän edellisellä kerralla kulki hänen ohitsensa. Millä nopeudella kulki jalkamatkailija ja millä polkupyöräilijä?

X 6. Eräällä torikauppiasalla on 72 tiuta munia. Myötyänsä osan tavarastaan määrättyyn hintaan tiulta ja siitä saatuaan 96 markkaa, koroittaa hän hinnan 25 pennillä tiulta ja saa siten jäännöksestä 54 markkaa. Mikä oli alkuperäinen hinta?

X 7. Ratkaise yhtälö

$$\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x-12} = \frac{5x-10}{8x^2-18}$$

X 8. Laske trigonometrisesti sisäänpiirretyn säännöllisen kahdeksankulmion sivu, kun ympyrän säde on 5 senttimetriä.

X 9. Missä suhteessa on pohjoisen kylmän vyöhykkeen pinta-ala maan koko pintaan, jos edellytetään, että maa on täydellinen pallo? Pohjoinen kylmä vyöhyke ulottuu  $66^{\circ} 32' 53''$ :sta pohjoista leveyttä napaan asti.

X 10. Pallo joka vierii kaltevaa pintaa myöten, on 6 sekuntia liikkeen alkamisen jälkeen pudonnut 10 metriä pystysuoraan suuntaan. Minkä matkan kaltevaa pintaa myöten se täten on kulkenut, kun sen alkunopeus on  $= 0$  ja painovoiman akseleratio on  $= 9,8$  (jolloin metri ja sekunti ovat pituuden ja ajan yksiköjä)? Kitka ja ilman vastustus jätetään huomioon ottamatta.

### 1903. K.

X 1. Vuoden 1902 kuluessa kasvoi Turun väkiluku  $3,2\%$  ja Tampereen  $2,9\%$ . V. 1903 tammik. 1 p. oli Turun ja Tampereen asukaslukujen suhde 346:343. Kuinka suuri oli tämä suhde 1 p. tammik. 1902?

X 2. Suoran kulman kärkipiste on A, ja sen toisella kyljellä on piste B annettu. Etsi toisella kyljellä piste C, joka on niin sijoitettu, että kun sen kautta samaa kylkeä kohti piirretään kohtisuora CD, jolla on määrätty pituus, yhdistysviivat BC ja AD joutuvat leikkaamaan toisiansa kohtisuoraisesti.

X 3. Jos nelikulmiossa ABCD sivut AB ja AD ovat yhtä suuret, mutta sivut BC ja CD keskenään erisuuret sekä lävistäjä AC puolittaa kulman C, niin ovat vastakkaiset kulmat nelikulmiossa supplementtikulmia. Todista tämä.

4. Ympyrästä, jonka säde on  $r$ , jakaa suora viiva, jonka etäisyys keskipisteestä on  $a$ , kehän kahteen kaareen. Lausu suureilla  $r$  ja  $a$  etäisyys keskipisteestä jätteeseen, joka vastaa jommankumman kaaren puoliskoa.

5. Palloa, jonka säde on  $r$ , jakaa taso sillä tavoin, että siten syntyneiden kahden pallonsegmentin kokonaispinta-alat ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin 7 on 15:een. Kuinka suuri on etäisyys pallon keskipisteestä tasoon?

6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ bx + ay + cz = d \\ cx + by + az = d, \end{cases}$$

kun  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat keskenään erisuuret.

7. Ratkaise seuraava intialaisen matemaattikko Bhaskara Acharyan kahdennellatoista vuosisadalla asettama probleemi:

»Järven vedenkalvolla ui parvi joutsenia. Kymmenen kertaa neliöjuuri joutsenten luvusta kohoaa paikoon Manun laaksoa kohti, sillä he näkevät pilvien ryhmittyvän kokoon taivaankannella. Kahdeksas osa parven lukumäärästä etsii suojaa rannalla olevien lumpeiden keskeltä, ja ainoastaan kolme paria joutsenia jää lähenevästä rajuilmasta välittämättä paikoilleen. Sano minulle, nuori kaunistukkainen tyttö, kuinka monta joutsenta oli parvessa.»

8. Kolme kokonaista lukua muodostaa geometrisen sarjan. Jos keskimäiseen lukuun lisätään 8, muodostuu sarja aritmeettiseksi, ja jos samalla kolmanteen lukuun lisätään 64, saadaan jälleen geometrinen sarja. Mitkä ovat luvut?

9. Nelikulmiossa ABCD ovat kulmat A ja C kumpikin  $90^\circ$ , lävistäjä AC puolittaa kulman A ja muodostaa sivun CD kanssa kulman  $21^\circ 50'$ . Kuinka pitkät ovat sivut BC ja CD, kun mainitun lävistäjän pituus on 145 mm?

10. Kaksi pistettä on sijoitettuna samalla luotivivalla, toinen 80 m toisen yläpuolella. Edellisestä pudotetaan kappale ilman alkunopeutta, ja jälkimäisestä viskataan samalla hetkellä kappale pystysuoraan ylös. Kuinka suuri on jälkimäisen alkunopeus oleva, jotta nämä kaksi kappaletta kohtaisivat toisensa juuri siinä silmänräpäyksessä, jolloin jälkimäinen saavuttaa suurimman korkeutensa? Ilman vastus ja friktisiooni jätetään lukuun ottamatta. Painovoiman akseleratsiooni oletetaan olevan  $= 9,8$ , jos metri ja sekunti ovat pituuden ja ajan yksikköinä.

Ne oppilaat, jotka suorittivat käännöksen latinasta suomeksi, olivat oikeutetut vaihtamaan esimerkit 8–10 seuraaviin:

8 a. Kahdesta ranasta A ja B juoksee kummastakin erilaista suolaliuosta yhteiseen sekoitusastiaan. Laske niiden prosenttimäärät seuraavien tosiasiaiden perusteella. Kun molemmat ranat pidetään yhtäkää avoinna 9 minuutin aika, saadaan sekoitusastiaan 33-prosenttinen suolaliuos. Jos tämän jälkeen suljetaan rana A, kun sitä vastoin rana B vielä 3 minuuttia on avoinna, tulee sekoitusastiassa oleva liuos 37,5-prosenttiseksi. Tyhjä sekoitusastia täyttyy 24 minuutissa, jos ainoastaan rana A on avoinna, ja 32:ssa minuutissa, kun ranaa B yksinään käytetään.

9 a. Nelikulmiossa ABCD ovat kulmat A ja C kumpikin  $90^\circ$ , lävistäjä BD muodostaa sivun AD kanssa kulman  $23^\circ 10'$  ja sivun CD kanssa kulman

45°. Sivu AD on 145 mm, kuinka pitkät ovat sivut BC ja CD?

10 a. Tiivistyspumppu sisältää 0.8 litraa ilmaa. Tämä ilmamäärä puserretaan resipienttiin, joka ennestään sisältää 1,9 litraa ilmaa. Kuinka suureksi tulee täten paino resipientissä, kun alkuperäinen paine sekä siinä että tiivistyspumppussa on 760 mm elohopeata?

### 1903. S.

1. Piiritettyssä linnoituksessa, jossa on 990 miestä varusväkeä, on muonavarjoja 29 päiväksi. 8 päivän kuluttua kaatuu eräässä rynnäkössä 45 miestä ja vielä 8 päivän kuluttua vähennetään päivämuonat seitsemään kahdeksasosaan niiden alkuperäisestä määrästä. Kuinka monta päivää saattavat muonavarat vielä riittää?

2. Kaksi ympyrää leikkaa toisensa. Piirrä toisesta leikkauspisteestä suora niin, että ne osat tätä suoraa, jotka ovat jänteinä ympyröissä, ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin ympyröiden säteet.

3. Jos mielivaltaisesti valitusta pisteestä tasasivuisessa kolmiossa piirretään kohtisuorat kaikille kolmion sivuille, niin näiden kolmen kohtisuoran summa on yhtä suuri kuin kolmion korkeus. Todista tämä.

4. Ympyrän ympäri on piirretty tasasivuinen kolmio ja saman ympyrän sisään neliö. Missä suhteessa ovat kolmion sivu ja neliön sivu toisiinsa?

5. Eräs tasapintainen kuvio, jota rajoittamassa on neliön kolme sivua sekä puoliympyrä, joka on piirretty neliöön niin, että neliön neljäs sivu on sen halkaisijana, pyörii mainitun neljän sivun ympäri siten, että tämä neljäs sivu on akselina. Mikä on näin

syntyneen kappaleen tilavuus, kun neliön sivu on määrätty?

6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2(2x - 3y) - 3(3x - 8z) = 3 \\ 3(2x - 3y) - 8(8y - 7z) = 1 \\ 8(3x - 8z) - 7(8y - 7z) = 1. \end{cases}$$

7. Eräs 12000 markan suuruinen pääoma on lainattu kahdessa erässä, joista toinen antaa 360 mk ja toinen 190 mk vuotuista korkoa. Edellinen korko luetetaan alemman prosentin mukaan kuin jälkimäinen, ja eroitus prosenttien välillä on  $\frac{1}{4}$ . Mitkä ovat prosentit?

8. Juna kulkee A:sta B:hen 30 km nopeudella tunnissa ja B:stä C:hen 45 km nopeudella tunnissa. Päinvastaiseen suuntaan matkustettaessa on junalla matkalla CB 24 km ja matkalla BA 36 km nopeus tunnissa. A:sta C:hen juna kulkee 26 minuutissa ja C:stä A:han 30 minuutissa, kun ei B:hen pysähdytä. Kuinka suuret ovat välimatkat AB ja BC?

9. Vinoneliössä on jokainen sivu 16 cm ja yksi kulmista  $79^\circ 20'$ . Kuinka pitkät ovat lävistäjät?

10. Ontto rautapallo, jonka ulkosäde on 154 mm, kelluu vedessä, jolloin puoli siitä on vedenpinnan yläpuolella. Kuinka suuri on pallon sisäsäde, kun raudan ominaispaino on 7,7.

### 1904. K.

1. Eräässä 25-vuotisten henkilöitten ryhmässä on 75 % miehiä ja 25 % naisia. Montako % miehiä ja montako % naisia on niiden tämän ryhmän henkilöiden joukossa, jotka elävät 60 vuoden ikään, kun otaksutaan, että 60900:sta 25-vuotisesta miehestä 37758

ja 64450 25-vuotisesta naisesta 42537 saavuttaa 60 vuoden iän?

2. On ympyrä, siinä jänne ja samassa tasossa piste. Piirrä pisteen kautta suora siten, että jänne puolittaa ympyrään lankeavan osan siitä.

3. On ympyrä ja sen ulkopuolella piste P. Ympyrän keskipisteen O ja pisteen P kautta piirretään, mielivaltainen jana säteenä, ympyrä. Ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon C se piste, jossa jänne AB leikkaa suoran OP. Todista, että alkupe-  
räisen ympyrän säde on OC:n ja OP:n keskiproport-  
sionaali.

4. Samassa tasossa on kaksi ympyrää, joiden säteet ovat 35 ja 45 mm. Niiden keskipisteiden väli on 92 mm. Kuinka suuri on niiden pisteiden väli, joissa ympyräin yhteiset tangentit leikkaavat keskipisteiden kautta piirretyn suoran?

5. Pallonsegmentti, jonka korkeus on 15 cm, on tilavuudeltaan 28260 cm<sup>3</sup>. Kuinka suuri pallon säde on? ( $\pi = 3,14$ .)

6. Ratkaise yhtälö

$$2\sqrt{2x+2} - \sqrt{4x+5} = 7.$$

7. Itäisen ekspressijunan kulkunopeuden keskimäärä on 57 km tunnissa. Se lähtee Pariisista maanantaina klo 7<sup>t</sup> 8<sup>m</sup> i. p. Pariisin ajan mukaan ja saapuu Konstantinopoliin seuraavana torstaina klo 9<sup>t</sup> 55<sup>m</sup> a. p. Itä-Euroopan ajan mukaan. Konstantinopolista juna lähtee perjantaina klo 10<sup>t</sup> 40<sup>m</sup> i. p. Itä-Euroopan ajan mukaan ja saapuu Pariisiin maanantaina klo 9<sup>t</sup> 37<sup>m</sup> a. p. Pariisin ajan mukaan. Pitkähkö näiden kaupunkien välinen rautatielinja on ja paljonko Itä-Euroopan aika on Pariisin ajasta edellä?

S. Henkilö antaa lainaksi 10000 mk 6 % korkoa vastaan. Jonkun ajan kuluttua laina korkoineen maksetaan takaisin. Siten saatu rahamäärä on korkoa kasvamatta  $\frac{1}{2}$  kuukautta, mutta annetaan sitten lainaksi 6 % korosta. Yhden vuoden kuluttua ensimmäisestä lainanannosta on pääoma täten kasvanut 10582 markaksi. Kuinka kauvan rahat ensi kerralla olivat lainassa?

9. Kolmiossa on yksi kulma 82° 20'. Sen puolittaja jakaa vastaisen sivun osiin, joista toinen on 50 cm ja toinen 92,5 cm. Suuretko muut kulmat ovat?

10. Kun kivi pudotetaan pystysuoraan kaivosku-  
luun, kuullaan sen pohjaan sattuminen 3,6 sek. kulut-  
tua. Kuinka pitkä aika kuluu itse putoamiseen, kun  
äänen nopeus on 336 m sekunnissa, painovoiman kiih-  
tyväisyys 9,8 (m ja sek. yksikköinä), ja ilman vastus  
ja kitka jätetään huomioon ottamatta?

Ne oppilaat, jotka suorittivat latinalaisen käännöstehtävän, olivat oikeutetut vaihtamaan esimerkit 9 ja 10 seuraaviin:

9 a. Määritäkseen joen leveyden tähtää toisella rannalla vedenrajassa seisova mittaaaja toiselle rannalle vedenrajaan ja mittaa sekä tämän tähtäyssuunnan ja luotiviivan välisen kulman että silmänsä korkeuden vedenpinnasta. Kulmalle hän saapi arvon 74° 40', silmän korkeudelle 1,7 m. Leveäkö joki on?

10 a. 3,75 kg painavaan rautalevyyn, jonka ominaispaino on 7,5, on kiinnitetty 2,8 kg painoinen puupalanen. + 4° C lämpimään veteen upotettuna tämä kappale painaa 2,05 kg. Mikä puupalasen ominaispaino on?

1904. S.

1. Timantti on lohjennut kahdeksi palaseksi, joiden painot suhtautuvat toisiinsa kuten 3:5. Montako %

alkuperäisestä arvostaan se tämän kautta on kadottanut, jos timantin arvo on suoraan verrannollinen sen painon neliöön?

2. On ympyrä ja neliö. Piirrä ympyrään neliön suuruisen suorakaide.

3. Kaksi ympyrää sivuaa toisensa ulkopuolitse. Sivuaumispisteen kautta on piirretty kaksi yhteistä sekanttia, jotka leikkaavat toisen ympyrän pisteissä A ja B ja toisen pisteissä C ja D. Todista, että yhdistysviivat AB ja CD ovat yhdensuuntaiset.

4. Suorakulmaisen tasakylkisen kolmion sisään on piirretty ympyrä. Määrää ilman trigonometriasta laskua ympyrän säteen suhde hypotenuusaan.

5. Aseman suuntainen taso jakaa kartion siten, että korkeusviiva jakautuu kahtia. Miten molempien kartio-osien tilavuudet suhtautuvat toisiinsa?

6. Muuta yhtälö

$$\sqrt{x^2 + x - 2} = x^2 - x$$

sellaiseksi, että sen oikeanpuoleinen jäsen on 0 ja vasen on kahden tekijän tulo. Määrää sen jälkeen kaksi yhtälön juurta.

7. Ensimmäisen  $\frac{1}{4}$  työtä isä suorittaa kahden poikansa avulla 4 päivässä, toisen  $\frac{1}{4}$  hän tekee yhdessä vanhemman pojan kanssa 5 päivässä ja kolmannen  $\frac{1}{4}$  nuoremman pojan avulla 6 päivässä. Lopuksi hän suorittaa viimeisen  $\frac{1}{4}$  yksin. Pitkähkö ajan hän tähän tarvitsee?

8. Rautatiejuna säästäisi 140 km matkalla aikaa 40 min, jos sen nopeus olisi 7 km suurempi tunnissa. Monessako tunnissa juna kulkee tämän matkan?

9. Ympyrälle on piirretty kaksi tangenttia, jotka keskenään muodostavat  $69^\circ 32'$  kulman. Suuriko sivuaumispisteiden väli on, kun ympyrän säde on 12 cm?

10. Vedellä täytetyn astian seinässä oleva hana, joka sijaitsee 545 mm vedenpinnan alapuolella, avataan. Millä nopeudella vesi virtaa ulos, jos otaksutaan, että kitka ja ilman vastus ovat 0 ja että  $g$  on 9.81 (m ja sek. yksikköinä)?

## 1905. K.

1. Kolme liikeapulaista saa palkkioksi 589 markkaa, jotka ovat jaettavat heidän kesken päinvastaisessa suhteessa heidän vuosipalkkoihinsa. Paljonko saa kukin, kun vuosipalkat ovat 2000, 1800 ja 1500 mk.?

2. Piirrä ympyrä, joka sivuaa kahta tunnettua ympyrää, toista tunnetussa pisteessä.

3. Kaksi suoraa viivaa sivuaa ympyrää pisteissä A ja B. Viivojen leikkauspisteen kautta vedetään mielivaltainen sekantti, joka leikkaa ympyrän pisteissä C ja D. Todista, että  $AC : AD = BC : BD$ .

4. Kuinka pitkä on kahden toistensa ulkopuolella olevan ympyrän keskipisteiden välinen jana, kun säteet ovat tunnetut ja kun ne kaksi ympyräin yhteistä tangenttia, jotka leikkaavat toisensa mainitulla janalla olevassa pisteessä, muodostavat suoraa kulmia keskenään.

5. Tasakylkinen kolmio kiertää suoran viivan ympäri, joka kulkee aseman toisen päätepisteen kautta ja on yhdensuuntainen korkeusviivan kanssa. Laske täten syntyneen kappaleen tilavuus, kun kolmion asema on 8 cm ja sen korkeus 10 cm.

6. Minkä arvon saa lauseke

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$$

$x$ :n ollessa  $= \frac{2ab}{1+b^2}$ , kun vain neliöjuurten positiiviset arvot otetaan lukuun?

7. Erään liikemiehen tuli myydä kahdelle kauppattavalleen, A:lle ja B:lle, vissit määrät erästä tavaraa. A:n kanssa sovittu myyntihinta antaa voiton, joka tekee 10 prosenttia ostohinnasta; B:n kanssa sovittu myyntihinta antaa taas voiton, joka tekee 10 prosenttia tästä myyntihinnasta. Kuitenkin muutetaan välipuhe siten, että se määrä, joka oli tuleva A:lle, vähenee 108 kg:lla, ja että B:lle tuleva määrä sen sijaan lisääntyy 108 kg:lla, jotavastoin sovitut hinnat pysyvät entisellään. Tämä tavarainmyynti tuottaa liikemiehelle voiton joka tekee 10,6 % siitä summasta, minkä hän itse on maksanut tavarasta, jotavastoin hän, alkuperäisen välipuheen mukaan, olisi saanut voiton, joka olisi tehnyt 10,6 % samaisesta summasta. Kuinka suuret ovat ne tavaramäärät, jotka A ja B saavat?

8. On nikkelöitävä kuusikymmentä levyä, joista toiset ovat messinkisiä, toiset kuparisia. Tätä ennen painaa jokainen messinkilevy 2,6 kg ja jokainen kuparilevy 2,9 kg. Nikkelöimisen jälkeen painavat kaikki messinkilevyt yhteensä 54 kg ja kaikki kuparilevyt kaikkiaan 120 kg. Paljonko jokaisen levyn paino on lisääntynyt, jos edellytetään, että painonlisäys on sama kaikissa levyissä?

9. Kulman  $19^{\circ} 20'$  muodostavat keskenään tähtysviivat, mitkä kulkevat erään kuusen huippuun ja juurelle pisteestä, joka on 210 cm kuusen juuren kautta käyvän vaakasuora-tason yläpuolella. Kuinka korkea

kuusi on, kun se seisoo kohtisuorana mainitulla vaakasuora-tasolla ja kun pisteen kohtisuora etäisyys kuusesta on 35,5 metriä?

10. Kaksi samaan pisteeseen sovitettua voimaa, kumpikin 120 kg:n suuruinen, antavat eräälle kappaleelle saman liikkeen, kuin yksinäinen 85 kg:n voima. Kuinka suuri on ensinmainittujen voimien välinen kulma?

## 1905. S.

1. Eräaseen säästöpankkiin pantiin kolme kertaa rahoja säästöön: ensi kerralla 120 mk, kaksi kuukautta sen jälkeen 280 mk ja taas kolmen kuukauden kuluuttua 160 mk. Vuoden kuluttua ensimmäisen säästöpanon jälkeen ovat nämä rahamäärät kasvaneet yhteensä 583 mk:n 45 p:n suuruiseksi summaksi. Minkä koron on ensimmäinen panos erikseen tuottanut?

2. Piirrä kaksi janaa, kun niiden erotus sekä keski-proportsionaali ovat tunnetut.

3. Jana AB, joka on jaettu jatkuvaisessa suhteessa, pidennetään janalla BC, joka on suuremman osan pituinen. Todista, että piste B jakaa koko janan AC jatkuvaisessa suhteessa.

4. Ympyrän kehän, jonka säde on 5 cm, jakaa 8 cm:n pituinen jänne kahteen kaareen. Laske sen janteen pituus, joka vastaa puolta pienemmästä kaaresta.

5. Neliö, jonka sivu on 12 cm, siirtyy yhdensuuntaisesti itsensä kanssa siten, että jokainen kärkipiste liikkuu suoraa viivaa pitkin, jonka kalteuskulma neliön tasoa vastaan on  $30^{\circ}$ . Kuinka suuri on sen kappaleen tilavuus, jonka neliö synnyttää, kun jokainen kärkipiste suorittaa 25 cm:n pituisen matkan?

## 6. Murtolauseke

$$\frac{(x^2 + 2x - 15)(x^2 + 5x - 14)}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 2x - 35)}$$

on saatettava mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

7. Laske sellaisen rautatiejunan pituus ja nopeus, joka sivuuttaakseen paikallaan seisovan henkilön tarvitsee 21 sekuntia ja kulkeakseen 378 metrin pituisen tunnelin läpi tarvitsee  $1\frac{1}{4}$  minuuttia laskettuna siitä hetkestä, jona veturi menee tunnelin suusta sisään siihen silmänräpäykseen, jona viimeinen vaunu lähtee sen toisesta päästä ulos.

8. Padottu lammikko voidaan täyttää vedellä kahden yhtäaikaa avoinna olevan tulokanavan kautta 18 tunnissa. Yksistään toisen tulokanavan avulla se täyttyy 15 tuntia pitemmässä ajassa kuin yksistään toisen avulla. Kuinka pitkän ajan tarvitsee jälkimäinen tulokanava täyttääkseen lammikon?

9. Luotiviivaa vastaan  $59^\circ 10'$  kulman muodostavan katon harjalle on pystytetty pystysuora, 2,3 metrin korkuinen lipputanko. Kuinka korkealla horisontin yläpuolella on aurinko siinä silmänräpäyksessä, jolloin lipputangon varjo katolla muodostaa suoria kulmia harjan kanssa sekä on 6,7 metrin pituinen?

10. Kuinka suuri on ilmanpaine vaakasuoraa, ympyrämuotoista laattaa vastaan, jonka halkaisija on 1,8 m, jos ilmapuntari näyttää 760 mm:iä? (Yhden kilon painoisen elohopeamäärän tilavuus on  $73,55 \text{ cm}^3$ .  $\log \pi = 0,49715$ ).

## 1906. K.

1. Seinäkello, jonka lyöntilaitos ilmoittaa ainoastaan täydet tunnit, vedetään 6:n ja 7:n välillä. Vedon

jälkeen ovat molemmat kellonluodit yhtä korkealla. Neljä tuntia myöhemmin riippuu toinen luoti 8 cm matalammalla kuin toinen. Kuinka paljon laskevat luodit vuorokaudessa, kun tiedetään niiden aina 12:n tunnin päästä olevan yhtä korkealla toinen toisensa kanssa? (Lyöntilaitosta käyttävä luoti liikkuu ainoastaan kellon lyödessä ja laskeutuu yhtä paljon kullakin eri lyönnillä.)

2. Piirrä tunnettuun ympyrään suorakaide, joka on yhtä suuri kuin tunnettu neliö.

3. Ympyrään piirrettyssä nelikulmiossa ABCD:ssä ovat sivut BC ja CD yhtä suuret. Todista, että kumpikin näistä sivuista on koko lävistäjän AC:n ja sen C-pisteen ja toisen lävistäjän BD:n välisen osan keski-proportsionaali.

4. Säännöllisen kuusikulmion, jonka sivu on 12:n cm:n pituinen, jakaa lävistäjä kahteen eri suureen osaan. Laske niiden pinta-ala.

5. Palloa, jonka säde on 40 cm, sivuaa kartion sivupinta. Kartion kärjen ja pallon keskipisteen väli on 104 cm. Kuinka suuri pinta-alaltaan on se osa kartion sivupintaa, joka on sen kärjen ja sivuamisviivan välissä?

6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{5}{4x-5y} = \frac{3}{3y-10z} \\ \frac{75}{3x+5z} = \frac{2}{3y-10z} \\ 4x-5y = 3y-10z + \frac{2}{5} \end{cases}$$

7. Kahden virranviereisen paikan A:n ja B:n välinen höyrylaivareitti on 160:n km:n pituinen. A:sta klo 6 a. p. lähtenyt höyrylaiva sivuuttaa klo  $10\frac{3}{4}$  a. p.

B:stä tulevan höyrylaivan, joka on lähtenyt sieltä klo 8 a. p. Jos taas ensinmainittu laiva lähtee klo 8 a. p. ja viimeainittu klo 6 a. p., niin kohtaavat ne toisensa klo 11  $\frac{1}{4}$  a. p. Kuinka suuri on virran nopeus ja kuinka monta kilometriä tunnissa kulkee kumpikin höyrylaiva seisovassa vedessä, kun otaksutaan niillä siinä olevan sama nopeus?

8. Juhlapäivällisiin on ilmoittautunut joukko maksavia osanottajia ja sitäpaitsi on kutsuvieraita 10. Edellisille on maksu määrätty kullekin 6:ksi mk:ksi 30 p:ksi. Vaan kuusi ilmoittautuneista osanottajista ei pääsekään päivällisiin, jonka tähden kulut tasataan muiden kesken. Kunkin heistä tarvitsee kuitenkin maksaa vain 6 mk, koska kutsuvieraistakin jää neljä tulematta. Kuinka monta osanottajaa oli alkuperäisesti ilmoittautunut?

9. Tampereen kaupunki, Ruoveden kirkonkylä, Vilppulan asema ja Luopioisten kirkonkylä ovat yhtä etäällä Oriveden kirkonkylästä. Mainitut kolme kirkonkylää ovat sitäpaitsi suorassa linjassa. Tampereen ja Ruoveden etäisyys linnuntietä on 56 km, Ruoveden ja Vilppulan 21,6 km, Vilppulan ja Luopioisten 72,8 km. Kuinka suuri on suuntain Ruoveden—Tampereen ja Ruoveden—Luopioisten välinen kulma?

10. Missä tulokulmassa alkaa valon kokonaisuhojastus siirryttäessä ilmaan väliaineesta, jonka taiteeksponentti on 1,474?

## 1906. S.

1. Vaunun takapyörä tekee 8 kierrosta sillä aikaa kuin etupyörä tekee 11; pyörien halkaisijain eroitus on 18 cm. Kuinka pitkät ovat halkaisijat?

2. Piirrä ympyrän ympäri vinoneliö, joka on yhtä suuri kuin tunnettu neliö.

3. Ympyrän janteen kummankin päätepisteen kautta on piirretty suora viiva kohtisuoraan jännettä vastaan. Todista, että mainitut viivat leikkaavat jokaisesta ympyrän keskipisteen kautta kulkevasta suorasta viivasta osan, jonka ympyrän keskipiste jakaa kahtia.

4. Neliössä ABCD yhdistetään kärkipiste A ja sivun BC keskipiste, B ja CD:n keskipiste, C ja DA:n keskipiste sekä D ja AB:n keskipiste. Laske sen pienen neliön pinta-ala, jonka yhdistysviivat muodostavat, kun ABCD:n pinta-ala on 30 cm<sup>2</sup>.

5. Katkaistun kartion sivupinta suhtautuu asemain (kantojen) eroitukseen kuin 5:3. Kuinka suuri on katkaistun kartion korkeus, kun asemain säteet ovat 4 ja 7 cm?

6. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{5(x-1)} - \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3} = 0.$$

7. Eräs henkilö tarvitsee 5350 markkaa suorittaakseen yhden vuoden korot ja lyhennykset kahdesta velasta, jotka yhteensä tekevät 10500 markkaa. Toisesta velasta, josta korko on 6 prosenttia, on lyhennettävä puolet ja toisesta, jonka korko luetaan 5 prosentin mukaan, kolmasosa. Kuinka suuret ovat velat?

8. Kaksi palloa, joiden säteet ovat 6 ja 7 cm:n pituiset, liikkuvat siten, että niiden keskipisteet siirtyvät suoran kulman kylkiä myöten sen kärkeä kohti. Toisen pallon nopeus on 1  $\frac{1}{4}$  cm ja toisen 3 cm sekunnissa. Liikkeen alussa on edellisen pallon keskipiste 10 ja jälkimmäisen 24 cm:n päässä kulman kärjestä. Kuinka monen sekunnin kuluttua pallot sivua-

vat toisiansa ulkopuolitse, kun niiden liike alkaa samaan aikaan?

9. On kolme paikkaa A, B ja C, joista B on 23 km:n päässä koilliseen A:sta, ja C 18 km:n päässä pohjoiseen B:stä. Kuinka paljon poikkeaa viiva AC siitä viivasta, joka kulkee etelästä pohjoiseen?

10. Kuinka monessa sekunnissa on pystysuoraan suuntaan ammuttu kuula noussut 960 m, kun sen alkunopeus on 196 m sekunnissa ja painovoiman akseleratsiooni on 9,8 m sekunnissa sekä kun ilman vastustusta ja friktisioonia ei oteta lukuun?

### 1907. K.

1. Täysikasvuisen ihmisen luurangon paino on  $12\frac{5}{6}$  prosenttia koko ruumiin painosta. Luurangon kivennäisaineet painavat 5980 gr. Missä suhteessa on niiden paino luurangon muun osan painoon, kun koko ruumiin paino on 70 kg?

2. Piirrä kolmio, joka on yhdenmukainen tunnetun kolmion kanssa ja jonka pinta-ala suhtautuu sen pinta-alaan kuin 3:5.

3. On kaksi ympyrää, joista toinen on kokonaan toisen sisällä keskipisteiden olematta yhteiset. Suurempaan ympyrään on vedetty jänne niin, että se sivuaa pienempää ja samalla on yhdensuuntainen sen suoran viivan kanssa, joka kulkee ympyräin keskipisteiden kautta. Todista, että kehäin välisen tason pinta-ala on yhtäsuuri kuin ympyrän, jonka halkaisija on mainitun jänteen pituinen.

4. Kun säännölliseen viisikulmioon piirretään sen viisi lävistäjää, syntyy sen sisään toinen säännöllinen

viisikulmio. Mikä on molempien viisikulmioiden sivujen suhde?

5. Kartiota leikkaa aseman suuntainen taso niin, että korkeusviiva jakautuu kahteen yhtä suureen osaan. Missä suhteessa on näin saadun katkaistun kartion tilavuus koko kartion tilavuuteen?

6. Mikä arvo on  $a$ lla oleva, että yhtälön

$$x^2 + ax + 3a = 0$$

toinen juuri olisi kaksi kertaa niin suuri kuin toinen?

7. Testamenttia avattaessa huomataan, että 1485 markan summa on jaettava kahdelle palvelijalle niin, että kumpikin 50 vuotta täytettyään saa määrän, joka on suhteellinen siihen aikaan, jonka ovat palvelleet vainajaa. Toinen on 44 ja toinen 40 vuoden vanha, edellinen on palvellut vainajaa  $10\frac{1}{2}$  ja jälkimäinen  $7\frac{1}{2}$  vuotta. Mihin osiin on summa jaettava, kun lasketaan rahojen kasvavan yksinkertaista korkoa  $4\frac{1}{2}$  prosentin mukaan?

8. Rautatiejuna on 72 kilometrin matkalla lumies- teiden vuoksi myöhästynyt 15 minuuttia. Sen nopeus on  $1\frac{1}{2}$  tunnin ajan ollut 2 kilometriä ja lopun aikaa 8 kilometriä tavallista vähempi tunnissa. Missä ajassa suorittaa juna tavallisesti tämän matkan?

9. Ympyrän kehän pituus voidaan jotenkin oikein määrätä seuraavalla tavalla. Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on  $\frac{7}{8}$  toisesta, ja tehdään edellisen kateetin vastainen kulma kaksi kertaa suuremmaksi. Kahdennetun kulman toinen kylki tehdään niin suureksi kuin  $\frac{16}{15}$  ympyrän halkaisijasta ja tämä kylki projisoidaan toiselle kyljelle. Kun saatuun projektsiooniin lisätään kolme halkaisijan mittaa, saadaan jana, joka jotenkin tarkoin on ympyrän ke-

hän mittainen. Laske, mikä on janan pituus halkaisijaan verrattuna. (Lasku voidaan suorittaa sekä logaritmejä käyttämällä että ilman.)

10. Mihin lämpö määrään on joku määrä kuivaa ilmaa jäähdytettävä, että se 760 mm:n paineessa kutistuisi  $\frac{3}{4}$ aan sitä tilavuutta, mikä sillä on  $+50^{\circ}$  Cels. lämpimässä ja 750 mm:n paineessa? Ilman laajenemiskoeffisientti on  $\frac{1}{273}$ .

### 1907. S.

1. Määräsuuruinen kauppapuodin ikkuna voidaan tehdä joko yhdestä tai kolmesta keskenään yhtäsuuresta ruudusta. Edellisessä tapauksessa ottaisivat ikkunanpuitteet kuudennentoista osan, jälkimmäisessä tapauksessa kymmenennen osan koko ikkuna-aukosta. Missä suhteessa ovat toisiinsa kustannukset kummasakin tapauksessa tarvittavasta lasista, jos otaksutaan, että lasiruudun hinta on suhteellinen sen pinta-alan kuutioon?

2. Piirrä kolmio, jonka pinta-ala on yhtäsuuri kuin toisen tunnetun kolmion pinta-ala ja jonka sivut suhtautuvat toisiinsa kuin 3:4:5.

3. Kaksi ympyrää leikkaa toisiansa pisteissä A ja B. Vedä halkaisija AC toiseen ja halkaisija AD toiseen ympyrään. Todista, että pisteet B, C ja D ovat samassa suorassa viivassa.

4. Ympyrään on vedetty jänne. Laske sen pituus, jos säde on 12 cm, ja jos määrätystä janteen pisteestä tiedetään, että sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on 8 cm ja sen etäisyys janteen toisesta päätepisteestä 10 cm.

5. Sylinterillä on yhtäsuuri tilavuus ja yhtäsuuri sivupinta kuin tunnetulla kartiolla. Määrää sylinterin asemasäde ja korkeus kartion asemasäteessä ja korkeudessa.

6. Supista murtolauseke

$$\frac{48x^2 - 16\sqrt{30}x + 13}{48x^2 - 72x - 13}$$

7. Eräs henkilö tahtoi ostaa kahvia 100 markalla. Ostettaessa myönnettiin hänelle alennusta 5 % kahvin hinnasta, joten hän sai 2 kg enemmän kahvia kuin hän muutoin olisi saanut, jotapaisi hänelle vielä jäi 25 penniä mainitusta rahasummasta. Montako kiloa kahvia hän sai?

8. Eräessä seurassa päätettiin erinäiseen tarkoitukseen kerätä määrätty rahasumma siten, että jokainen läsnäollut antaisi yhtäpaljon. Keräystä alettaessa oli kuitenkin 8 henkilöä ehtinyt poistua. Jotta siitä huolimatta saataisiin kerätyksi ajateltu rahamäärä, maksoi jokainen jäljelläolevista 50 penniä enemmän kuin alkujaan oli sovittu. Jokainen poistuneista 8 henkilöstä otti kuitenkin myöhemmin osaa keräykseen antamalla yhtäsuuren summan kuin jokainen kokouksessa maksaneista oli suorittanut, ja sen lisäksi antoi vielä eräs syrjäinen henkilö 5 mk. Täten saatiin kokoon kaikkiansa tasan kaksikertaa niin suuri summa kuin alkujaan oli aiottu kerätä. Kuinka monta henkilöä oli alkujaan seurassa ja paljonko olisi jokaisen ollut maksettava?

9. Vuorenkukkulalle on pystytetty pystysuora, 7,5 m korkuinen tanko. Tähystysviivat erästä alempana olevasta pisteestä tangon kärkeen ja juureen muodostavat vaakasuoran tason kera  $45^{\circ}$  ja  $40^{\circ}$  kaltevuus-

kulmat. Korkeallako siitä vaakasuorasta tasosta, jolla piste on, on tangon juuri?

+ 10. Lasinen pallo painaa 2 kg. Suuriko on sen pinta, kun tiedämme että lasin ominaispaino on 2,88?

### 1908. K.

+ 1. Tammikuun 1 p. 1908 korotettiin olutpanimoiden mallasvero 1 markasta 4 markkaan 10 kilolta maltaita. Samaan aikaan korottivat muutamat olutpanimot oluen hinnan 6 markasta 8 markkaan olutkorilta (= 16 litraa). Monellako prosentilla nykyisestä korkeammasta oluen hinnasta näiden panimoiden voitto oluesta on kohonnut, kun tiedetään, että 100 litran valmistukseen tarvitaan 26,5 kg maltaita?

X 2. Ympyränneljänneksen ABC:n ympäri on piirretty ympyrä siten, että pisteet A, B ja C sijaitsevat tämän kehällä. Piirrä ympyrä, jonka ala on yhtä suuri kuin mainitun ympyrän ja ympyränneljänneksen alojen eroitus.

3. Todista seuraava väittämä:

Jos piirretään suora viiva kolmion sivun keskipisteen kautta kohtisuoraan sitä vastaan, niin se ei voi leikata tämän sivun vastakkaisen kulman puolittajaa kolmion sisäpuolella.

X 4. Vanhat egyptiläiset arvelivat, että ympyrän ala olisi yhtä suuri kuin sen neliön ala, jonka sivuna on  $\frac{8}{9}$  ympyrän halkaisijasta. Mikä olisi ympyrän kehän ja halkaisijan suhde, jos tämä arvelu pitäisi paikkansa?

X 5. Palloon, jonka säde on 43,5 cm, on piirretty lieperiö (sylinteri), jonka korkeus on 60 cm. Laske lieperiön ja pallon tilavuuksien suhde.

6. Poista juurimerkit murtolausekkeen

$$\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

nimittäjästä.

7. Puutarhuri säilyttää kahdessa laatikossa kahta eri multasekoitusta. 1:nen laatikko on kokonaan, mutta 2:nen ainoastaan puoliksi täynnä. Hän valmistaa uuden multasekoituksen täyttämällä 2:sen laatikon täydellisesti 1:sestä laatikosta otetulla mullalla sekä täyttämällä taas, multaa huolellisesti sekoitettuaan, 1:sen laatikon 2:sta laatikosta otetulla mullalla. Siitä multasekoituksesta, joka täten syntyy 1:seen laatikkoon, on  $\frac{5}{7}$  samaa multaa, jota siinä alkuaan oli. Kuinka paljon 2:nen laatikko on 1:stä suurempi.

8. Jos rahasumman annetaan kasvaa korkoa 8 kuukautta, kasvaa se 9360 markaksi. Sama summa voidaan jakaa kahteen osaan niin, että toinen 6 kuukaudessa kasvaa 3090 markaksi ja toinen 12 kuukaudessa 6360 markaksi. Kuinka suuri on summa, jos korko eri tapauksissa luetaan saman prosentin mukaan, ja mikä tämä prosentti on?

9. Kuinka pitkä on ympyrän säde, jos  $24^{\circ} 16'$  suuruista sentrikulmaa vastaa 21 cm pituinen jänne.

10. Kuinka monta kiloa 100 asteen lämpöistä vesihöyryä tulee tiivistää 250 kiloon vettä, jotta veden lämpö kohoaisi 13 asteesta 37 asteeseen, kun tiedetään, että 100 asteisen veden höyryytymislämpö on 537 kaloria?

### 1908. S.

1. Työnantaja oli erääseen työhön ottanut 10 työmiestä sovitusta päiväpalkasta ja laski työn tällä työ-

voimalla tulevan valmiiksi 20 päivässä. Neljän päivän kuluttua vaativat työmiehet palkankorotusta. Työntantaja teki silloin 6 miehen kanssa sopimuksen työn jatkamisesta 20 % palkankorotusta vastaan, ja 10 päivää myöhemmin otti hän työhön vielä muutamia miehiä 3 mk 50 p päiväpalkasta. Työ kesti täten 4 päivää enemmän aikaa ja tuli 92 mk kalliimmaksi kuin jos 10 ensin työhön otettua miestä olisi suorittanut sen alkuperäisesti sovitusta päiväpalkasta. Kuinka suuri oli tämä palkka?

2. Muuta nelikulmio tasakylkiseksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

3. Kahden teräväkulmaisen kolmion ABC ja A'B'C' kärjistä A ja A' piirretään kohtisuorat vastakkaisia sivuja vastaan; kantapisteet olkoot D ja D'. Pisteistä D ja D' piirretään sitten kohtisuorat muita sivuja vastaan; kantapisteet olkoot E, F, E' ja F'. Todista, että kolmiot ABC ja A'B'C' ovat yhdenmukaiset, jos  $AD : A'D' = DE : D'E' = DF : D'F'$ .

4. Suoran kulman sivuista erotetaan, kärjestä lukiin, 4 cm pituisia janoja, ja nämä halkaisijoina piirretään ympyröitä. Kuinka suuri on näiden yhteisen osan pinta-ala?

5. Neliö ja tasasivuinen kolmio, joilla on yhtä suuret pinta-alat, pyörivät kerran yhden sivunsa ympäri. Laske näin syntyneiden kappalten kokonaispinta-alojen suhde.

6. Yhtälön

$$x^2 + (a + b)x + 2ab = 0$$

juuret olkoot  $\alpha$  ja  $\beta$ . Lausu summa  $\alpha^2 + \beta^2$  mahdollisimman yksinkertaisesti  $a$ :ssa ja  $b$ :ssä.

7. A:llä osti maatilan 20000 markasta ja möi sen B:lle, joka taas puolestaan möi sen C:lle 20900 mar-

kasta. Kuinka monta prosenttia ostohinnasta voitti A, kun tiedetään, että B menetti 5 % siitä summasta, jonka hän tilasta maksoi?

8. Kahden paikan A ja B välillä kulkee kaksi eri pitkää tietä. A:sta lähtee yhtä aikaa kaksi jalkamiestä, toinen toista, toinen toista tietä pitkin B:hen, palatakseen toista tietä. Kahden tunnin kuluttua tapaavat he toisensa, jolloin se, joka lähti pitempää tietä, oli kulkenut  $\frac{6}{7}$  siitä. Sama henkilö joutuu takaisin lähtöpaikkaan 44 minuuttia ennen toista. Kuinka pitkä on pitempi tie lyhyempään verrattuna, kun tiedetään, että kummankin jalkamiehen nopeus koko ajan pysyi muuttamattomana?

9. Säännöllisen viisikulmion sivun pituus on 2,73 cm. Mikä on sen pinta-ala?

10. Jos 135 gr painoinen lyijypala kiinnitetään korkkikuulaan, jonka säde on 3 cm, niin molemmat kappaleet yhteensä, upotettuina 4° lämpöiseen veteen, painavat 44 gr. Mikä on lyijyn ominaispaino, kun tiedetään, että korkin ominaispaino on 0,3?

1909. K.

1. Rakennustyössä tulivat ainekset 10 prosenttia kalliimmiksi ja muut kustannukset 15 pros. suuremmiksi kuin kustannusarvio osotti. Näin kallistui koko rakennus 13 prosentilla. Kuinka suureksi osaksi kaikista kustannuksista oli rakennusainesten kustannukset laskettu nousevan?

2. Kahden toisiaan ulkopuolitse sivuavan ympyrän keskipisteestä piirretään, samalle puolelle sentraalia, kaksi yhdensuuntaista sädettä, ja näiden päätepisteet

yhdistetään sivuamispisteen kanssa. Todista, että yhdistysviivat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

3. Piirrä tunnettuun neliöön toinen neliö, jonka pinta-ala suhtautuu edellisen pinta-alaan kuin 2:3.

4. Säännöllinen kahdeksankulmio jaetaan kahteen osaan lävistäjällä, jonka toiselle puolelle jääpi kaksi ja toiselle puolelle neljä kärkipistettä. Mikä on osien pinta-alojen suhde?

5. Mikä on sentrikulma sellaisessa ympyränsektorissa, joka, verrattuna kaikkiin yhtäsuuri-piirisiin ympyränsektoreihin, on pinta-alaltaan suurin?

6. Pyramiidissa ABCD ovat kulmat BAC, CAD ja DAB suoria. Jos AB:n kautta asetetaan taso niin, että se puolittaa tasojen ABC:n ja ABD:n tekemän kulman, niin pyramiidi jakaantuu kahteen osaan, jotka suhtautuvat toisiinsa niinkuin särmät AC ja AD. Todista tämä.

7. Ratkaise mahdollisimman yksinkertaisesti yhtälöryhmä

$$\begin{cases} b(x+y) - az = b^2 - a^2 \\ (a+b)(x-y) - (a-b)z = 0 \\ (a+b)z - (a-b)(x-y) = 4ab. \end{cases}$$

8. Jos eräs kuparimäärä sulatetaan yhteen 60 graan puhdasta hopeata, syntyy sellaista kuparipitoista hopeata, että, jos vielä sama määrä kuparia sulatetaan yhteen 25 graan näin saatua hopeata, siten syntyneessä sekoituksessa on saman verran kuparia ja hopeata. Mikä on kysymyksessä oleva kuparimäärä?

9. Puolisuunnikkaassa ne sivut, jotka eivät ole keskenään yhdensuuntaiset, ovat yhtä suuret, keskenään yhdensuuntaiset sivut suhtautuvat toisiinsa kuin 1:2, ja lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kuinka suuret ovat puolisuunnikkaan kulmat?

10. Sylinterinmuotoisen homogeenisen 2 kg painavan metallisauvan toinen pää on kiinnitettynä vaakasuoraan alustaan, siten että sitä vapaasti voidaan kiertää kohtisuorassa tasossa. Toiseen päähän kiinnitetyllä rihmalla, joka jännittyy vaakasuorana edellä mainittuun kohtisuoratasoon, pidetään sauvaa sellaisessa asennossa, että se alustaa vastaan muodostaa 60 asteen suuruisen kulman. Kuinka suuri on rihman jännitys?

## 1909. S.

1. Tavallinen boorivesi sisältää 2 % boorihappoa. Montako gr boorihappoa on lisättävä 285 gr:aan boorivettä, jotta saatu liuos sisältäisi 5 % boorihappoa?

2. Teräväkulmaiseen kolmioon ABC:hen piirretään korkeusviivat AD ja BE ja näiden leikkauspiste F yhdistetään suoralla viivalla pisteen C:n kanssa. Todista, että kolmiot ABD ja CFD ovat yhdenmuotoiset (yhdenmukaiset).

3. Tunnetaan ympyrä, piste sen sisäpuolella ja jana. Piirrä suunnikas, jossa toinen pari yhdensuuntaisia sivuja on tunnetun janan pituisia, ja jonka kärkipisteistä kolme sattuu ympyrän kehälle ja neljäs tunnettuun pisteeseen.

4. Ympyrä on piirretty niin, että se sivuaa yhtä neliön sivua ja kulkee kahden sen kärkipisteen kautta. Mikä on ympyrän halkaisijan ja neliön sivun suhde?

5. Mitä reaaliarvoja lauseke  $x + \sqrt{3-2x}$  voi saada, kun  $x$  on reaalinen?

6. Kolminumeroisessa luvussa numeroiden summa on yhtä suuri kuin se luku, jonka kaksi jälkimäistä numeroa muodostaa, ja numeroiden neliöitten summa on 118. Mikä on luku?

7. Jos suoraa kartiota leikkaa taso, joka sisältää akselin, niin läpileikkaus on tasasivuinen kolmio, ja jos taso asetetaan akselin keskipisteen kautta kohtisuoraan sitä vastaan, niin läpileikkaus on ympyrä, jonka säde on 2 cm. Kuinka suuri on kartion tilavuus?

8. Eräaseen huvitilaisuuteen myytiin 3:n ja 5:n markan pilettejä. Vaikka  $\frac{1}{3}$  edellisistä ja  $\frac{1}{2}$  jälkimmäisistä jäi myymättä, jäi puhtaaksi tuloksi 600 mk. Jos olisi saatu kaikki piletit myydyksi, olisi puhdas tulo noussut 1400 mk:aan, ja jos kustannuksia olisi voitu supistaa  $\frac{1}{5}$ lla ja kaikki piletit olisivat olleet markkaa kalliimmat, olisi voitto, edellyttäen että kaikki piletit olisivat tulleet myydyksi, vielä lisääntynyt 600 mk:lla. Kuinka suuret olivat kustannukset?

9. Ympyrään, jonka säde on 2 cm, on piirretty 3 cm pituinen jänne, ja sen toiseen päätepisteeseen on piirretty tangentti. Kuinka suuri on janteen ja tangentin muodostama kulma?  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

10. Esine liukui alas kaltevaa pintaa, jonka kaltevuuskulma on  $45^\circ$ . Kuinka suuri on sen nopeus 2 sek sen jälkeen, kun liike alkoi, jos otaksutaan, että kitkakoeffisientti on 0,3 ja  $g = 9,81$  (metri ja sekunti yksikköinä)?

## 1910. K.

1. Todista, että puolisuunnikas on yhteellinen toisen puolisuunnikkaan kanssa, jos toisen yhdensuuntaiset sivut ovat yhtä suuret kuin toisen vastaavat sivut, ja toisen kaksi vastakkaista kulmaa on yhtä suurta kuin toisen vastaavat kulmat.

2. Tunnetaan ympyrä, piste A sen sisällä ja piste B kehällä. Määrää sen kehällä sellainen piste C, että

kaaren BC:n asteluku tulee yhtä suureksi kuin kulman BAC:n asteluku.

3. Ympyränsegmenttiin, jossa janteen pituus on  $a$  ja kaaren asteluku  $90^\circ$ , on piirretty neliö siten, että yksi sen sivuista lankeaa pitkin jännettä ja kaksi kärkipistettä segmentin kaarelle. Kuinka pitkä on neliön sivu?

4. Tasasivuisen kolmion kahden sivun kautta on asetettu tasoja kohtisuoraan kolmion tasoa vastaan, ja kolmannen sivun kautta on asetettu taso, joka tekee  $45^\circ$  kulman kolmion tasoa vastaan. Kolmion sivun pituus on 4 cm. Laske näiden kolmen tason ja kolmion tason rajoittaman kappaleen tilavuus.

5. Yhtäaikaa kun eräs laiva lähtee paikasta A toiseen paikkaan B, lähtee toinen laiva B:stä A:han. Laivat sivuuttavat toisensa 3 t 20 min kuluttua, ja nopeampikulkuinen saapuu perille 1 t 30 min aikaisemmin kuin toinen. Kuinka nopeasti kumpikin laiva kulkee, kun tiedetään, että matka A:sta B:hen on 90 km.

6. Maanviljelijä möi maitonsa, jonka rasvapitoisuus oli 3,5 %, osaksi kermana, jossa oli 15,5 % rasvaa, osaksi kuorittuna maitona, jossa oli 0,5 % rasvaa. Kermasta sai hän 80 p ja kuoritusta maidosta 3 p kilolta. Paljonko tuli hän täten saamaan kilolta kuorimattomasta maidosta?

7. Määrää polynomin

$$ax^2 + bx + c$$

kertoimet (koeffisientit) niin, että se saa arvon 0 kun  $x = 1$ , ja arvon 6 kun  $x = 3$ , sekä että niiden  $x$ :n arvojen tulo, jotka tekevät polynomin 1:n arvoiseksi, on 1.

8. Todista, että  $a^5 - a$  on tasan jaollinen 5:llä, olkoon  $a$  mikä kokonainen luku hyvänsä.

9. Laske sen kolmion pinta-ala, jonka kärkipisteinä ovat kolmen peräkkäisen sivun keskipisteet säännöllisessä viisikulmiossa, jonka sivu on 10 cm.

10. Painot Advoodin pudottimessa painavat toinen 2 ja toinen 3 kg. Kuinka pitkän matkan nämä painot liikkuvat ensimmäisellä sekunnilla sen jälkeen kuin ne on jätetty liikkumaan painovoiman varaan, jos kitkaa ei oteta huomioon ( $g = 9,81$ , metri ja sekunti yksikköinä).

### 1910. S.

1. Etsi kaksi kokonaista lukua, joiden suurin yhteinen tekijä on 140 ja pienin yhteinen jaettava 9800. Määrää kaikki tehtävän ratkaisut.

2. Kolmiossa ABC, jossa kulma C on suora, puolitetaan kulma A ja saman kulman kärjen kautta piirretään kohtisuora puolittajaviivaa vastaan. Laske sen kolmion pinta-ala, jonka nämä viivat ja sivu BC sekä sen pidennys rajoittavat, kun tiedetään, että AB on 20 cm ja AC 12 cm.

3. Seinä, jonka pinta-ala on  $20 \text{ m}^2$ , on päällystettävä kokoliitilla. Jos tähän käytetään määrätynsuuruisia levyjä, niin niitä tarvitaan 5 kappaletta enemmän kuin jos siihen käytetään levyjä, joiden pinta on  $20 \text{ dm}^2$  suurempi. Kuinka suuri on ensin mainitun kokoliittilevytyylinen pinta?

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = a^3 \\ x - by + b^2z = b^3 \\ x - cy + c^2z = c^3, \end{cases}$$

sekä saata juuret yksinkertaisimpaan muotoonsa.

5. Ympyrään on sisäänpiirretty tasakylkinen kolmio ABC, ja tämän kärjen A:n kautta on piirretty suora,

joka leikkaa ympyrän kehän pisteessä D ja kolmion aseman (kannan) pidennyksen pisteessä E. Todista, että sivu AB on janojen AD ja AE keskipito (keski-proportionaali).

6. Jos tasasivuinen kolmio pyörittää kerran sen tasossa olevan suoran ympäri, joka kulkee yhden kolmion kärjen kautta, mutta ei leikkaa kolmiota, niin mainitun kärjen vastainen sivu muodostaa pinnan, jonka ala on yhtä suuri kuin kolmion muiden sivujen muodostaminen pintojen alat yhteensä. Todista tämä.

7. Ympyrässä olevan pisteen kautta, jonka etäisyys keskipisteestä on  $\frac{2}{3}$  säteestä, on piirretty jänne, jonka pituus on  $\frac{5}{3}$  säteestä. Laske janteen ja mainitun pisteen kautta kulkevan halkaisijan tekemän kulman suuruus.

8. Esine heitetään pystysuoraan ylöspäin 20 m alkunopeudella sekunnissa. Kuinka suuri on sen nopeus, kun se on kohonnut 10 m? ( $g = 9,8$ , metri ja sekunti yksikköinä. Ilman vastustusta ei oteta huomioon).

### 1911. K.

1. Metallisekoituksesta, jossa oli kuparia, nikkeliä ja sinkkiä, otetaan kaksi koetta, joista toinen painaa 37,5 gr ja toinen 32,5 gr. Edellisessä huomataan olevan 21,9 gr kuparia, jälkimmäisessä 7,8 gr nikkeliä. Montako prosenttia sinkkiä oli sekoituksessa?

2. Kolmion ABC kulmista on A pienin. Jos pisteiden B ja C kautta piirretään kolmiota leikkaavia suoria siten, että ne BC-sivun kanssa muodostavat A:n suuruisia kulmia, on viimeksi mainittu sivu niiden suorien

osien keskiverto (keskiproportsionaali), jotka jäävät kolmion sisään. Todista tämä.

3. Muunna tunnettu suorakaide suorakulmaiseksi kolmioksi, jossa hypotenuusa on kolme kertaa niin suuri kuin toinen kateetti.

4. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC on hypotenuusa BC 4 cm ja kulma B  $60^\circ$ . BC halkaisijana piirretään puoliympyrän kaari, joka ympäröi kolmion, ja AC halkaisijana piirretään toinen puoliympyrän kaari kokonaan kolmion ulkopuolelle. Laske sen kuvion pinta-ala, jonka viimeksi mainittu puoliympyrän kaari ja osa edellisestä rajoittavat.

5. Suoralle viivalle asetetaan kaksi janaa AB ja BC ja näillä janoilla halkaisijoina piirretään puoliympyrän kaaria samalle puolelle viivaa. Pisteistä A ja C piirretään toiselle puolelle viivaa kohtisuoria sitä vastaan. Määrää lyhin niistä B:n kautta kulkevista janoista, joita puoliympyrän kaaret ja kohtisuorat rajoittavat. Selittele tulema.

6. Laske viidellä kymmenyksellä, käyttämättä mitään tauluja, luku, jonka logaritmi Briggin järjestelmässä on  $-1\frac{1}{2}$ .

7. Maalari, joka oli ottanut puhdistakseen, poistamalla entisen maalin, ja uudestaan maalatakseen purjeveneen, sai puhdistustyöstä tuntipalkan, joka oli 10 penniä pienempi kuin tuntipalkka varsinaisesta maalaustyöstä. Kun työ oli valmis, osottautui, että hän oli saanut keskimäärin 38 p tunnilta. Kuinka suuri oli tuntipalkka itse maalaustyöstä, kun tiedetään, että hän maalasi  $7\text{ m}^2$  samassa ajassa, jossa hän puhdisti  $3\text{ m}^2$ .

8. Ympyrä jaetaan kahteen sektoriin, joiden kaaret suhtautuvat toisiinsa niinkuin luvut 2 ja 3. Laske

niiden kartioiden tilavuuksien suhde, joiden sivupinnat voidaan tehdä näistä sektoreista.

9. Ympyrän halkaisijan päätepisteistä piirretään samaan pisteeseen kehällä jäniteitä, joiden pituudet suhtautuvat toisiinsa kuin luvut 3 ja 4. Laske näitä jäniteitä vastaavien kaarien asteluvut.

10. Kun lyijypala ja pala metallisekoitusta, jotka kumpikin painavat kilon, upotetaan  $+4$  asteiseen veteen, osottautuu, että metallisekoituspala painaa 214 gr vähemmän kuin lyijy. Mikä on metallisekoituksen ominaispaino, kun tiedetään, että lyijyn on 11,5.

## 1911. S.

1.// Maanviljelijä sekoitti yhteen kolmea eri lajia siemenkauraa, ensimmäistä 5 hl, toista 8 hl ja kolmatta 12 hl. Kuinka monta prosenttia itävää kauraa sisältää seos, kun eri kauralajien itoisuusprosentit, edellämainitussa järjestyksessä, ovat 98,2, 96,3 ja 92,8?

2. Suorakulmion (suorakaiteen) sivujen pituudet ovat 2 cm ja 4 cm. Jokaisen kärkipisteen kautta piirretään suora kohtisuoraan siihen päättyvää lävistäjää vastaan. Laske siten syntyneen vinoneliön pinta-ala.

3. Ympyrää  $O_1$  leikkaa toinen ympyrä  $O_2$ , jonka keskipiste on edellisen kehällä. Sen  $O_2$ :n kaaren osan asteluku, joka lankeaa  $O_1$ :n sisään, olkoon  $\alpha$ , ja sen  $O_1$ :n kaaren osan asteluku, joka jää  $O_2$ :n sisään,  $\beta$ . Todista että  $2\alpha + \beta = 360$ .

4. Kahden tunnetun janan mittaluvut (lukuarvot) olkoot  $a$  ja  $b$ . Piirrä jana, jonka mittaluku toteuttaa yhtälön

$$\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{b^2 - x^2} = b.$$

5. Määrää polynomin  $6x^2 + px - 3$  koeffisientti  $p$  niin, että se tulee tasan jaolliseksi binoomilla  $2x + 3$ .

6. Suoraan kartioon on sisäänpiirretty suora sylinteri, jonka toinen kanta (asema) leikkaa kartion korkeuden suhteessa  $m:n$ . Laske kartion ja sylinterin tilavuuksien suhde.

7. Ympyrälle, jonka säde on 5 cm, piirretään tangentit pisteestä, jonka etäisyys ympyrän keskipisteestä on 8 cm. Laske sivuamispisteiden väliin lankeavan kaaren pituus.

8. Piste liikkuu suoraa pitkin tasaisesti kiihtyvällä nopeudella. Sen alkunopeus on 0, ja siitä hetkestä, jolloin se on liikkunut 6 m, siihen hetkeen, jolloin se on saapunut 24 metrin päähän alkupisteestä, kuluu kaksi sekuntia. Laske kiihtyväisyys.

## 1912. K.

1. Kuinka paljon maksetaan 225:stä tonnista vesipitoisuudeltaan 58 prosentista puumassaa, jos yhdellä massatonnilla, joka on 10:n prosentin vesipitoista, on hintana 95 mk.?

2. Jos kolmion korkeusviiva halkaisijana piirretään ympyrä ja ne pisteet, joissa tämä leikkaa kolmion sivut, yhdistetään, niin syntyy kolmio, joka on alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoinen. Todista tämä.

3. Säännöllisen 12-kulmion suurempi säde on 5 cm pituinen. Laske, käyttämättä mitään tauluja, sen piirin pituus niin tarkasti, että tuleman virhe on pienempi kuin 0,1 mm.

4. Piirrä kolmion kärjen kautta suora, joka jakaa kolmion pinnan kahteen osaan siten, että osat suhtautuvat toisiinsa niinkuin kärjessä yhtyvien sivujen neliöt.

5. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - 5y + 7z = 7 \\ 3y + 5z - 7x = 13 \\ 7y + 3z - 5x = 27. \end{cases}$$

6. Eräs henkilö sekoitti kiehuva vettä ja 10 asteista vettä yhteensä 20 litraa. Kun sekoituksesta vielä oli otettu pois 2 litraa vettä ja sama määrä kiehuva vettä pantu sijaan, nousi veden lämpö 46:een asteeseen. Kuinka paljon kiehuva vettä ensimmäiseen sekoitukseen pantiin?

7. Mitkä luvut voidaan jakaa kahteen realiosaan siten, että osien tulo on yhtä kuin luku itse?

8. Pallon isoympyrään sisäänpiirretyn neliön sivujen kautta asetetaan tasoja kohtisuoraan neliön tasoa vastaan. Laske pallon pinnan, ja mainittujen tasojen sekä pallon pinnan rajoittaman kappaleen kokonaispinta-alan suhde.

9. Tasakylkisen kolmion kylkisivun suhde kantaan (asemaan) on 13:10. Laske kärkikulman tangentti.

10. Kappale, joka painaa 120 kg, liikkuu pitkin suoraa viivaa 49 cm nopeudella sekunnissa. Kuinka suuri on se liikkeen vastakkaiseen suuntaan vaikuttava konstantti voima, joka saa kappaleen pysähtymään 10:ssä sekunnissa ( $g = 9,8$ , metri ja sekunti yksikköinä)?

## 1912. S.

1. Rahasumma jaetaan kolmeen osaan siten, että ensimmäinen niistä on 32 % koko summasta ja samalla 84 % toisesta osasta. Kuinka monta prosenttia koko summasta kolmas osa on?

2. ABC on tasakylkinen kolmio, jonka kärkikulma on A. Piste B kautta on piirretty kaksi suoraa, jotka

BC-sivun kanssa muodostavat yhtä suuret kulmat. Toinen näistä suorista leikkaa sivua AC pisteessä D ja toinen saman sivun pidennystä pisteessä E. Todista, että AC on janojen AD ja AE keskiperto (keskiproportionaali).

3. Tasakylkisen kolmion kanta (asema) halkaisijana piirretään ympyrä. Niiden osien mittaluku (lukuarvo), jotka ympyrä erottaa kolmion sivuista (tarpeen vaatiessa pidennettyinä), olkoon a ja kolmion kannan mittaluku b. Mikä on kolmion pinta-ala?

4. Jaa polynomi  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2$  alkutekijöihinsä.

5. Mikä on osamäärän

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{0,76}}$$

Briggin logaritmi, ja mikä itse osamäärän arvo?

6. Suora sylinteri ja samankorkuinen suora kartio jonka pohjasäde on kaksi kertaa niin suuri kuin sylinterin, ajatellaan asetetuksi niin, että pohjien tasot sekä niiden keskipisteet yhtyvät. Laske sylinterin ulkopuolella olevan kartionosan tilavuuden suhde sen sylinterin osan tilavuuteen, joka ei kuulu kartioon.

7. Suorakulmaisen tasakylkisen kolmion hypotenuusa jaetaan kolmeen yhtä suureen osaan, ja jakopisteet yhdistetään suoran kulman kärkeen. Kuinka suuret ovat ne kulmat, joihin suora kulma tällöin jakaantuu?

8. Rautasauva, jonka pituus on 1,2 m ja poikkileikkaus neliö, sivuna 3 sm, on asetettuna vaakasuoralle reunalle, joka on kohtisuorassa sauvan pituussuuntaa vastaan ja jakaa sen pituuden suhteessa 2:3. Kuinka suuri paino on kiinnitettävä sauvan lyhemmän osan päähän, jotta se pysyisi tasapainossa vaakasuorana? Raudan ominaispaino on 7,8.

## 1913. K.

1. Mitkä ovat pienimmät positiiviset kokonaisluvut, joiden inverssiarvot suhtautuvat toisiinsa niinkuin luvut 7, 12 ja 18?

2. Tasakylkinen kolmio, jonka sivu on 10 sm ja kanta (asema) 6 sm, leikataan suoralla, joka kulkee kannan toisen päätepisteen kautta ja kannan kanssa tekee kolmion kärkikulman suuruisen kulman. Laske, käyttämättä mitään tauluja ja niin tarkasti, että tuleman virhe on pienempi kuin  $0,1 \text{ mm}^2$ , kolmion kannan viereisen osan pinta-ala.

3. Tunnetaan kaksi janaa a ja b. Piirrä kulma, jonka tangentti on  $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ .

4. Neliössä ABCD, jonka sivun pituus on a, piste A ja sivun CD keskipiste E yhdistetään suoralla ja kulma BAE puolitetaan, jolloin puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä F. Määrää janan BF pituus ja todista, että sivu BC jakaantuu pisteessä F jatkuvassa suhteessa.

5. Mitä ymmärretään suoran ja tason kaltevuuskulmalla, ja kuinka todistetaan, että tämä kulma on pienin kaikista niistä kulmista, jotka suora muodostaa tasossa olevien suorien kanssa?

6. Suorita yhteenlasku

$$\frac{\sqrt[3]{a^3 - 2\sqrt{a} + \sqrt{a}}}{\sqrt{a} - 4} + \frac{\sqrt[4]{a} - 4}{\sqrt{a} - 2}$$

ja supista tulema yksinkertaisimpaan muotoonsa (a on positiivinen luku ja kaikilla juurilla on positiiviset arvot).

7. Henkilö osti 45 pankkiosaketta, joiden nimellisarvo oli 200 mk, sekä 80 obligatsionia teollisuusyrityksessä, joiden nimellisarvo oli 100 mk, ja maksoi osak-

keista 5920 mk enemmän kuin obligatsioneista. Kun sittemmin voitto-osuus osakkeista jaettiin 8:n prosenttiin mukaan niiden nimellisarvosta, ja korko obligatsioneista 5:n prosenttiin mukaan niiden nimellisarvosta, tuli hän saaneeksi 5,6 % osakkeihin ja obligatsioneihin yhteensä sijoittamistaan rahoista. Minkä hinnan maksoi hän osakkeista ja minkä obligatsioneista?

8. Jaa luku 10 kahteen osaan siten, että osien neliot, kerrottuina toinen 2:lla ja toinen 3:lla, yhteenlaskettuina muodostavat mitä pienimmän luvun.

9. Kuinka suuri osa maapallon pinnasta on Helsingin leveyspiirin pohjoispuolella? (Helsingin leveysaste on  $60^{\circ} 10'$  ja maapallo oletetaan pallonmuotoiseksi).

10. Ilman ominaispaino  $0^{\circ}$  lämmöllä ja yhden atmosferin paineella on 0,00129. Kuinka suuren tilan täyttää 100 gr ilmaa  $0^{\circ}$  lämmöllä ja kolmen atmosferin paineella?

### 1913. S.

1. Kuinka monta metriä sekunnissa kulkee laiva, jonka nopeus on 10 solmuväliä?

Solmuvälien lukumäärä ilmoittaa, kuinka monta minuuttia maapallon isoympyrän kaaresta laiva kulkee tunnissa. Maapallon säde oletetaan  $= 6367$  km.

2. Piirrä ympyrä, joka sivuaa kahta tunnettua yhdensuuntaista suoraa ja jonka kehä kulkee tunnetun pisteen kautta.

3. Kolmiossa ABC sivut AB, BC ja CA ovat järjestyksessä 25, 52 ja 63 mm pitkät. Määrää ilman trigonometrisiä laskuja sivua CA vastaan piirretyn korkeusviivan pituus.

4. Pyramiidin ABCD kärkipisteen B kautta asetetaan taso yhdensuuntaiseksi särmän AD kanssa siten,

että se jakaa särmän CD suhteessa m:n. Laske niiden pyramiiden tilavuuksien suhde, joihin tunnettu pyramiidi tällöin jakaantuu.

5. Osoita että yhtälön

$$3x^2 - 8x \sin 60^{\circ} + 3 = 0$$

juuret ovat  $\operatorname{tg} 60^{\circ}$  ja  $\operatorname{ctg} 60^{\circ}$ .

6. Sinkkiä, kuparia ja tinaa sisältävästä metallisekoituksesta, jonka kuparipitoisuus suhtautuu tinapitoisuuteen niinkuin 11:4, voidaan lisäämällä yksitään tinaa saada sekoitus, jossa on 50 % sinkkiä ja 20 % tinaa. Kuinka suuret määrät eri metalleja sisältää 300 gr alkuperäistä sekoitusta?

7. Piirrä terävä kulma  $v$ , jonka kosinin arvo on  $\frac{3}{5}$ , sekä tämän jälkeen kulma  $= 2v$ , ja määrää, joko mittaamalla tai trigonometristen laskujen avulla, viimeksimainitun kulman sini ja kosini.

8. Monellako prosentilla rautakappaleen tilavuus lisääntyy, kun sen lämpö nousee  $0^{\circ}$  C:sta  $50^{\circ}$ :een?

Raudan pituuden-laajenemiskoeffisientti on 0,000012.

### 1914. K.

1. Supista murtoluku  $\frac{74482}{168378}$  sen yksinkertaisimpaan mahdolliseen muotoon.

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2z - a^2 = 0 \\ bx + by + z = 0 \\ ax - ay - 2z + a^2 = 0 \end{cases}$$

3. Laina maksettiin takaisin määrätyn ajan kuluessa siten, että joka vuoden lopussa suoritettiin 250 mk, josta summasta osa oli 5:n prosenttiin mukaan laskettu korko maksamattomalle lainasummalle ja jällellä oleva osa velan lyhennystä (kuoletusta). Erään mak-

sun suoritettua jäi lainasta vielä maksamatta 3002 mk 27 p. Millä summalla lyheni laina tämän suorituksen kautta?

4. Kahden luvun logaritmit siinä logaritmijärjestelmässä, jonka kantalukuna on 8, ovat yhtälön

$$15x^2 - 25x + 3 = 0$$

juurina. Laske lukujen tulo, käyttämättä mitään tauluja.

5. Säännöllisen kuusikulmion sivut jänteinä piirretään kuusikulmion sisäpuolelle yhteneväisiä (yhteellisiä) ympyränkaaria, jotka sivuavat toisiaan päätepisteissä. Laske sen kuvion pinta-ala, jonka nämä ympyränkaaret rajoittavat, kun kuusikulmion sivu on 8 sm pitkä.

Laskut ovat suoritettavat ilman tauluja, käyttäen  $\pi$ :n likiarvoa 3,14.

6. Todista, että jokaisessa kolmiossa sivujen keskipisteet ja korkeusviivojen kantapisteet ovat saman ympyrän kehällä.

7. Piirrä tasoon kulma, joka on yhtä suuri kuin se kulma, jonka kuution lävistäjä muodostaa sen särmän kanssa.

8. Pallo leikataan tasolla siten, että sen pinta jakaantuu suhteessa 1 : 2. Missä suhteessa jakaantuu pallon tilavuus?

9. Säännöllisen nelisivuisen pyramiidin sivusärmien ja pohjan (aseman) kaltevuuskulma on  $63^\circ 20'$ . Laske sivukolmioiden kärkikulmien astelukku.

10. Kuinka suuri on niiden suorien välimatka, joita myöten valonsäde etenee ennen ja sen jälkeen kuin se on kulkenut 1 sm paksuisen lasilevyn kautta, jos säteen tulokulma on  $40^\circ$  ja ilman ja lasin välinen taiteeksponentti on  $\frac{3}{2}$ ?

## 1914. S.

1. Kolme henkilöä, A, B ja C, oli yhteiseen likeyritykseen pannut A 600, B 700 ja C 800 mk. Kun A oli voitosta saanut 15 %, annettiin jälellä olevasta osasta B:lle 20 mk ja jäännös jaettiin A:n, B:n ja C:n kesken suhteellisesti heidän panoksiinsa. A sai kaikkiaan 120 mk voitosta. Kuinka monta prosenttia panoksestaan sai C voittona?

2. Kuinka määritellään  $a^n$ , kun  $n$  on positiivinen kokonaisluku, kun  $n$ :n arvo on 0 ja kun  $n$  on negatiivinen kokonaisluku?

Todista täydellisesti, että yhtälö

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

pitää paikkaansa, olivatpa  $m$  ja  $n$  mitä kokonaislukuja tahansa.

3. Yhtälön

$$x^2 + ax + b^2 = 0$$

juurista on toinen yhtä kuin toinen kerrottuna 4:llä. Laske suhde  $a/b$ .

4. Piirrä tunnettuun ympyrään kolmio, joka on yhdenmuotoinen tunnetun kolmion kanssa.

5. Kuution kärjestä piirretään kohtisuora yhtä kuution lävistäjää vastaan, jolla ei ole mainittu kärki päätepisteinä. Missä suhteessa jakaantuu lävistäjä tällöin?

6. Säännöllinen tetraedri, jonka sivusärmän pituus on  $s$ , jaetaan yhden sivupinnan suuntaisella tasolla, joka jakaa vastaavan korkeusviivan suhteessa  $m : n$ . Laske täten syntyneen katkaistun pyramiidin kokonaispinta-ala.

7. Pisteestä ympyrän kehällä, jonka säde on 3 sm. piirretään  $4:n$  ja  $5:n$  sm pituiset jänteet, kumpikin eri

puolelle samasta pisteestä piirrettyä halkaisijaa, ja jän-  
teiden päätepisteet yhdistetään. Laske täten synty-  
neen kolmion pinta-ala.

8. Pisteestä, joka on 1,5 m vaakasuoran tason ylä-  
puolella, heitetään kappale tason suuntaan, ja tapaa  
se tason pisteessä, jonka etäisyys alkupisteen kautta  
kulkevasta pystyviivasta on 15 m. Laske kappaleen  
alkunopeus (painovoiman kiihtyväisyys oletetaan =  
9,8 m sekunnissa, ja ilman vastustus jätetään huo-  
mioon ottamatta).

## 1915. K.

1. Vuonna 1890 oli Suomessa kaupunkien väestön  
lukumäärä pyöreän luvun 235,000 ja maaseudun väes-  
tön lukumäärä 2,145,000. Vuonna 1900 vastaavat lu-  
vut olivat 340,000 ja 2,370,000. Monellako prosentilla  
kaupunkien asukasluvun suhde maaseudun asukas-  
lukuun oli kasvanut?

2. Suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateettien  
keskinäinen suhde on 3:4, suurempaa katettia vas-  
tassa oleva kulma puolitetaan. Missä suhteessa suo-  
ran kulman kärjestä piirretty korkeusviiva jakaa kol-  
mion sisäpuolella olevan osan puolittajaviivasta?

3. Todista, että kokonaisten lukujen  $m$  ja  $n$  suurin  
yhteinen tekijä myös on lukujen  $m + n$  ja  $2m + 3n$   
suurin yhteinen tekijä.

4. Taiteilija Albrecht Dürer antoi seuraavan käy-  
tännöllisen säännön säännöllisen seitsenkulmion sisään-  
piirtämistä varten ympyrään: »Sisäänpiirretyn sään-  
nöllisen seitsenkulmion sivu on puolet sisäänpiirretyn  
tasasivuisen kolmion sivusta».

Tutki geometrisen konstruktion kautta tämän sään-  
nön tarkkuutta ja laske kuinka paljon säännöllisen  
seitsenkulmion sivua vastassa oleva keskuskulma eroaa  
siitä keskuskulmasta, jota vastassa oleva jänne on tasa-  
sivuisen kolmion sivun puolikas.

5. Tunnetulla suoralla valitaan järjestyksessä neljä  
pistettä A, B, C ja D siten, että janat AB ja CD tule-  
vat yhtä pitkiksi. Pisteiden A ja C kautta piirretään  
ympyräviiva, pisteiden B ja D kautta toinen. Todista,  
että näiden ympyröiden yhteinen jänne puolittaa janan  
BC, valittakoon ympyrät miten tahansa.

6. Muodosta toisen asteen yhtälö, jonka toteuttavat  
yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0$$

juurten neliöt.

7. Kuinka monta  $\text{sm}^2$  rautapehtiä tarvitaan sellaisen  
sylinterinmuotoisen astian valmistamiseen, joka vetää  
yhden litran ja jonka korkeuden suhde pohjan halka-  
sijaan on 3:2?

8. Piirrä geometrisesti ne terävät kulmat, jotka to-  
teuttavat yhtälön

$$\tan x + \cot x = 3,$$

ja laske niiden astelukku.

9. Säännöllinen tetraedri ABCD leikataan tasolla.  
joka kulkee särmien AB, AC ja BD keskipisteiden kautta.  
Todista, että leikkauskuvio on neliö.

10. Kappale liikkuu pitkin suoraa viivaa, vakinai-  
sen voiman alaisena, jonka suunta on päinvastainen  
liikkeen suunnalle. Ensimmäisellä sekunnilla sen jälkeen  
kuin kappale on sivuuttanut erään pisteen P liikkuu  
se  $7\frac{3}{4}$  dm ja kolmannella sekunnilla  $4\frac{3}{4}$  dm. Milloin  
sen nopeus on nolla ja kuinka pitkän matkan se sil-  
loin on liikkunut pisteestä P lukien?

1. Kirjakauppias möi yleensä kirjansa 20 prosentin voitolla. Paraimmille ostajilleen myönsi hän kuitenkin niin suuren hinnanalennuksen, että heille myydyt kirjat tuottivat hänelle ainoastaan 8 prosenttia voittoa. Montako prosenttia hinnanalennusta hän myönsi?

2. Säännöllisellä kahdeksankulmiolla ja säännöllisellä kuusikulmiolla on yhtä pitkät piirit. Määrää niiden pinta-alojen suhde ja laske se kolmella kymmenyksellä (tauluja ei saa käyttää).

3. Suhteet  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$  ja  $\frac{e}{f}$  oletetaan keskenään yhtä suuriksi. Todista, että jokainen niistä on yhtä kuin suhde

$$\frac{3a - 2c + e}{3b - 2d + f}$$

4. Kolmisärmäinen pyramiidi ABCD leikataan tasolla, joka leikkaa särmiä AB, AC ja AD pisteissä B', C' ja D'. Todista, että pyramiidin AB'C'D' tilavuuden suhde tunnetun pyramiidin tilavuuteen on yhtä kuin

$$\frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AD'}{AD}$$

5. Samalla hetkellä kun juna lähtee liikkeelle, alkaa henkilö, joka on 65 m jälessä, juosta sen perästä. Kuinka lähelle junaa hän pääsee, jos hän juoksee 5 m nopeudella sekunnissa ja junan nopeus ensimmäisellä minuutilla otaksutaan kasvavan tasaisesti 2 dm sekunnissa.

6. Mitä arvoja eroituksella  $x - y$  voi olla, jos  $x$  ja  $y$  toteuttavat yhtälöt

$$\begin{cases} a(x^2 - y^2) - b(x + y)^2 = 0 \\ 2(x^2 - y^2) - 3b(x + y) = 2ab. \end{cases}$$

7. Ympyrään, jonka säde on 6 sm, on samalle puolelle keskipistettä piirretty kaksi yhdensuuntaista 3 ja 5 sm pituista jännettä. Laske niiden ympyrän kaarien pituus, jotka ovat jänteiden välillä.

8. Pallonmuotoisen kappale, jonka säde on 2 dm, vajoaa veteen niin syvälle, että kolmas osa sen pinnasta joutuu veden alle. Paljonko kappale painaa?

## Vastaukset ja ohjeet.

1874.

1. 6 vuotta.
2. Piirrettävän neliön sivu on kateettina suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusana ja toisena kateettina on tunnettujen neliöitten sivut.
3. Piirrä lävistäjät! Täten syntyy 8 kolmiota, joista 4 on keskenänsä yhteellistä ja muut 4 myöskin keskenänsä yhteelliset (kaksi kulmaa ja välinen sivu). Tästä seuraa, että yhteellisiksi todistettavissa osissa ovat kulmat ja sivut vastaavasti yhtäsuuret ja siis osat yhteelliset.
4. Mies 36 ja vaimo 27 vuotta vanha.
5.  $\pm 4$  ja  $\pm 3$ .
6. 10 osakasta. Jos  $x$  on osakkaitten luku, niin paljonko saa ja paljonko saisi kukin? Kuinka kuuluu yhtälö?
7. 3800 metriä. (Aritm. sarja).
8.  $\sqrt{\frac{44,63}{\pi}} \text{ dm} = 3,769 \text{ dm}$ .
9.  $1,72 \cdot 0,85 \sin 125^\circ 3' 40'' \text{ m}^2 = 1,1967 \text{ m}^2$ .
10. 6,26 km. (Kolmio, jossa kaksi sivua ja välinen kulma tunnetaan sekä etsitään kolmatta sivua).

1875.

1. Lävistäjät jakavat suunnikkaan neljään kolmioon, joista vastassa olevat ovat yhteellisiä (kaksi kulmaa ja välinen sivu).

2. Saadaan kulmat  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  ja  $90^\circ$ . Mikä jänne vastaa  $90^\circ$  ja mikä  $30^\circ$ ? Saadaan kolmio, jossa yhtenä sivuna on ympyrän halkaisija ja toisena säde.

3. a) Piirrä mielivaltainen sekantti, joka ympyrän kehästä erottaa kolmannen osan s. o.  $120^\circ$  kaaren. Mitä tiedetään kaikkien sellaisten ympyrämme sekanttien etäisyyksistä (verrattuina piirtämämme sekanttien etäisyyteen) ympyrän keskipisteestä, jotka erottavat ympyrän kehästä kolmannen osan? Minkä ympyrän tangentteja siis ovat kaikki nämä tunnetun ympyrämme sekantit? Johtopäätös: piirretään annetun ympyrän keskipiste keskipisteenä ympyrä, joka sivuaa tuota piirtämäämme mielivaltaista sekanttia, ja sitten annetusta pisteestä näin saadulle ympyrälle tangentti. Tämä erottaa annetun ympyrän kehästä kolmannen osan. Onko tehtävä aina mahdollinen?

b) Myöskin saattaa tehtävän suorittaa algebrallista menettelytapaa käyttäen. Piirrä annetulle ympyrälle sekantti, joka kulkee annetun pisteen (A) kautta, mutta muuten on mielivaltainen. Olkoot tämän sekantin, kehän ja pisteen A:n välisten, osien lukuarvot  $a$  ja  $b$ . Olkoot etsittävän sekantin ja kehän leikkauspisteet  $X$  ja  $Y$ ; ( $X$  lähempänä A:ta) ja merkitään  $AX$ :n lukuarvo  $x$  ja  $XY$ :n lukuarvo  $c$  (= sisäänpiirretyn tasasivuisen kolmion sivun lukuarvo). Silloin saadaan

$$\frac{c+x}{a} = \frac{b}{x}, \text{ jos } A \text{ on ympyrän ulkopuolella}$$

tahi

$$\frac{c-x}{a} = \frac{b}{x}, \text{ jos } A \text{ on ympyrän sisällä.}$$

Kun  $x$ :n arvo ratkaistaan ja  $AX$  piirretään, on samalla etsittävä sekantti saatu.

4. Nuorempi saa 2000 mk ja vanhempi 2400 mk. Kummankin osuus kasvaa 3000 markaksi.

5. Juuret ovat  $\frac{1}{2}$  ja  $-1$ . (Muista koettaa, toteuttavatko saadut tuntemattomat arvot annetun yhtälön!)

6. 20 kappa. Jos  $x$  on kappamäärä ensin kerralla, niin paljonko maksaa kappa ensi kerralla ja paljonko toisella? Miten kuuluu yhtälö?

7. Summa = 10230, jos vain realiluvut otetaan kysymykseen. Yhtälöjärjestelmä on

$$\begin{aligned} aq &= 20 \\ aq^4 &= 160. \end{aligned}$$

Kun jälkim. yhtälö jaetaan edellisellä, saadaan  $q^3 = 8$ , jolla on yksi realijuuri ja kaksi kompleksijuuria. Realijuuri antaa summaksi 10230 ja kompleksijuuret antavat summiksi toinen  $-2925 + 1465i\sqrt{3}$  ja toinen  $-2925 - 1465i\sqrt{3}$ .

8. 2,137 dm.

9.  $A = 72^\circ 27' 2''$ ,  $B = 50^\circ 21' 45''$ ,  $c = 2,8115$  m ja ala = 3,4529 m<sup>2</sup>.

10. Nauhan jännitys on  $5\frac{5}{12}$  kg ja pallon paine seinää vastaan on  $2\frac{1}{12}$  kg. Jos piirretään esimerkin mukaan kuvio, saadaan suorakulmainen kolmio, jossa hypotenuusa =  $(4 + 2,5)$  dm = 6,5 dm, toinen kateetti = 2,5 dm ja toinen =  $\sqrt{6,5^2 - 2,5^2}$  dm = 6 dm. Tämä kolmio on yhdenmukainen sen kolmion kanssa, joka on voimasuunnikkaan puolikas. Jos nauhan jännitys

=  $x$  kg ja pallon paine seinää vastaan =  $y$  kg, niin saadaan siis verrannot

$$\frac{x}{5} = \frac{6,5}{6}$$

$$\frac{y}{5} = \frac{2,5}{6}$$

## 1876.

1. Piirrä mallikuvio! Minkä suuntaiset siinä ovat sivujen keskipisteitä yhdistävät janat? Kun siis on yhdistänyt annetut pisteet, niin mitenkä jatketaan?

2. Olkoot  $a$  ja  $b$  kahden viereisen sivun lukuarvot sekä pitemmän lävistäjän lukuarvo  $c$  ja lyhemmän  $d$ ! Molempien  $b$ -sivujen projektsioonit  $a$ -sivulla ovat yhtäsuuret. Olkoon kummankin projektsioonin lukuarvo  $p$ ! Lävennetun Pythagoraan väittämän mukaan saadaan  $c^2 = a^2 + b^2 + 2ap$  ja  $d^2 = a^2 + b^2 - 2ap$ , jotka yhteenlaskettuina antavat  $c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2$ . Näin on todistettu väittämämme laskennallisessa merkityksessä. Jos taas tahdotaan väittämä todistetuksi geometrisessä merkityksessä, niin, pinnan yksikön ollessa m<sup>2</sup>, saamme, kun viimeksi saadulla yhtälöllä m<sup>2</sup> kerrotaan:

$$c^2 m^2 + d^2 m^2 = a^2 m^2 + b^2 m^2 + a^2 m^2 + b^2 m^2$$

eli siis: suunnikkaan lävistäjälle piirrettyjen neliöitten summa = sivuille piirrettyjen neliöitten summa.

3. Kolmio olkoon  $ABC$  ja korkeusviivat  $BK$  ja  $CL$ . Väitös:  $\triangle AKL \sim \triangle ABC$ . Tod.  $\triangle AKB \sim \triangle ALC$  (2 kulmaa), joista  $AK:AL = AB:AC$ . Tästä  $AK:AB = AL:AC$ . Kun lisäksi  $\angle A = \angle A$ , niin  $\triangle AKL \sim \triangle ABC$ .

Kelpaako väitös tylsäkulmaiselle kolmiolle? Entä suorakulmaiselle?

4. 37 mk 37 penniä. Jos kukin antaa  $x$  mk, niin saadaan yhtälö

$$1000 \cdot x \cdot 1,045^{30} = 14 \cdot 10000.$$

5. Ensimmäisessä kylässä 22, toisessa 12 ja kolmannessa 9 taloa.

6. 42 oppilasta. Jos  $x$  on oppilaitten luku, niin paljonko tulisi kunkin maksaa, jos kaikki ottaisivat maksuun osaa? Entä sen jälkeen, kun kaksi oppilasta kieltäytyy maksamasta? Mikä yhtälö saadaan?

$$7. (x - 7)(x - 8).$$

$$8. 0,888 \pi \text{ litraa} = 2,7897 \text{ litraa}.$$

$$9. \sqrt[3]{\frac{13}{4436}} \text{ dm} = 0,1431 \text{ dm}.$$

Jos korkkipallon säde  $= r$  ja sydänpallon säde  $= x$ , niin saadaan yhtälö:

$$\left(\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi x^3}{3}\right) \cdot 0,24 + \frac{4\pi x^3}{3} \cdot 11,93 = \frac{4\pi}{3},$$

johonka sijoitetaan  $r = \frac{1}{2}$  ja ratkaistaan.

10. 383509 km. Maan säde on otettava siinä asennossa, että se kulkee sen tangentin sivuamispisteen kautta, joka kuun keskipisteestä on maapallolle piirretty; silloin näkyy maapallon säde suurimmassa kulmassaan kuun keskipisteestä. Jos  $x$  on etsittävä etäisyys, saadaan

$$\frac{6377}{x} = \sin 0^\circ 57' 10''.$$

1877.

1. Tasakylkisessä kolmiossa ABC olkoon  $AB = CB$  ja olkoon D sivun CB jatkeen päätepiste. Minkälainen kolmio on ABD? ABC-kolmion asemakulma olkoon  $\alpha$  ja ABD-kolmion asemakulma  $\beta$ . ACD-kolmiosta saa-

taan nyt  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , josta  $\alpha + \beta = 90^\circ$  eli  $DA \perp AC$ .

2. Mitenkä tehtävä ratkaistaan, jos annettu piste yhtyy kolmion kärkeen tahi sivun keskipisteeseen?

a) ABC-kolmion BC-sivulla on annettu O-piste lähempänä B:tä kuin C:tä. BC:n keskipiste D yhdistetään A:han. Miten AD jakaa kolmion? Muuta ABC-kolmion puolikas ADC-kolmio toiseksi niin, että C-kulma jää muuttumatta ja yksi sivu on CO. Piirrä, saadaksesi tietää, miten tätä varten on meneteltävä, mallikuvio. Jos uusi kolmio on COX, niin millä kolmion sivulla on X? Minkä suuntainen on DX? Miten siis saadaan X-piste?

b) Algebran avulla suoritetaan näin: merkitse edellisessä mallikuviossa  $BC = a$ ;  $AC = b$ ;  $OC = p$  ja  $XC = x$ . Saadaan

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle XOC} = \frac{a}{p} \cdot \frac{b}{x} = \frac{2}{1},$$

josta

$$x = \frac{ab}{2p}.$$

Miten  $x$  piirretään? Miten saadaan X-piste?

3. Jos kolmion sivut ovat  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , sekä etsittävien ympyröitten säteet  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , niin on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ y + z = c, \end{cases}$$

josta saadaan tietää  $x$ :n,  $y$ :n ja  $z$ :n pituudet sekä etsittävien ympyröiden sivuamispisteet. Saadut  $x$ :n,  $y$ :n ja  $z$ :n arvot ovat muuten tavattavissa trigonometriasta siltä kohtaa, jossa kolmion sisään piirretyn ympyrän säteen arvo johdetaan. Saamme, että etsittävien ym-

pyröitten sivuamispisteet ovat samalla ne sivuamispisteet, joissa kolmioon piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja.

4. 73237 henkilöä.

5. 12 km. Olkoon  $x$  etsittävä matka. Jalkamies on kulkenut 5 km, kun kyytimies ajaa hänen ohitsensa. Ensimmäisen ja toisen yhtymäkohdan välisellä ajalla on jalkamies kulkenut  $(x - 5 - 2)$  km  $= (x - 7)$  km ja kyytimies  $(x - 5 + 2)$  km  $= (x - 3)$  km. Muodostetaan aikojen yhtälö:

$$\frac{x-7}{2,60} = \frac{x-3}{50} + 15.$$

6. Luku on 546.

7. 300 metriä.

8.  $\frac{\pi \sqrt{35}}{192} \text{ dm}^3 = 0,0968 \text{ dm}^3.$

Kartion aseman säde  $= \frac{1}{2} \text{ dm}$  ja korkeus  $= \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} \text{ dm} = \frac{\sqrt{35}}{4} \text{ dm}.$

9. 50,7 km. Olkoon maan keskipiste O ja paikan maan pinnalla A ja B, joista lentotähti näkyy pisteessä C. Maan säde  $r$  saadaan yhtälöstä  $2\pi r = 40000$ . Kulma  $AOB: 360^\circ = 100:40000$ , josta saadaan kulma  $AOB$ :n asteluku, ja tästä kulma  $AOC = \frac{9}{20}$  astetta  $= 27 \text{ min.}$  Kulma  $OAC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ . Näistä kulma  $ACO = 44^\circ 33'$ . Jos etsittävä korkeus  $= x$ , niin

$$\frac{x+r}{r} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 44^\circ 33'}.$$

Määrää  $x+r$  ensin.

10. Painopisteen etäisyys levyn keskipisteestä on

$$\frac{ar^2}{R^2 - r^2},$$

jossa  $R$  on levyn ja  $r$  reiän säde sekä  $a$  levyn ja reiän keskipisteiden väli. — Painopiste (P) löytyy sillä

suoralla, joka kulkee mainittujen keskipisteiden kautta, ja toisella puolella levyn keskipistettä kuin reikä. Otaksutaanpa nyt, että meillä tässä on yksivartinen vipu, jonka tukikohtana on P ja voimien vaikutuspisteet: toinen levyn keskipiste (O), johon vaikuttaa eheän levyn paino, ja toinen reiän keskipiste (A), jossa vaikuttaa reiän kokoisen levyn paino. Näin menetelmällä löydämme juuri etsittävän painopisteen P:n. Olkoon levyn paksuus  $k$  ja sen ominaispaino  $s$  sekä väli  $PO = x$ . Saadaan yhtälö

$$\pi R^2 k s \cdot x = \pi r^2 k s \cdot (a + x).$$

1878.

1.  $\sqrt{\frac{200}{\sqrt{3}}} \text{ metr.} = 10,746 \text{ metr.}$

2. Kolmiossa ABC olkoon AB-sivulla etsittävä piste X, josta suora XY yhdensuuntainen AC:n kanssa. Kolmioissa BXY ja XAC ovat kulmat X ja A yhtäsuuret; siis

$$\frac{\Delta BXY}{\Delta XAC} = \frac{BX}{XA} \cdot \frac{XY}{AC}$$

ja on tämä suhde  $= 1$ , koska kolmiot ovat yhtäsuuret.  $\Delta BXY \sim \Delta BAC$ , josta

$$\frac{XY}{AC} = \frac{BX}{BA}.$$

Saamme nyt

$$\frac{BX}{XA} \cdot \frac{XY}{AC} = \frac{BX}{XA} \cdot \frac{BX}{BA} = 1,$$

josta

$$\frac{BA}{BX} = \frac{BX}{XA}.$$

Tämä suoritus käynee helpommaksi, jos janojen lukuarvoja käytetään. Tästä näemme, että AB on jaet-

tava jatkuvaisessa suhteessa ja B:stä lähtien erotettava suurempi osa. Jakopiste on määrättävä piste.

3. 40, 30, 20 ja 50 metriä.

4. 4440 miestä.

$$5. \begin{cases} x = \frac{a+b}{2\sqrt{a}} \\ y = -\frac{a-b}{2\sqrt{a}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{a+b}{2\sqrt{a}} \\ y = \frac{a-b}{2\sqrt{a}} \end{cases}$$

Miten vastaukset kuuluvat, jos juuret nimittäjästä poistetaan?

6. Vuonna 2008. Ekv. on  $40000 \cdot 1.025^x = 1000000$ , jossa  $x$  on vuosimäärä.

7. Jos  $v$ -kulma on sivua  $a$  vastassa, saadaan  $e = 124.62$  m ja  $b = 92.33$  m. Jos  $v$ -kulma on  $b$ -sivua vastassa, on  $e = 7.47$  m ja  $b = 28.06$  m. (Huomaa, että suunnikkaan lävistäjät jakavat toisensa kahteen yhtäsuureen osaan).

8.  $\frac{147}{64} \pi \text{ dm}^3 = 7.216 \text{ dm}^3$ . Kartion aseman säde  $= \frac{3\sqrt{7}}{4}$  ja sen korkeus  $= \frac{7}{4} \text{ dm}$ .

9. 6967 neliöpenink. Ensiksi määrätään 69 ja 60-asteen välisen katk. pallosegmentin sivupinta. Jos  $r$  on maapallon säde, niin segmentin korkeus ( $k$ ) on

$$r \sin 69^\circ - r \sin 60^\circ.$$

$$\text{Sivupinta} = 2\pi rk$$

$$\begin{aligned} &= 5400 k = 5400 r (\sin 69^\circ - \sin 60^\circ) \\ &= \frac{5400 \cdot 5400 (\sin 69^\circ - \sin 60^\circ)}{2\pi} \end{aligned}$$

Suomen pinta-ala

$$= \frac{(48 - 40) \cdot 5400^2 (\sin 69^\circ - \sin 60^\circ)}{360 \cdot 2\pi}$$

neliöpeninkulmaa.

10. Etäisyys on joko  $53.97$  r tahi  $67.56$  r, jossa  $r$  on maapallon säde. Jos  $m$  on maan massa ja  $m_1$  kappaleen massa sekä  $x$  kappaleen etäisyys maan keskipisteestä (maan säde yksikkönä), niin on yhtälö

$$\frac{mm_1}{x^2} = 80 (60r - x)^2$$

Paitsä näitä kahta kohtaa:  $X$  (jonka etäisyys maan keskipisteestä  $= 53.97$  r) ja  $Y$  (etäisyys  $= 67.56$  r) maan ja kuun keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla löytyy äärettömän monta pistettä, joissa maan ja kuun vetovoimat ovat yhtä suuret. Näitten pisteitten ura on pallon pinta, jonka halkaisija on  $XY$ .

## 1879.

1.  $1\frac{4}{6}\frac{3}{2}$  km,  $2\frac{9}{12}\frac{5}{4}$  km ja  $2\frac{6}{12}\frac{7}{4}$  km. Suon poikki kulkevan  $\frac{1}{4}$  km pitkän tien asemesta otetaan 2 km muuta tietä ja saadaan  $(7 - \frac{1}{4} + 2)$  km  $= 8\frac{3}{4}$  km samanlaatuista tietä jaettavaksi manttaalien mukaan. Silloin ovat osuudet  $1\frac{4}{6}\frac{3}{2}$ ,  $4\frac{1}{3}\frac{6}{1}$  ja  $2\frac{6}{12}\frac{7}{4}$  km. Keskimäisen suhteen on meneteltävä näin:  $4\frac{1}{3}\frac{6}{1} - 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{9}{12}\frac{5}{4}$ .

2.  $\pm (3x^3 - ax^2 - 2x - 3)$ .

3. 10 m, 20 m ja 30 m. Suorakaiteet voidaan otak-sua olevan suorakulmaisen parallelipipeedin kolme yhteensattuvaa sivua.

4. Vuonna 1890. Jos  $x$  on vuosimäärä, on yhtälö

$$200 \cdot 1.05^x + \frac{10 \cdot 1.05 (1.05^x - 1)}{1.05 - 1} = 500.$$

5. Kolmiossa  $ABC$  täytyy etsittävän pisteen  $X$ :n olla sellaisen, että

$\triangle AXB = \triangle AXC = \triangle BXC = \triangle ABC$ :n kolmas osa. Jos  $\triangle AXB$ :n asema on  $AB$ , niin miten pitkä on sen korkeus? Millä suoralla löytyy siis kärkipiste  $X$ ? Millä

suoralla löytyy  $\triangle AXC$ :n kärkipiste X? Mikä piste on siis X? — Etsittävä piste on muuten kolmion painopiste.

6. 1:o Suorat leikkaavat toisensa. Piirrä sen leikkauskulman puolittaja, jossa määrätty piste löytyy, ja samaan leikkauskulmaan mielivaltainen ympyrä, joka sivuaa suoraa. Pidetään näitten leikkauspiste mukaisuudenpisteinä (yhdyspisteinä) ja piirretään mukaisuuden säde annetun pisteen kautta. Pisteet, joissa se leikkaa piirretyn ympyrän, yhdistetään tämän keskipisteeseen ja annetusta pisteestä piirretään näitten säteiden suuntaiset janat. Ne pisteet, missä nämä janat leikkaavat leikkauskulman puolittajan, ovat etsittävien ympyröitten keskipisteitä.

2:o Mitenkä tehtävä ratkaistaan, jos suorat ovat yhdensuuntaiset? (Katso 1913 S; esim. 2). Entä, jos, suorien leikatessa toisensa, piste on jommallakummalla suoralla tai leikkauskulman puolittajalla? Tutki muitakin erikoistapauksia!

7.  $104^{\circ} 28' 39''$ .

8. 3,64 km. Valon nopeus on siksi suuri, että voidaan otaksua, että salaman jokaisesta pisteestä sattuu valo silmään samalla hetkellä. Jyrinä alkaa salaman lähimmästä kohdasta ja loppuu salaman etäisimpään kohtaan. Tuo lähin kohta on salaman päätepiste, jos kohtisuora silmästä salamaa vastaan ei kohtaa salamaa sen päätepisteiden välillä. Tässä esimerkissä saadaan kolmio, jossa tunnetaan kaksi sivua  $\frac{13}{3}$  km ja  $\frac{13+4}{3}$  km sekä välinen kulma  $40^{\circ}$ ; kysytään kolmatta sivua.

9.  $\frac{3,3681^3}{100}$  kannua = 0,38208 kannua.

10. Eheän kartion sivupinta =  $\pi \cdot 3 \cdot 5 \text{ dm}^2 = 47,124$

$\text{dm}^2$ . Katk. kartion sivupinta =  $(\pi \cdot 6 \cdot 5 + \pi \cdot 3 \cdot 5) \text{ dm}^2 = 141,372 \text{ dm}^2$ . Etsittävän kappaleen tilavuus =  $\frac{\pi \cdot \sqrt{3^2 - 3^2}}{3} (6^2 + 3^2 + 6 \cdot 3) - \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2}}{3} \text{ dm}^3 = 226,194 \text{ dm}^3$ .

11. 29,99 kg. »Nousu on 3 sadalta» merkitsee, että kaltevan pinnan korkeus on 3 prosenttia kaltevan pinnan asemasta. Jos siis asemaksi otetaan 100 m, niin korkeus = 3 m ja pituus =  $\sqrt{3^2 + 100^2} \text{ m} = \sqrt{10009} \text{ m}$ . Jos ei kitkaa olisi, niin olisi hevosen voitettava vastus  $\frac{3 \cdot 500}{\sqrt{10009}} \text{ kg}$ . Paine kaltevaa pintaa vastaan on  $\frac{100 \cdot 500}{\sqrt{10009}} \text{ kg}$  ja siis kitka  $\frac{3 \cdot 100 \cdot 500}{100 \cdot \sqrt{10009}} \text{ kg}$ . Laske kitka yhteen asken mainittuun vastaukseen, niin saat tietää, mikä vastus hevosen on voitettava!

## 1880.

1. Kolmioon ABC ovat korkeusviivat AE ja BD piirretty. Missä kulmassa näkyy AB pisteistä D ja E? Mikä on kyseessä oleva ympyrä? Kelpaako väitös suorakulmaiselle ja tylsäkulmaiselle kolmiolle?

2. Etsi ympyröitten mukaisuuden pisteet. Näistä toiselle ympyrälle piirretyt tangentit ovat toisenkin ympyrän tangentteja. (Mukaisuuden-pisteet saadaan näin: Piirrä suora ympyröitten keskipisteitten A ja B kautta, sekä A-ympyrään säde AC ja B-ympyrään halkaisija DE siten, että AC on DE:n suuntainen. Ne pisteet, joissa CD ja CE leikkaavat A:n ja B:n kautta kulkevaa suoraa, ovat mukaisuuden pisteet). Tutki ratkaisutulosten lukumäärä ympyröitten ollessa eri asennoissa toistensa suhteen!

3. Maalisk. 22 p. kello 4 t 45 min 37 sek a. p. ja syysk. 20 p. kello 7 t 34 min 50 sek i. p. (Vuosi 1880 oli karkausvuosi!) Lasketaan, montako kertaa 3 min

56,56 sek sisältyy (12 t—6 t 41 min 50 sek):iin ja siten montako kertaa 3 min 56,56 sek sisältyy 12 tuntiin.

4.  $x = 3$ ,  $y = 2$  ja  $z = 1$ .

5. Matka kesti 25 vuorokautta ja joka päivä jaettiin 36 kg.

6. 46 porrasta.

7. 35,3 dm<sup>2</sup>. Määrää ensin pallon säde  $r$ . Sitten on laskettava sylinterin asema, jonka säde on  $r$ , ja sivupinnan, jonka korkeus on  $2r$ , summa.

8.  $b = 60,681$  m,  $C = 46^\circ 39' 38''$  ja ala  $= 436,94$  m<sup>2</sup>.

9. Olkoon suorakulm. kolmion ABC kulmista C suora ja B suurempi kuin A. Silloin  $B = 51^\circ 49' 37''$ ,  $A = 38^\circ 10' 23''$ ,  $b = 3,567$  m,  $a = 2,804$  m ja  $c = 4,537$  m. Saadaan

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Nyt  $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A$  ja  $\frac{b}{c} = \sin B = \cos A$ .

joista

$$\operatorname{tg} A = \cos A.$$

On huomattava, että sivut voidaan määrätä myöskin ilman trigonometrisia laskuja. Saadaan, näet,

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \\ \frac{ab}{2} = \bar{s} \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

10. Lukuarvo on 35316, jos metri ja min ovat mitat. Löytyy kaava

$$v = at.$$

Jos  $t = 1$ , niin  $v = a$ ; siis accel on ensimmäisen aikayksikön loppunopeus. Saamme;

Ens. sek:n loppunopeus  $= 981$  cm sek:ssa,

60 " " "  $= 60.981$  " " "

Ens. min:n " " "  $=$  " " " "

" " "  $= 60.60.981$  cm min:ssa

" " "  $= 60.60.981$  m min:ssa  $= 35316$   
100 m min:ssa.

Mukavimmin saa, käyttämällä kiihtyväisyyden yksikköä

$$\frac{\text{pituusyksikkö}}{\text{aikayksikkö}^2},$$

vastauksen näin:

$$\begin{aligned} 981 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} &= 981 \frac{100 \text{ m}}{(\frac{1}{60} \text{ min})^2} = \\ &= \frac{981.60^2 \text{ m}}{100 \text{ min}^2} = 35316 \frac{\text{m}}{\text{min}^2}. \end{aligned}$$

## 1881.

1. Olkoon määrätty jana  $= r_1$  ja annetun ympyrän säde  $= r_2$ . Sellaisten ympyröitten keskipisteitten urana, joitten säde  $= r_1$  ja jotka sivuavat  $r_2$ -säteistä ympyrää, ovat ne kaksi ympyräviivaa, joitten keskipisteinä on  $r_2$ -säteisen ympyrän keskipiste ja joista toisen säteenä ovat  $(r_1 + r_2)$  ja toisen  $(r_1 - r_2)$  tahi  $(r_2 - r_1)$ , riippuen siitä, kumpi:  $r_1$  vai  $r_2$  on suurempi. Piirretään nämä ympyräviivat; ne pisteet, missä nämä leikkaavat annetun suoran, ovat etsittävien ympyröitten keskipisteet. Ratkaisutulosten määrän eri tapauksissa selville saamiseksi verrataan  $r_1$ :n ja  $r_2$ :n summaa ja erotusta annetun ympyrän keskipisteeseen etäisyyteen annetusta suorasta.

2. Piirretään mallikuvio ABC, jossa otaksutaan  $A =$  annettu kulma  $\alpha$  ja  $C =$  annettu kulma  $\beta$ . Koska sivujen summa on  $=$  annettu jana  $s$ , niin väännetään sivut AB ja CB, niin että ne tulevat AC:n jatkeiksi:

$AD = AB$  ja  $CE = CB$ , joten jana  $DACE = s$ . Yhdistetään  $D$  ja  $E$  pisteeseen  $B$ . Suuretko ovat kulmat  $D$  ja  $E$ ? Miten voidaan piirtää kolmio  $DBE$ ? Miten sitten kolmio  $ABC$ ?

3. Jos tasakylkinen kolmio on  $ABC$ , jossa  $AB$  on asemana sekä  $AD$  ja  $BE$  kulmien puolittajat, niin  $\triangle ACD \sim \triangle BCE$  (kaksi kulmaa), ja siis saadaan

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC}.$$

Mutta koska  $AC = BC$ , niin voi kirjoittaa

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{EC},$$

josta seuraa, että  $ED$  ja  $AB$  ovat yhdensuuntaiset.

4. Vuokra on 1670 mk; ruishehtolitrin hinta 15 mk 75 penniä ja maitolitrin 30 penniä.

5. Juuret ovat 24 ja  $8\frac{2}{3}$ .

6. Toinen kivipari jauhtaa 1 tunnissa 15 min:ssa ja toinen 1 tunnissa. Jos etsittävät ajat ovat  $x$  ja  $y$  min, niin ekv:t ovat

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \frac{300}{x} + \frac{300}{y} = 9. \end{cases}$$

7. Astia vetää 57.  $\pi \text{ cm}^3 = 179,07 \text{ cm}^3$  ja sen sisäpuolisen pinnan ala  $= (5\pi\sqrt{82} + \pi \cdot 2^2) \text{ cm}^2 = 154,81 \text{ cm}^2$ .

8.  $A = 105^\circ 4' 16''$ ,  $B 41^\circ 10' 32''$  ja  $c = 12,659$  metr.

9. 2.16475 dm. Jänteen puolikas  $= 2$  dm ja siis, jos säde  $= r$ ,

$$\frac{2}{r} = \sin \frac{360^\circ - 225^\circ}{2}.$$

10. 7950,769 m. Jos  $a$  on barometrin läpileikkausala, niin on ekv.

$$0,0013 a \cdot x = 13,6 \cdot a \cdot 760.$$

1882.

1. Suunnikkaassa  $ABCD$  olkoon  $A$ -kulman puolittajan leikkauspiste  $BC$ :n kanssa  $E$  ja  $C$ -kulman puolittajan leikkauspiste  $AD$ :n kanssa  $F$ . (Huom!  $AB < BC$ ). Silloin  $\angle EAF = \angle FCE$  (suunnikkaan vastakkaisten kulmien puolikkaat ovat yhtäsuuret). Koska  $BC$  ja  $AD$  ovat yhdensuuntaiset, niin  $\angle FCE = \angle CFD$ . Siis  $\angle EAF = \angle CFD$ , josta  $AE$  ja  $FC$  ovat yhdensuuntaiset. — Jos suunnikas on tasasivuinen, yhtyvät puolittajat.

2. Jos jänteen osat ovat  $x$ , ja  $2x$  (jänne itse siis  $= 3x$ ), ja tunnetun pisteen kautta ympyrään piirretyn mielivaltaisen jänteen osat  $a$  ja  $b$ , niin on ekv.

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{2x},$$

$$\text{josta } x = \sqrt{\frac{ab}{2}} = \sqrt{a \cdot \frac{b}{2}}.$$

Mitenkä jatketaan?

3. Piirrä mallikuvio, jossa  $ABC$ -kolmiossa  $A =$  annettu kulma  $\alpha$  ja  $AB =$  tunnettu jana  $a$ . Sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste olkoon  $O$ , ja sen ympyrän, joka sivuaa  $AB$ :tä sekä  $CA$ :n ja  $CB$ :n jatkeita, keskipiste olkoon  $P$ . Jana  $OP =$  annettu jana  $b$ . Koska  $O$  on sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste, niin  $OA$  puolittaa  $CAB$ -kulman; samaten tämän kulman sivullisen (vierus-)kulman puolittaa  $AP$ . Koska kahden sivullisen kulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin  $\angle OAP$  on suora. Samaten  $\angle OBP$  on suora. Jos siis  $OP$  halkaisijana piirretään ympyrä, kulkee se  $A$ :n ja  $B$ :n kautta.

Tästä johtuu seuraava ratkaisutapa: Jana  $b$  halkaisijana piirretään ympyrä  $(K)$ , johon asetetaan jana  $a$

jänteeksi (AB) ja jänteen viereen sen päätepisteeseen  $\alpha$ -suuruinen kulma (DAB) sekä puolitetaan tämä; (katso mallikuviota!) Se piste (O), jossa puolittaja leikkaa piirrettyä ympyrää, on etsittävän kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Pisteitten K:n ja O:n kautta piirretty suora leikatkoon AD:tä pisteessä C. Pisteet C ja B yhdistetään. Saatua kolmio ABC on etsittävä kolmio. — Tehtävä on mahdollinen, jos  $b \sin \frac{\alpha}{2} < a \leq b$ . (Huomaa, että OPB-kulma on  $= \frac{\alpha}{2}$ ).

4. 30 mk, 20 mk ja 10 mk.

5. Juuret ovat  $\frac{1}{2}$  ja  $\frac{1}{3}$ .

6.  $c = 2,8$ . Määrää yhtälön juuret aivan kun  $c$  olisi tunnettu ja muodosta yhtälö:

juurten neliöiden erotus  $= 0,15$ .

7.  $216^\circ$ . Voidaan ottaa kartion korkeus  $= 4$  ja siis aseman säde  $= 3$ . Suuriko on kartion sivuviiva? Suuriko on kartion aseman kehä  $=$  ympyrän sektorin kaari? Saadaan

$$\frac{x}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 3}{2\pi \cdot 5}$$

8.  $A = 47^\circ 20' 39''$ . Ala  $= 1285,4 \text{ dm}^2$ .

9. Kolmiossa ABC olkoon  $\sin A = \lg B$ . Sinusväit-tämän mukaan on  $\sin A : \sin B = 12 : 9$ . Näistä  $\lg B : \sin B = 12 : 9$ , josta  $\cos B = \frac{3}{4}$  ja tästä taas  $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$ , joista lopuksi  $\sin A = \lg B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ . Olemme siis saaneet:

$$\begin{cases} \sin A = \frac{\sqrt{7}}{3} \\ \cos B = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Näistä saamme  $A = 61^\circ 52' 30''$  ja  $B = 41^\circ 24' 35''$ . Mutta nyt on huomattava, että jos kolmion kulma on ilmoitettu sinuksensa (tai cosecanttinsa) kautta, niin

saadaan kaksi vastausta, joista toinen kulma on toisen supplementtikulma. Tässä saadaan siis toinenkin arvo A:lle:  $180^\circ - 61^\circ 52' 30''$ . — Kolmion kulmat ovat siis:

| joko                | tahi                |
|---------------------|---------------------|
| $61^\circ 52' 30''$ | $118^\circ 7' 30''$ |
| $41^\circ 24' 35''$ | $41^\circ 22' 35''$ |
| $76^\circ 42' 55''$ | $20^\circ 27' 55''$ |

10. 706,32 metr. Saadaan yhtälöjärjestelmä:

$$\begin{cases} m = \frac{1000}{9,81} \\ 10 = ma \\ s = \frac{at^2}{2} = \frac{a \cdot (60 \cdot 2)^2}{2} \end{cases}$$

1883.

1. 37.

2. Summa on jaettava suhteeseen  $164 : 123 : 42$ . Saamme  $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$ . Siis joka kerta kun A saa 20 mk, saa B 15 mk ja C 12 mk. Näistä 12 markasta luovuttaa C A:lle  $\frac{20 \cdot 6}{20+15}$  mk ja B:lle  $\frac{15 \cdot 6}{20+15}$  mk, joten suhde on

$$(20 + \frac{20 \cdot 6}{20+15}) : (15 + \frac{15 \cdot 6}{20+15}) : 6.$$

3. Kolmiossa on aina yksi sivu pienempi kuin toisten sivujen summa: kukin lävistäjä pienempi kuin viisikulmion kahden sivun summa, josta yhteenlaskemalla: lävistäjien summa pienempi kuin kaksi kertaa sivujen summa.

4. Suurin neliö, joka voidaan erottaa, on se, jonka sivu on 157 pituusyksikköä. Montako tällaista neliötä saadaan? Tämän neliön erottamisen jälkeen on suorakaide, jonka sivut ovat 157 ja 68 pituusyksikköä, jaettava neliöihin, j. n. e. Vastaus kuuluu:

- 1 neliö, jonka sivu on 157 pituusyksikköä,  
 2 neliötä, joittenka sivu on 68 pituusyksikköä,  
 3 " " " " 21 " "  
 4 " " " " 5 " "  
 5 " " " " 1 pituusyksikkö.

(Lyhyesti kuuluu neuvo: etsi lukujen 225 ja 157 suurin yhteinen tekijä!)

5. A:lla 185 ja B:llä 72 mk. Jos A:n summa on  $x$  ja B:n summa  $y$ , niin mikä lauseke näitten välillä ilmoittaa velan suuruuden?

6.  $x = 4$  ja  $y = -3$ .

7. Yhdistysjanojen (transversaalien) summa  $= \frac{n \cdot p}{2}$ , jossa  $p$  on piiri. Summa on  $=$  piiri, jos  $n$  on 2. — Jos sivut ovat  $a, b$  ja  $c$ , niin  $n$  suuntaisten yhdistysjanojen summa  $= \frac{a}{n+1} + \frac{2a}{n+1} + \frac{3a}{n+1} + \dots + \frac{na}{n+1} = \frac{a}{n+1} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{n(1+n)}{2} = \frac{na}{2}$ .

Kaikkien yhdistysjanojen summa  $= \frac{na}{2} + \frac{nb}{2} + \frac{nc}{2} = \frac{n}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{n}{2} \cdot p$ .

8.  $\cos \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{1 + \frac{\cos 45^\circ}{2}} =$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$

9.  $0,92$ . Monellako desimaalilla on  $\sqrt{2}$  määrättävä, jotta  $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  tulisi oikein kahdella desimaalilla?

10. 78,7 metriä. Esimerkkiin kuuluvan kuvan saat näin: Piirrä suorakaide ABCD, jossa  $AB = DC = 950$  m ja  $AD = BC = 30,6$  m. (AB kuvaa meren pintaa). Jatka BC:tä C:n puolelle ja valitse jatkeella sellainen piste N, että yhdysjana DN tekee AD:n jatkeen (D:n puolelle) kanssa  $87^\circ 5' 59''$ -kulman. Jos  $CN = x$ , niin

$$\frac{x}{950} = \operatorname{tg}(90^\circ - 87^\circ 5' 59'')_{,5}$$

Etsittävä korkeus  $BN = x + 30,6$  metriä.

11.  $3\pi \text{ dm}^3 = 9,425 \text{ dm}^3$ .

12. Olkoon tangon paino  $P$ , sen pituus  $AB = l$  ja sen tukipisteen C:n etäisyys A:sta, johon punnittava kappale on ripustettu,  $AC = a$ . Silloin on  $BC = l - a$ . Olkoon punnittavan kappaleen paino  $x$ , tangon AC-osan paino  $y$  ja tangon CB-osan paino  $z$ . Painot  $y$  ja  $z$  määrätään yhtälöistä

$$\frac{y}{P} = \frac{a}{l}$$

$$\frac{z}{P} = \frac{l-a}{l}$$

Staatisten momenttien lain mukaan saadaan:

$$x \cdot a + y \cdot \frac{a}{2} = z \cdot \frac{l-a}{2}.$$

Vastaus: Kappaleen paino  $(x) = \frac{P(l-a)}{2a}$ .

1884.

1. 4404017.

2.  $1:0 \quad \begin{array}{l} 100a + 10b + c \\ 100a + 10c + b \\ 100b + 10a + c \\ 100b + 10c + a \\ 100c + 10a + b \\ 100c + 10b + a \end{array}$

Summa  $= 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c) = 2 \cdot 3 \cdot 37(a + b + c)$ , josta seuraa väitys.

2:o Tehtävää, niinkuin se kuuluu, voidaan myöskin käsittää näin:

$111 + 222 + 333 + 444 + 555 + 666 + 777 + 888 + 999 = 4995 = 3 \cdot 37 \cdot 45$ , josta näkee, että lukujen summa

on jaollinen 3:lla ja 37:llä. Luvun 4995 voipi kirjoittaa myöskin  $= 135 \cdot 37$ . Nyt on numeroiden summa  $= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + \dots + 9 + 9 + 9 = 135$ . Siis lukujen summa on myös numeroiden summalla jaollinen.

3.  $x = 2$  ja  $y = 3$ . Ota uudet tuntemattomat  $u = \frac{1}{x}$  ja  $v = \frac{1}{y}$ .

4. 7 m ja 1 m.

5.  $2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$ . Ilman, että ensiksi etsitään juuret ja niitten avulla määrätään ekv., voidaan tehtävä suorittaa seur. tavalla:

$$1) x_1 + x_2 = a$$

$$2) x_1^2 + x_2^2 = b$$

Näistä

$$1) x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = a^2$$

$$2) x_1^2 + x_2^2 = b$$

joista

$$x_1x_2 = \frac{a^2 - b}{2}$$

Ekv. kuuluu  $x^2 - ax + \frac{a^2 - b}{2} = 0$ , joka sievennettyä antaa alussa mainitun yhtälön.

6.  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$  on sivu neliössä, jonka lävistäjä on a.

7. Tunnetun pisteen ja tunnetun suoran määräämässä tasossa piirretään pisteestä suoraa vastaan kohtisuora viiva sekä tämän kantapisteseen toinenkin kohtisuora annettua suoraa vastaan. Kohtisuorien määräämä taso on etsittävä taso.

8.  $\sin x = \frac{2a}{1+a^2}$ . Kun a on  $1 + \sqrt{2}$ , niin on  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$ . Pane  $\frac{x}{2} = y$ ; silloin  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} =$

$$\operatorname{ctg} y = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 y}}{\sin y} = a, \text{ iosta saadaan } \sin$$

y:n arvo ja tämän avulla  $\cos y$ :n arvo assa määrättyinä. (Mitkä sin:n ja cos:n merkit ovat yht'aikaisia?) Tämän jälkeen

$$\sin x = \sin 2y = 2 \sin y \cos y.$$

$$\begin{aligned} 9. \quad A &= 83^\circ 40' & A_1 &= 96^\circ 20' \\ C &= 71^\circ 5' 47'' & C_1 &= 58^\circ 25' 47'' \\ c &= 670,11 & c_1 &= 603,49. \end{aligned}$$

10. Jos kartion kärjenpuoleisen osan, joka on eheä kartio, suhde asemanpuoleiseen osaan, joka on katkaistu kartio, on  $m:n$ , ja annetun kartion korkeus on k, niin on leikkaavan tason etäisyys kartion kärjestä  $\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}} \cdot k$ . Jos tämä etäisyys on  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot k = \sqrt[3]{\frac{k}{2}}$ , niin leikkaava taso puolittaa kartion. Laskiessa on mukavinta verrata sitä osaa, joka on eheä kartio, koko annettuun eheään kartioon. (Huomaa, että jaettavan kartion suhdeluku on  $m+n$ ).

11. Olkoon taso M sekä pisteet A ja B! Piirrä A:sta kohtisuora M:ää vastaan ja jatka kohtisuoraa tason toiselle puolelle pisteeseen C, joka on yhtä etäällä M:stä kuin A! Yhdistä A ja C! Se piste, jossa AC leikkaa tason, on määrättävä piste. Todista, että ponnahduslait ovat voimassa!

## 1885. A.

1. Jos viimeinen numero on b ja luku sen edellä on a, niin koko luku on  $10a + b$ . Jos 2 viimeisen numeron muodostama luku on b ja luku edellä on a, niin koko luku on  $100a + b = 10^2a + b$ . Jos 3 viimeisen numeron muodostama luku on b ja luku edellä on a, niin koko luku on  $1000a + b = 10^3a + b$  j.n.e. Jos  $m+n$  viimeisen numeron muodostama luku on b ja luku edellä on a, niin koko luku on  $10^{m+n}a + b$ .

Nyt saamme  $10^m + n$ .  $a + b = 2^m + n$ .  $5^m + n$ .  $a + b = 2^m$ .  $2^n$ .  $5^n$ .  $5^n$ .  $a + b$ . Koska ensin. termi, kuten näemme, on jaollinen tulolla  $2^m$ .  $5^n$  ja  $b$  on oletuksen mukaan tulolla  $2^m$ .  $5^n$  jaollinen, niin on koko luku  $10^m + n$ .  $a + b$  tulolla  $2^m$ .  $5^n$  jaollinen.

2. Yhtälö on  $x^2 - 10x + 1 = 0$ . Poista juuret luvun  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$  nimittäjästä. Saamme, että tämä luku  $= 5 - 2\sqrt{6} =$  toinen juuri  $x_1$ . Toinen juuri  $x_2$  saadaan näin: Koska otsittävän yhtälön koeffisienttien tulee olla ratsionaalilukuja (ekv:ssa  $x^2 + px + q = 0$  luvut  $p$  ja  $q$  ratsionaalilukuja), niin täytyy myöskin  $x_1 + x_2 (= -p)$  olla rat. luku ja  $x_1 \cdot x_2 (= q)$  rat. luku eli  $(5 - 2\sqrt{6}) + x_2$  ja  $(5 - 2\sqrt{6}) \cdot x_2$  olla rat. lukuja. Ainoa luku  $x_2$ , joka nämä lausekkeet tekee ratsionaaliseksi, on  $5 + 2\sqrt{6}$ . Kun nyt on saatu yhtälön juuret  $5 - 2\sqrt{6}$  ja  $5 + 2\sqrt{6}$ , niin saadaan yhtälö helposti.

3. Luvut olivat 97 ja 673 sekä niiden tulo 65281. Ensimmäisen oppilaan tulo oli 65261, toisen 64781 ja kolmannen 59281. Etsittävät luvut olkoon  $x$  ja  $y$  sekä  $z$  yksikön arvo siinä paikassa, jossa ensimmäinen oppilas teki virheen. Ensimmäisen oppilaan tulo oli siis  $2z$  pienempi kuin oikea tulo, toisen oppilaan  $5 \cdot 10z$  ja kolmannen  $6 \cdot 100z$ . Yhtälöt ovat

$$\begin{cases} xy - 2z = 672x + 77 \\ xy - 50z = 667x + 82 \\ xy - 600z = 611x + 14. \end{cases}$$

$$4. \quad x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

$$z = \frac{a^2 + b^2 \mp \sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

Korota toinen yhtälö neliöön, vähennä tästä kolmas ja sijoita  $xz$ :n sijaan  $y^2$ . Saat  $2y(x + z + y) = a^2 - b^2$ . Miten jatkat?

5. 142857; 285714; 428571; 571428; 714285; 857142.

6. Kirjoita  $y = (\frac{2}{3})^x$ . Yhtälö kuuluu silloin  $y^2 + y = \frac{2}{3}$ , jonka juurista toinen on positiivinen ja toinen negatiivinen. Koska näitten tulisi esittää  $(\frac{2}{3})^x$ , niin kelpaavatko molemmat? Yhtälön juuri on 1,92896.

7. 6 ympyrää. Olkoon se ympyrä, jota muitten ympyröitten pitää sivuta,  $O$  ja olkoon sen säde  $r$ . Piirrä ympyrä  $A$  (säteellä  $r$ ), joka sivuaa  $O$ :ta. Sitten ympyrä  $B$ , joka sivuaa  $O$ :ta ja  $A$ :ta. ympyrä  $C$ , joka sivuaa  $O$ :ta ja  $B$ :tä, ympyrä  $D$ , joka sivuaa  $O$ :ta ja  $C$ :tä, ympyrä  $E$ , joka sivuaa  $O$ :ta ja  $D$ :tä sekä ympyrä  $F$ , joka sivuaa  $O$ :ta ja  $E$ :tä; (kaikki säteellä  $r$ ). On todistettava, että ympyrä  $F$  sivuaa myöskin  $A$ :ta eli siis että  $AF$ -jana  $= 2r$ .

8. Olkoon suora  $L$ , ympyrä  $O$  ja kulma  $= a$ . Jos  $P$  on eräs piste, josta  $O$  näkyy  $a$ -kulmassa, niin näitten pisteitten ura, josta  $O$  näkyy  $a$ -kulmassa, on ympyräviiva, jonka keskipiste on  $O$  ja säde  $OP$ . Mitenkä löydät sellaisen pisteen  $P$ , josta tässä on kysymys? Jos tangenttikulma  $= a$ , niin suuriko on vastaava sentri-(keskus-)kulma? Mainitun uran ja  $L$ :n leikkauspisteet ovat etsityt pisteet. Onko tehtävä aina mahdollinen?

9.  $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ , jossa  $a$  ja  $b$  ovat annettujen hinkeloiden särmät, on aseman särmän pituus. Jana, jota tämä lauseke esittää,  $=$  kolmas sivu kolmiossa, jossa kaksi sivua on  $a$  ja  $b$  sekä välinen kulma  $60^\circ$ . Todista tämä! Jos lauseke olisi  $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ , olisi välinen kulma  $120^\circ$ .

10. Kulmat ovat  $0^\circ$  ja  $240^\circ$ . Mitenkä kulman jän-

teestä päästään saman kulman puolikkaan sinukseen?  
Saadaan yhtälö

$$\operatorname{tg} x = 2 \sin \frac{x}{2}$$

Kun  $\operatorname{tg} x$  ja  $\sin \frac{x}{2}$  määrätään  $\cos x$ :ssä, niin muodostuu yhtälö

$$2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1 = 0,$$

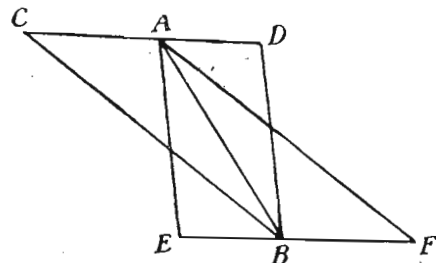
joka voidaan kirjoittaa muotoon  $(\cos x - 1)(2 \cos^2 x - \cos x - 1) = 0$ , josta saadaan  $\cos x = 1$  ja  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Kulmat ovat siis  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  ja  $240^\circ$ . Minkätähden ei  $120^\circ$  hyväksytä? Jos jakso myöskin merkitään, niin mitenkä kuuluu vastaus? Kelpaako n.  $360^\circ$  jaksoksi?

11. 1700 metriä. Kun tässä on kysymys pienistä matkoista, voidaan maan pinta otaksua tasoksi. Tälle tasolle projisoitujen tähtäysviivojen AC ja BC projektiot olkoot AD ja BD. Jana AB = 2526 m. BD:llä on lounainen ja AD:llä luoteinen suunta. Laske, pitkähkö on BD ja siitä DC(=x)! Saamme

$$x = 2526 \cos 45^\circ \operatorname{tg} 43^\circ 35' 8''.$$

12. Virran nopeus on 2,33 pe-nink. tunnissa ja sen suunta poikkeaa  $2^\circ 2' 55''$  etelään päin länsi-itäsuunnasta. Piirrä voimasuunnikaat (katso kuv 5.) AEBD ja BCAF.

Jollei virtaa olisi, kulkisi laiva A:sta E:hen; virta yksinään taas veisi laivan A:sta D:hen; siis joutuu laiva todellisuudessa B:hen. Samaten pitemmällä kalla, jollei



Kuva 5.

virtaa olisi, joutuisi laiva B:stä C:hen; virta yksinään veisi laivan B:stä F:ään; laiva joutuu siis A:han. Saadaan jana  $AE = BD = 50.54$  km; jana  $AD = 54x$  km ( $x$  on virran nopeus); jana  $BC = 60.66$  km ja jana  $CA = 66x$  km. Tarkasta kolmiota CDB, jossa tunnetaan kaksi sivua BD ja BC sekä näitten välinen kulma ( $= 45^\circ$ ). Mitä osia kolmiossa kysytään?

## 1885. B.

1. 13 henkilöä.
2. Nopeudet ovat 15 m ja 10 m sek:ssa. Jos kap-paleet liikkuvat samaan suuntaan, on matkojen erotus = ympyrän kehän pituus.
3.  $\begin{cases} x = 49 \\ y = 9 \end{cases}$   $\begin{cases} x = 9 \\ y = 49 \end{cases}$ .
4. Kumpikin tekijä on  $\sqrt{a}$  ja minimiarvo on  $2\sqrt{a}$ .
5.  $\frac{3}{5}$ .
6. Yhdistä aseman päätepisteet sisäänpiirretyn ympyrän keskipisteeseen. Yhdistysjanat puolittavat asemakulmat. Miten jatketaan?
7. Piirrä mallikuvio! Olkoon pienemmän neliön sivu a ja suuremman b sekä toisen neliön kärjen etäisyys toisen neliön kärjestä x. Saadaan suorakulm. kolmio, jossa hypotenuusa on a sekä kateetit x ja b -- x. Kun muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, saadaan, että toinen kateetti on  $\frac{b + \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - b^2}}{2}$  ja toinen  $b - \frac{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 - b^2}}{2}$ . Miten nämä lausekkeet piirretään ja miten loppuun jatketaan? Tehtävä on mahdoton, jos  $(a\sqrt{2})^2 - b^2 < 0$ , siis jos  $a\sqrt{2} < b$  eli jos pienemmän neliön lävistäjä on pienempi kuin suuremman neliön sivu.

8. Säteen pituisen matkan päässä pallon pinnasta.  
— Jos pallon säde =  $r$  ja sen pallosegmentin sivupinnan, joka nähdään, korkeus =  $k$ , niin saadaan yhtälö  $2\pi rk = \frac{4\pi^2}{4}$ , josta  $k = \frac{r}{2}$ . Jos etsittävä matka =  $x$ , niin siitä suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusa =  $r + x$ , toinen kateetti =  $r$  ja toinen kateetti on tangentti, saadaan

$$\frac{r+x}{r} = \frac{r}{r-k}$$

9.  $B = 48^\circ 11' 21''$ . Saadaan  $\sin A : \sin 2A = 3 : 4$ , josta  $\cos A = \frac{2}{3}$ .

10.  $\sqrt{10}$  kg = 3,162 kg. Jos tavaran oikea paino on  $x$  kg sekä vaa'an pitempi varsi  $y$  ja lyhempi  $z$ , niin saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} 3 \cdot y = x \cdot z \\ x \cdot y = 3 \frac{1}{3} \cdot z \end{cases}$$

1886.

1.  $\frac{72}{5905}$  naulaa 0,0122 naulaa. Merkitse kahdenmarkkan lantin paino  $x$  naulaksi ja määrää sekä ensimmäisestä että toisesta ilmoituksesta hopean määrät, jotka panet yhtäsuuriksi ja saat yhtälön. Saatu  $x$  arvo jaetaan luvulla 2.

2.  $5\frac{5}{8}\%$ olla. Jos hyöry on  $a$  mk ja  $\%$  on  $x$ , niin ekv. kuuluu:

$$a - \frac{5a}{100} \quad \left(a + \frac{xa}{100}\right) - \frac{10(a + \frac{xa}{100})}{100}$$

3.  $(x-1)(11x+3)$ .

4. 667 ja 1219. Todista, että kahden luvun summan (tahi erotuksen) ja pienimmän yhteisen jaettavan suurin yhteinen tekijä on myös itse noitten kahden luvun s. y. tekijänä! — Lukujen 1886 ja 35351 s. y. t.

on 23. Nyt on kahden luvun ( $x$  ja  $y$ ) tulo = näitten s. y. t. kertaa pienin  $y$  jaettava. Saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x+y & 1886 \\ xy & 23 \cdot 35351. \end{cases}$$

5. Yleensä otetaan puolivuotuisprosentti — puoli koko vuotuisprosentista. Siis on tässä esimerkissä puolivuotuisprosentti  $p$  3. Siis  $1 + \frac{p}{100} \cdot 1,03$  (vuosipuoliskoa kohti). Saamme:

|                                 |         |                 |
|---------------------------------|---------|-----------------|
| Ensim. maksun heti makset. arvo | 600000. | mk              |
| Toisen .. .. .                  | 600000. | $1,03^{-1}$ ..  |
| 3:nnen .. .. .                  | 600000. | $1,03^{-2}$ ..  |
| 4:nnen .. .. .                  | 600000. | $1,03^{-3}$ ..  |
| 75:nnen .. .. .                 | 600000. | $1,03^{-74}$ .. |

Siis:

Koko heti maksettava rahamäärä —

$$600000 (1 + 1,03^{-1} + 1,03^{-2} + 1,03^{-3} + \dots)$$

$$\dots + 1,03^{-74})$$

$$600000 \cdot \frac{1,03^{-75} - 1}{1,03^{-1} - 1} =$$

$$18357000 \text{ (täysissä tuhansissa).}$$

Vastaus: täysissä tuhansissa 18357000 mk.

6. Katso esim. 1) v. 1880! Korkeusviivat ovat saman ympyrän jäniteitä. Miten siis jakavat nämä toisensa?

7. Piirrä mallikuvio ABCD, jossa lävistäjien AC ja BD tekemä kulma DOC  $a$ . Sivut AB DC  $a$  ja AD BC  $b$ . Missä kulmassa O:sta näkyy DC? Millä uralla siis on piste O? Kuinka etäällä on O-piste DC:n keskipisteestä? Millä uralla myöskin siis on O-piste? Se piste, missä nämä ura-ympyrät leikkaa-

vat toisensa on suunnikkaan keskipiste. Miten saadaan itse suunnikas?

8. Myyjä menettää  $\frac{200 d_1}{d+d_1} \%$ . Jos  $k$  on sylinterin korkeus, niin minkä määrän saa ostaja ja mistä määrästä hän maksaa? Kumpi määrä on suurempi ja paljonko suurempi? Mikä yhtälö prosentin saamista varten muodostetaan?

$$9. \sqrt{m^2} : \sqrt{n^2}.$$

10. Sin  $(x + y)$  saa jonkun seuraavista arvoista:  $+\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, +\frac{1}{6}$  tahi  $-\frac{1}{6}$ . (Huomaa, näet, että cos  $x \pm \frac{1}{2}$  ja cos  $y = \pm \frac{1}{2}$ ). Ota selville, missä kvadrantissa mikin vastaus kelpaa!

11. Kolmas sivu on joko  $\sqrt{820} \text{ m} = 28,636 \text{ m}$  tahi  $\sqrt{180} \text{ m} = 13,416 \text{ m}$ . Tehtävä voidaan suorittaa lavenetun Pythagoraan väittämän avulla tahi sen kaavan avulla, joka ilmoittaa alan yksinään sivuissa, tahi trigonometrisesti.

12. Yhdistä annetut pisteet A, B ja C! Etsi kolmioon ABC piirretyn ympyrän keskipiste! Piirrä kohtisuorat AD ja BE kulman C puolittajaa vastaan! Jos kolmion sivut ovat  $a$ ,  $b$  ja  $c$  sekä tunnettu paino  $P$  ja sen osat A:ssa, B:ssä ja C:ssä  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , niin ovat seuraavat seikat voimassa:  $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ . josta  $AD:BE = b:a$ . Ne momentit, joilla voimat  $x$  ja  $y$  vaikuttavat vääntymistä CD:n ympäri, ovat yhtäsuuret: siis  $x \cdot AD = y \cdot BE$ , josta  $AD:BE = y:x$ . Edellisestä ja tästä verrannosta saadaan  $y:x = b:a$ . Kun A-kulman puolittajan suhteen menetellään samoin, saadaan  $z:y = c:b$ . Meillä on siis yhtälöryhmä

$$\begin{cases} P = x + y + z \\ z:y:x = c:b:a, \end{cases}$$

joka ratkaistuna antaa

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \cdot P}{a+b+c} \\ y &= \frac{b \cdot P}{a+b+c} \\ z &= \frac{c \cdot P}{a+b+c} \end{aligned}$$

1887.

1. Vehnäleivän hintaa on alennettava  $1 \frac{2}{3} \%$ olla. Olkoon vehnätynnyrin hinta edellisenä vuonna  $m$  markkaa ja paino  $k$  kg! Mitä maksaa 1 kg edellisenä vuonna? Entä jälkimäisenä? Saadaan ekv.:

$$\frac{m}{k} \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{1,02 \cdot m}{1,01 \cdot k}.$$

2. Olkoot etsittävät luvut  $x_1$  ja  $x_2$ ! Kirjoitetaan näin:

$$\begin{array}{r} x_1 \cdot x_2 \\ \cdot 4 \\ \hline x_2 \cdot x_3 \\ \cdot 5 \\ \hline x_3 \cdot x_4 \\ \cdot 1 \\ \hline x_4 \cdot x_5 \\ \cdot 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Tästä

$$\begin{aligned} x_5 &= 111 \\ x_4 &= 2 \cdot x_5 = 222 \\ x_3 &= 1 \cdot x_4 + x_5 = 333 \\ x_2 &= 5 \cdot x_3 + x_4 = 1887 \\ x_1 &= 4 \cdot x_2 + x_3 = 7881. \end{aligned}$$

Vastaus: Etsittävät luvut ovat 7881 ja 1887.

3. Joko  $6 \%$  ja heti maksettava summa 9100 mk tahi  $4 \%$  ja 9150 mk. Jos  $\%$  on  $x$ , niin 5253 markkan heti maksettava arvo  $k$  saadaan yhtälöstä

$$k + \frac{k \cdot x \cdot 1}{100 \cdot 2} = 5253$$

$x$ :ssä määrättynä. Miten saadaan 2756 markkan heti maksettava arvo? Mikä yhtälö saadaan sitten  $x$ :n määräämistä varten?

4. Toinen lävistäjä on  $y = 22 \text{ m} = 4,690 \text{ m}$  ja ala  $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2 = 2,598 \text{ m}^2$ . Viereiset sivut olkoot  $x$  ja  $y$  sekä etsittävä lävistäjä  $z$ . Yhtälöjärjestelmä on

$$\begin{cases} 1) 2x + 2y = 10 \\ 2) x^2 + y^2 - xy = 4^2 \\ 3) x^2 + y^2 + xy = z^2 \end{cases}$$

Jaa 1) luvulla 2, korota neliöön ja vähennä 2); saat  $xy = 4$ . 3. Tälle tulolle saat toisen arvomuodon, kun 3):sta vähennetään 2). Sitten saat  $z$ , asettamalla  $xy$ :n arvot yhtäsuuriksi. — Miten saat suunnikkaan korkeuden? Saadaan ala  $= \frac{xy\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . — Myöskin trigonometrisesti voidaan tehtävä ratkaista.

5. Säännöllisessä viisikulmiossa ABCDE leikkaavat lävistäjät AC ja BD toisensa pisteessä F. Koska  $\triangle CAD \sim \triangle CDF$  (2 kulmaa toisessa = vastaavat kulmat toisessa; huom.!  $36^\circ$  olevat kehäkulmat siinä ympyrässä, joka on viisikulmion ympäri piirretty), niin  $AC:DC = DC:FC$ . Kolmio CDF on tasakylkinen. Samaten kolmio AFD on tasakylkinen. Saadaan  $DC = DF = AF$ . Siis  $AC:AF = AF:FC$ . — Toinenkin jatkuvaisessa suhteessa tapahtuva jako esiintyy viisikulmiossamme. Leikatkoon lävistäjä BE lävistäjää AC pisteessä G, niin jakautuu AF jatkuvaisessa suhteessa pisteessä G eli siis  $AF:AG = AG:GF$ . Todista se!

6. 1:o Janat AB ja BD asetetaan peräkkäin. Piirrä mielivaltainen ympyrä A:n ja D:n kautta! Jos B:n kautta nyt piirrettäisi toinen jänne GF, ja siis saataisi  $AB:GB = BF:BD$ , sekä kyettäisi piirtämään jänne GF siten, että  $BF = GB$ , niin silloinhan saisimme AB:n ja BD:n keskiproportsionaalin ( $BF = GB$ ). On siis vastattava kysymykseen: miten on B:n kautta piirrettävä jänne, joka tässä pisteessä jakaantuu kahteen

yhtäsuureen osaan? Missä asennossa on sellainen jänne CB:n suhteen, jos C on ympyrän keskipiste?

2:o Janat AB ja AD asetetaan päällekkäin. ( $AB > AD$ ). Piirrä mielivaltainen ympyrä C, joka kulkee A:n ja B:n kautta! Jos jänne AE olisi keskiproportsionaali, siis  $AB:AE = AE:AD$ , niin minkälaiset olisivat kolmiot ABE ja AED? Siis minkälaiset kulmat ABE ja AED? Jos ED jatkettaisi kunnes se kohtaaisi ympyrän kehää toisessa pisteessä F, niin olisivat siis kaaret AE ja AF yhtäsuuret ja siis jänneet AE ja AF yhtäsuuret. Jos nyt piirtäisi janan AC, niin missä asennossa olisivat EF ja AC toistensa suhteen? Saamme siis: piirrä D:n kautta kohtisuora AC:tä vastaan!

7. Korkeus  $= 6,545 \text{ m}$ , pohjan halkasija  $= 7,273 \text{ m}$  ja suun halkasija  $= 8,000 \text{ m}$ . Uuden säiliön tilavuuden suhde vanhan säiliön tilavuuteen määrätään ja saadaan  $= \frac{3200}{331\pi} \cdot \frac{3200}{331\pi}$ . Homologijanojen suhteen kolmas potenssi siis  $= \frac{3200}{331\pi}$ .

8.  $103^\circ 31'$ . Jos kaaren asteluku on  $x$ , niin jänne puolikkaan suhde säteeseen on  $= \sin$  kaaren puolikkaalle ja siis  $\sin \frac{1}{2}x = \frac{2\pi}{4 \cdot 2} \cdot r$ .

9. Sivut ovat  $5,631 \text{ m}$  ja  $14,369 \text{ m}$  ja ala  $21,053 \text{ m}^2$ . Jos sivut ovat  $x$  ja  $y$ , niin 1)  $x + y = 20$  ja cosinusväittämän avulla

$$2) 10^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 31^\circ 21' 36''.$$

Korota 1) neliöön ja vähennä siitä 2), joten saat tulon  $xy$  arvon. Tuntemme siis  $x + y$  ja  $xy$ , joten saamme  $x$  ja  $y$ .

10. Voima on  $1,224\pi \text{ kg} = 3,845 \text{ kg}$ . Paine pohjaa vastaan on

$$13,6 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 0,075^2 \text{ kg}$$

ja se osa sivupintaa vastaan olevasta paineesta, joka tässä tulee kysymykseen, on

$\frac{0,075}{0,4} \cdot 13,6 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (0,075 + 0,15) \cdot 0,4 \text{ kg.}$  (Huom! Kaikki mitat ilmaistu desimetreissä).

## 1888.

1.  $17 + 12\sqrt{2} = 33,971$ . Jaa osottaja ja nimittäjä  $\sqrt{b}$ :llä ja ota uudeksi tuntemattomaksi  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

2. 50 %.

3. 10 %.

4. Juuret ovat  $2\frac{1}{2}$  ja  $-\frac{1}{2}$ . Korota molemmat yhtälön jäsenet neliöön!

5. Ensimmäinen yhtälö kerrotaan  $x$ :llä ja vähennetään toinen yhtälö; saadaan  $yz = x^2$ . Kolmas yhtälö kuuluu nyt

$$x \cdot yz = x \cdot x^2 = x^3 = 1.$$

Jos ensimmäinen yhtälö kerrotaan  $y$ :llä ja jatketaan kuten äsken, saadaan  $y^3 = 1$ . Samaten saadaan  $z^3 = 1$ . Jos lyhyiden vuoksi merkitään kunkin, näistä kolmannen asteen yhtälöistä, juuret  $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = \alpha$ , ja  $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) = \beta$ , niin saadaan seuraavat juuriryhmät

$$\begin{cases} x = 1; 1; \alpha; \alpha; \beta; \beta. \\ y = \alpha; \beta; 1; \beta; 1; \alpha. \\ z = \beta; \alpha; \beta; 1; \alpha; 1. \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} 6. & a' = 12 \text{ m} & a' = 7,5 \text{ m} \\ & b' = 11,5 \text{ m} & b' = 11,5 \text{ m} \\ & c' = 7,5 \text{ m} & c' = 12 \text{ m}. \end{array}$$

Seuraavat yhtälöt saadaan. Ensimmäinen yhtälö

$$a' + b' + c' = 31.$$

Toinen yhtälö saadaan määräyksestä, että uudessa kolmiossa on yksi kulma - B (b:tä vastassa oleva kulma) alkuperäisessä kolmiossa ja että uusi kolmio alkuperäinen kolmio. Saadaan

$$2) a'c' = 90 (-ac).$$

Kolmas yhtälö saadaan vähentämällä seuraavat yhtälöt toisistaan

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ b'^2 &= a'^2 + c'^2 - 2a'c' \cos B \end{aligned}$$

ja on jäännös

3)  $b^2 - b'^2 = a^2 + c^2 - a'^2 - c'^2$ , johon sijoitetaan  $a:n$ ,  $b:n$  ja  $c:n$  arvot.

(Huomaa, vähentäessä, yhtälö 2). Katso esim. 4) v. 1889!

7. Olkoot ne kaksi pistettä A ja B halkaisijalla tai sen jatkeella,  $r$  säde sekä  $k_1$  ja  $k_2$  kohtisuorat A:sta ja B:stä tangenttia vastaan. Jos tangentti leikkaa AB:n jatketta, niin on kyseessä summa; jos taas itse AB:tä, niin on erotus kysymyksessä. Olkoon  $k_1 \geq k_2$ , niin saadaan edellisessä tapauksessa  $k_1 - r = r - k_2$  ja jälkimäisessä  $k_1 - r = r + k_2$ . Nämä saa helposti todistettua, jos tangentin suuntainen suora piirretään ympyrän keskipisteen kautta ja sivuamispisteeseen säde.

8.  $a$  ja  $c$  leikatkaa toisensa pisteessä O. Jos X olisi se piste, jossa  $b$  puolittaisi  $d:n$  suuntaisen suoran osan, joka on  $a:n$  ja  $c:n$  välillä, niin mitenkä jakaisi X:n ja O:n kautta piirretty suora sen osan  $d$ :stä, jota rajoittavat  $a$  ja  $c$ ? Mitenkä siis piste X saadaan?

9.  $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cdot 0,8045$ . Sylinterin vedessä olevan osan läpileikkaus on ympyräsegmentti = ympyräsektori plus sentrikolmio  $\frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$ . Jos sylinterin pituus on

k, on osan volyymi  $= (\frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{r^2\sqrt{3}}{4}) \cdot k$ . Jos siis r on läpileikkauksen säde ja x ominaispaine, on ekv.

$$\pi r^2 k \cdot x = (\frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{r^2\sqrt{3}}{4}) \cdot k.$$

10. 0,08716 koko työstä. Katso esim. 9) v. 1878.

11. Kaaren asteluku on  $42^\circ 56' 30''$  tahi  $(360^\circ - 42^\circ 56' 30'' =) 317^\circ 3' 30''$ . Yhtälö on

$$2 \sin \frac{1}{2} x = \cos x.$$

$$\cos x = \sqrt{3} - 1;$$

josta  
siis

jänne  $= r\sqrt{3} - r$ , jos r on säde. Miten siis jänne piirretään?

12.  $93^\circ 53' 38''$ .

### 1889.

1.  $2\sqrt{a}$ . Supista esimerkissä oleva murtolauseke nimittäjällään!

2. Kullan arvo on kohonnut 40 % ja hopean arvo alentunut  $28\frac{4}{7}$  %. Kun kullan (hopean) arvon kohoaaminen (alentuminen) lasketaan, niin otaksutaan hopean (kullan) arvo olevan sama ennen ja nyt.

3. 30 edellistä laatua ja 50 jälkimäistä. Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} 101\frac{1}{4}x + 100\frac{3}{4}y = 8075 \\ 4x + 4\frac{1}{2}y = 345. \end{cases}$$

4. Juuriryhmät ovat

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 11.5; \\ z = 7.5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7.5 \\ y = 11.5 \\ z = 12. \end{cases}$$

Kerro toinen yhtälö 2:lla, lisää kolmanteen yhtälöön, saat  $(x+z)^2 - y^2 = 248$ , johon sijoitat  $(x+z)$ :n arvo esim. yhtälöstä.

5. Ratkaise yhtälö x:n suhteen! Posit. juuri on

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2} - \frac{p}{2}.$$

Mitenkä x piirretään?

6. Projisoidaan b-sivut (CA ja CA') c-sivulle (c'-sivulle); projektsioonit ovat yhtäsuuret. Nyt sovitetaan lavennettua Pythagoraan teoreemia molempiin kolmioihin ABC ja A'BC, ilmoittamalla a<sup>2</sup>. Eliminoidaan projektsiooni ja saadaan muutamalla yksinkertaisella laskutoimituksella a<sup>2</sup> b<sup>2</sup> = cc'.

7. Piirrä mallikuvio! (Huomaa, että painopiste O jakaa kolmion ABC (AB-tunnettu jana) kärjen C ja AB:n keskipisteen K yhdistysjanan siten, että OK on kolmas osa KC:stä). Jos piirretään O:n kautta suora S, annettu suora L (joka kulkee C:n kautta), niin missä suhteessa jakaa S kaikki K:n ja suoran L väliset janat? Oikean kolmion saamista varten piirretään siis K:sta joku suora, joka leikkaa L:ää, ja jaetaan se osa suorasta, joka on L:n ja K:n välillä niin, että K:n puolinen osa on kolmas osa koko janasta. Jakopisteestä piirretään L:n suuntainen suora; siinä missä tämä leikkaa toista tunnettua suoraa, on kolmion painopiste. Miten jatketaan?

8. Jos r on aseman säde ja s sivuviiva sekä x etäisyttävän ympyrän säde, niin saadaan sylinterin suhteen

$$\pi x^2 = 2\pi r^2 + 2\pi rs$$

ja kartion suhteen

$$\pi x^2 = \pi r^2 + \pi rs.$$

Miten piirretään x?

9. P<sub>1</sub>:n asema olkoon  $\triangle ABC$  ja P<sub>3</sub>:n asema taas  $\triangle DEF$ ; silloin on niillä sama korkeus k. Saadaan

$$P_1 : P_3 = \frac{\triangle ABC}{3} : \frac{\triangle DEF}{3} = k : k = \frac{\triangle ABC}{\triangle DEC} = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2.$$

$P_2$ :lla ja  $P_3$ :lla olkoot asemat  $\triangle ACD$  ja  $\triangle DFC$ ; silloin näilläkin on sama korkeus  $k_1$ . Saadaan  

$$P_2 : P_3 = \frac{\triangle ACD \cdot k_1}{3} : \frac{\triangle DFC \cdot k_1}{3} = \frac{\triangle ACD}{\triangle DFC}$$
Kolmioilla on kummallakin korkeutena  $DF$ :n ja  $AC$ :n väli ja siis kolmioitten suhde  $\frac{AC}{DF}$ . Saamme siis

$$\frac{P_1}{P_3} = \left(\frac{P_2}{P_3}\right)^2 \text{ ja}$$

tästä muutamalla laskutoimituksella (käyttämällä suhteen määritelmää)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_2}{P_3}$$

Jos kolmesivuisen pyramiidimme asemien lukuarvot ovat  $A$  ja  $a$  sekä korkeuden lukuarvo  $k$ , niin tämän pyramiidin volyyymi  $= P_1 + P_2 + P_3 = P_1 + P_3 + \sqrt{P_1 P_3}$   

$$\frac{Ak}{3} + \frac{ak}{3} + \sqrt{\frac{Ak}{3} \cdot \frac{ak}{3}} = \frac{k}{3} (A + a + \sqrt{A \cdot a})$$

10.  $A = 105^\circ$ . Mukavimmin ratkaistaan yhtälö siten, että se korotetaan neliöön:

$$\sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A = \frac{1}{2},$$

josta

$$1 + \sin 2A = \frac{1}{2}$$

ja tästä

$$2A = 210^\circ \text{ tahi } 330^\circ.$$

Toteuttavatko sekä  $105^\circ$  että  $165^\circ$  alkuperäisen yhtälön?

11.  $157,81 \text{ m}^2$ .

12. Olkoon Helsingissä maan vetovoiman kiihtyväisyys  $g$  ja Pariisissa  $g_1$ . Saamme

$$\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_1}} = \frac{24 \text{ tunt.}}{24 \text{ tunt.} - 44 \text{ sek.}} = \frac{86400}{86356}$$

Tästä

$$\frac{g}{g_1} = 1,00102.$$

\* Tässä  $P_1$  ja  $P_3$  otaksutaan lukuarvoiksi.

1890.

1.  $0,53$  penniä. Ekv. on  $83 \frac{1}{3} : 12 \frac{2}{3} = \frac{1}{0,418} : \frac{1}{3,32}$ .
2. Osamäärä on  $a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4$ .
3. Prosentti on 20.
4.  $\frac{1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}$ . Huomaa, että  $(x + \sqrt{2})$  sisältyy tasan  $(x^2 - 2)$ :een.
5.  $AX = \frac{AB}{3}$ . Saadaan geometrinen sarja.
6.  $\frac{AD}{AB} = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 2n}}{2n}$   
 $\frac{AF}{AC} = \frac{n \mp \sqrt{n^2 - 2n}}{2n}$

Yhdistä  $D$  ja  $F$ ! Mitenkä  $ADF$  kolmio suhtautuu  $ABC$ -kolmioon, koska kulma toisessa kolmiossa on kulma toisessa? Monesko osa suunnikkaasta on  $ADF$ -kolmio? Minkälaiset ovat kolmiot  $DBE$  ja  $FEC$  toisiinsa verrattuina? Saadaan kaksi yhtälöä ja kaksi tuntematonta ( $\frac{AD}{AB}$  ja  $\frac{AF}{AC}$ ).

7. Piirretään  $A$ :n,  $B$ :n ja  $C$ :n kautta ympyrä. Todistetaan, että se kulkee myöskin  $D$ :n kautta. (Todistus epäsuora).

8. Piirretään nelikulmioon  $ABCD$  lävistäjät  $AC$  ja  $BD$  sekä etsitään näitten keskipisteet  $L$  ja  $K$ . Pisteiden  $K$ :n kautta piirretään  $EF \parallel AC$  ja pisteen  $L$ :n kautta  $GH \parallel BD$ . Piste  $X$ , jossa  $EF$  leikkaa  $GH$ :ta, on etsitty piste. Todista tämä! (Todistusta varten yhdistä pisteet  $X$ ,  $K$  ja  $L$  nelikulmion kärkien kanssa!). Onko probl. aina mahdollinen?

9. Aseman säde  $= \frac{2}{3} r$  ja korkeus  $3 r$ .

$$10. \sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

Jos  $x$  on siinä kvadrantissa, jossa  $\sin$ :lla ja  $\operatorname{tg}$ :lla on samat merkit s. o. ensimmäisessä tahi neljännessä,

niin on murtolausekkeen eteen pantava plus. Toisessa ja kolmannessa kvadrantissa miinus.

11.  $58^{\circ} 14' 54''$  ja  $31^{\circ} 45' 6''$ .

12. 0,086 mäen koko pituudesta. Olkoon mäki, ylhäältä lukien, AB (s) ja sen keskipiste C (AC = CB) sekä x se osa mäkeä, jonka Otto on suorittanut, kun Kalle on joutunut B:hen. Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on matkojen suhde aikojen neliöitten suhde. (Huom! On luettava kohdasta, jossa alkunopeus = 0, alkaen). Saadaan

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{t^2}$$

jossa T on AB:lle ja t AC:lle kuuluva aika. Tästä

$$t = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

Matkaan CB kuluu siis Kallelta aika:  $T - \frac{T}{\sqrt{2}}$ , jonka saman ajan Otto tarvitsee matkaan x. Saamme:

$$\frac{x}{s} = \frac{(T - \frac{T}{\sqrt{2}})^2}{T^2}$$

## 1891.

- 240 päivän kuluttua. Etsi pienin yht. jaettava!
- Luku on 265.
- $a - b$ .
- Jos m on kok. luku, niin parillinen luku voidaan merkitä  $2m$  ja pariton luku  $2m + 1$ . Voimme siis kirjoittaa  $a = 2m + 1$ . Jos korotetaan toiseen tahi kolmanteen potenssiin, niin näemme tuloksen olevan parittoman luvun.
- 8 miestä ja 24 naista.

## 6.

$$\begin{array}{l} x + \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} \\ y + b - b + b - b \\ x + b + b - b - b \\ y + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} \end{array}$$

7. 6327.6 km. Jatka kaksi sädettä yli maan pinnan 1000 metrillä; näin saatujen loppupisteitten yhdistysjanan pitää olla tangentti, jonka sivuamispisteeseen sitten piirretään säde. Käytä Pythagoraan väitämää!

8. Piirrä lävistäjät! Todista ensin, että sisäänpiirretyn nelikulmion sivut ovat lävistäjien suuntaiset. (Saadaan yhdenmukaisia kolmioita sen perustuksella, että kaksi paria sivuja ovat verrannollisia ja väliset kulmat yhtäsuuret). Vertaa sitten tunnetun nelikulmion kärkikolmioita sisäänpiirretyn suunnikkaan osasuunnikkaihin.

9. Katso vuoden 1875 esim. 3!

10. Jos aseman särmä on s, niin korkeus  $\frac{2}{\sqrt{3}}s$   $\frac{2}{3}s\sqrt{3}$ .

11.  $b = 13,201$  cm;  $c = 15,068$  cm.

12. 720000 kgm.

## 1892.

- 13 tunnissa 20 min:ssä.
- A tarvitsee  $19\frac{1}{5}$ , B 32 ja C 96 päivää. Ensimmäisellä kuuluu  $\frac{12}{x} + \frac{1}{y}$  1. Jatka!
- 6.
- Polynoomi kirjoitetaan muotoon:  
 $(a^4 - c^4) - (3a^2b^2 - 3a^2c^2) + (3b^2c^2 - 3c^4) = (a^2 + c^2)(a^2 - c^2) - 3a^2(b^2 - c^2) + 3c^2(b^2 - c^2) = (a^2 + c^2)(a^2 - c^2) - (b^2 - c^2)(3a^2 - 3c^2)$ , josta lopuksi  
 $(a^2 - c^2)(a^2 - 3b^2 + 4c^2) = (a + c)(a - c)(a^2 - 3b^2 + 4c^2)$ .

5. Kumpikin osa  $= \frac{a}{2}$ . Minimiarvo  $\frac{a^3}{4}$ .

6. Piirrä mallikuvio! Jos etsittävä keskipiste nimetään Y:ksi, niin mitä tiedetään etäisyyksistä AX, BX ja CX?

7. Piirrä mallikuvio! Jos etsittävän suoran leikkauspisteet BC:n, BA:n ja CA:n jatkeen kanssa ovat D, E ja F, niin pitää siis DE EF. Mitenkä jakaa CE-suora kaikkien DF-suoran suuntaisten suorien ne osat, jotka lankeavat kolmion sivujen BC ja AC tahi niitten jatkeitten väliin? Minkä kulman tekevät nämä yhdensuuntaiset suorat BC-suoran kanssa? Oikean kuvion saamista varten piirrä siis suora, joka BC:n kanssa tekee tunnetun kulman! Miten jatketaan? Onko tehtävä aina mahdollinen? Montako ratkaisutulosta?

8. Tunnetut pisteet olkoot A ja B sekä tunnettu ympyrä O. Piirrä A:n ja B:n kautta ympyrä, joka leikkaa O-ympyrää pisteissä C ja D! Merkitse CD:n ja AB:n leikkauspiste E:ksi. Pisteestä E piirretään tangentti (montako?) O-ympyrälle; sivuamispiste olkoon F. Etsittävä ympyrä kulkee A:n, B:n ja F:n kautta. To-

distus kuuluu: Apuympyrästä saamme:  $\frac{DE}{AE} = \frac{BE}{CE}$   
ja tunnetusta ympyrästä  $\frac{DE}{FE} = \frac{FE}{CE}$ . Jos jälkimäinen yhtälö jaetaan edellisellä, saadaan  $\frac{AE}{FE} = \frac{FE}{BE}$ , joka

kuuluu etsittävään ympyrään ja ilmoittaa, että FE on myöskin tämän ympyrän tangentti sekä siis, että ympyrä, joka kulkee A:n, B:n ja F:n kautta, sivuaa O-ympyrää. Tutki tehtävän mahdollisuutta ja ratkaisutulosten määrä!

9.  $9,6 \pi m^3 = 30159 m^3$ . Pyörimisen kautta syntyy kaksoiskartio.

10.  $81^\circ 44' 54''$  ja  $98^\circ 15' 6''$ .

11.  $51^\circ 49' 37''$  ja  $38^\circ 10' 23''$ . (Katso 1880-vuoden esim. 9!)

12. 6 kg. Massa  $= \frac{\text{paino}}{g}$  ja voima  $= \text{massa} \times \text{kiihtyväisyys}$ . Ekv.

$$4 + \frac{4}{g} \cdot \frac{g}{2} \quad x.$$

### 1893. K.

1.  $17 \frac{7}{8}$  tuntia.

2.  $\pm (5a^2 - 3ab + 4b^2)$ .

3. Luku olkoon:  $\dots + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a$ , joka saadaan muotoon  $(\dots + 9999e + 999d + 99c + 9b) + (\dots + e + d + c + b + a)$ . Edellinen sulkumerkkilauseke on aina 9:llä jaollinen. Koko lukumme 9:llä jaollisuus riippuu siis jälkimäisestä sulkumerkkilausekkeesta, joka taas esittää numeroiden summaa. Jos tämä on 9:llä jaollinen, on alkuperäinen lukumme 9:llä jaollinen. Jos taas jälkim. sulkumerkkilauseke, 9:llä jaettaessa, jättää jäännöksen, niin saman jäännöksen jättää alkuperäisenkin luku, kun se 9:llä jaetaan.

4.  $y_1 = 2$ ;  $y_2 = -\frac{1}{2}$ .

5. Ensimmäisen vuoden kylvö oli 0.1 litraa; sadon ja kylvön suhde  $= 8$  eli hän sai kahdeksannen jyvän. Jos edellinen etsittävä  $= x$  ja jälkimäinen  $= y$ , niin

$$\begin{cases} xy^3 = 51,2 \\ xy^5 = 3276,8. \end{cases}$$

6. Jos neliön sivu on a ja suorakaiteen viereisten sivujen x ja y erotus  $=$  annettu jana b, niin yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x - y = b \\ xy = a^2. \end{cases}$$

Kun ratkaistaan, saadaan helposti piirrettävät arvot  $x$ :lle ja  $y$ :lle.

7. Piirrä mallikuvio! Tunnetun pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä olkoon  $a$ , ympyrän säde  $r$  ja etsittävän pisteen etäisyys tunnetusta pisteestä  $x$ ; silloin saadaan

$$x = \frac{(a+r)(a-r)}{2a}.$$

Miten piirretään  $x$ ?

8. Olkoon pallon säde  $R$  ja segmentin aseman säde  $r$ ! Tasasivuisen kolmion korkeusviiva  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Tasasivuisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän (= segmentin aseman) keskipiste on kolmion painopiste, siis

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suorakulmaisesta kolmiosta saapi lopuksi

$$R = \frac{3k^2 + l^2}{6k}.$$

Tarkasta, kelpaako kaava, jos pallosegmentti  $\geq$  puolipallo?

9. 16,26 km ja 15,98 km. Saadaan kolmio, jossa yksi kulma  $68^\circ 4' 13''$  ja toinen kulma  $= 180^\circ - 108^\circ 46' 50'' = 71^\circ 13' 10''$  sekä välinen sivu 11,2 km.

10. Jos otaksutaan, että vaaditaan 425 kgm mekaanista työtä synnyttämään yhden kalorin lämpöä, niin saadaan ekv.

$$\frac{425}{10 \cdot 20} = \frac{1}{x},$$

josta vastaus ( $x$ ) esimerkkiin:  $\frac{8}{17}$  kaloriaa.

## 1893. S.

1. Henkilöitten luku 100 ja koottava rahamäärä 390 mk.

$$2. x^4 + x^3y - 43x^2y^2 + 23xy^3 + 210y^4.$$

$$3. x = 62; y = 46; z = 34.$$

$$4. 50\%.$$

5.  $x_1 = 6$  ja  $x_2 = 1$ . Yhtälö kirjoitetaan muotoon  $6^x + \frac{1}{6^x} = \frac{7}{6}$ , jossa uutena tuntemattomana käytetään  $y = 6^x$ .

6. Olkoon tasasivuisen kolmion PRS sivu  $s$  ja mieltävaltainen piste  $A$  olkoon PR-kaarella sekä AP  $a$ , AS  $b$  ja AR  $c$ ! Kolmiosta PAR saadaan

$$1) s^2 = a^2 + c^2 + ac$$

ja kolmiosta SAR

$$2) s^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

(Katso 1885 A esimerkin 9 vastausta!) Yhtälöistä 1) ja 2) saadaan

$$b = a + c.$$

7. 4:1. Kolmiossa ABC olevan BC:n suuntaisen transversaalin DE jakaa ympyrän kehä kahteen yhtäsuureen osaan pisteessä F. Miten jakaa AF-suora BC:n? Monesko osa DF on AD:stä? Miten jakaa DF kolmion AFB hypotenuusan AB?

$$8. \text{Tilavuus } \frac{2947}{25} \text{ m}^3 = 36.93 \text{ m}^3 \text{ ja sivupinta } \frac{487\sqrt{34}}{25} \text{ m}^2 = 35,17 \text{ m}^2.$$

$$9. A = 49^\circ 14' 14''; \text{ ala } = 59313 \text{ m}^2.$$

$$10. 9,818 \text{ metriä sek:ssa.}$$

## 1894. K.

1. Ensimmäisenä vuonna kulutti lamppu 20 litraa ja toisena 15 litraa. Ensimmäiseltä vuodelta jäi säästöä 100 litraa. Ekv. on

$$\frac{24750}{22,5} - 50x + \frac{24500}{25} = 72 \cdot \frac{3}{4} x.$$

2. 40 m.

3.  $(2x - ay + y)(3x + ay + 2y)$ . Aseta annettu polynomi  $= 0$  ja ratkaise näin saatu yhtälö  $x$ :n suhteen, pitämällä  $y$ :tä tunnettuna.

4. 11,72 vuodessa. Yhtälö on  $k \cdot 1,03^{2x} = 2k$ , jossa  $x$  on vuosimäärä.

5.  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  (kulma A yhteinen ja sen viereiset sivut verrannolliset  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$  2), josta  $\frac{DE}{BC} = 2$ .

6. Saamme pitemmän sivun arvoksi  $x = \frac{a}{4} + \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 - b^2}$  ja lyhemmän sivun arvoksi  $y = \frac{a}{4} - \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 - b^2}$ . Mitenkä  $x$  ja  $y$  piirretään?

$x$ :n ja  $y$ :n arvoista näkee, että tehtävä on mahdollinen, jos  $\frac{a}{4} \geq b$ .

7.  $\frac{\sqrt{2}}{12} \text{ dm}^3$   $0,118 \text{ dm}^3$ . Missä pisteessä kohtaa pyramiidimme (tetraëderin) korkeus asemaa? (Katso 1893 K esim. 8!)

8. 712 metriä.

9.  $17^\circ 6' 52''$  tahi  $72^\circ 53' 8''$ . Mikä jaksoksi on otettava? (Katso 1889 esim. 10!)

10. Pendelit ovat tehneet 24, 16 ja 9 heilahdusta.

Ensinnä pendelin heilahdusaika  $= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi \sqrt{144}}{\sqrt{g}} = \frac{12\pi}{\sqrt{g}}$ . Laske toistenkin pendelien heilahdusajat. Sitten saadaan, että näitten suhde  $= 12 : 18 : 32$ . Missä suhteessa ovat heilahdusten määrät samassa ajassa heilahdusaikoihin?

1894. S.

1. 72,7 %. Jos seosta on  $a$  kg, niin montako kg on alkohoolia ja montako vettä? Montako litraa siis kumpaakin? Miten kuuluu yhtälö?

2.  $x = 4$ ;  $y = 12$ .

3.  $x = 15$ ;  $y = 62$ .

4. 12 km tunnissa. Olkoon kummankin tavarajunan nopeus  $x$  km tunnissa ja kohdatkoon matkustajajuna vastaan tulevan tavarajunan  $y$  km:n ja saavuttakoon toisen tavarajunan  $z$  km:n päässä A:sta. Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} z - y = 1 \\ 36 - 36 = 2 \\ y = 24 - y \\ 36 = x \\ z = z - 24 \\ 36 = x \end{cases}$$

5. Jaa asemakulmat kahteen yhtäsuureen osaan! Miten jatketaan? Todista!

6. Olkoot ympyröitten keskipisteet A ja B sekä niitten sivuamispisteet asemalla C ja D. Todista, että  $\triangle ACX \sim \triangle XDB$ ?

7. Piirrä pisteeseen P ympyröitten yhteinen tangentti, joka pisteessä U leikkaa RS-suoraa (S lähempänä kuin R tuota U-pistettä). Merkitse:

$$\angle UPQ = a; \angle UQP = b;$$

$$\angle UPS = c; \angle URP = d.$$

Nyt saadaan

$$a = b \text{ (vastaavat PQ-kaarta)}$$

$$c = d \text{ ( » PS- » )}$$

Vähentämällä saapi

$$a - c = b - d.$$

Nyt on  $a - c = \wedge SPQ$ , ja  $b = d + \wedge RPQ$ , josta  $b - d = \wedge RPQ$ . Tästä seuraa väitös. --- Miten todistetaan, jos RS on P:n kantta piirretyn tangentin suuntainen?

8. Suun halkaisija on  $\sqrt[3]{\frac{384}{95\pi}} \text{ dm} = 1,09 \text{ dm}$ , pohjan halkaisija  $1,63 \text{ dm}$  ja korkeus  $1,36 \text{ dm}$ .

9.  $B = 44^\circ 3' 51''$ ;  $C = 27^\circ 43' 27''$  ja  $c = 27,426 \text{ cm}$ .

10.  $143,9 \text{ cm}$ . Aukon halkaisija olkoon AB ( $= 6 \text{ dm}$ ), jonka keskipisteestä C on piirretty ylöspäin kohtisuora CD ( $= 5 \text{ dm}$ ) ja alaspäin kohtisuora CE ( $= 10 \text{ dm}$ ); silloin on D loistava piste ja E valoympyrän keskipiste; valoympyrän halkaisija olkoon FG, joka  $\parallel$  AB. Pisteeseen A piirretään kohtisuora AB:lle ja jatketaan sitä, kunnes se kohtaa FG:tä pisteessä H. Merkitään tulokulma  $\alpha$ :ksi ja taitekulma  $\beta$ :ksi. Saadaan

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1,33 \\ \sin \alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{3}{\sqrt{34}} \end{cases}$$

Näitten ekvien avulla saadaan  $\beta$ . Sitten otetaan

$$\frac{FH}{AH} = \frac{FH}{10} = \operatorname{tg} \beta.$$

Miten jatketaan?

## 1895. K.

1. 25 % kvartsia ja 75 % maasälpää. Jos prosentit ovat  $x$  ja  $y$ , saadaan

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ x + \frac{64y}{100} = 73. \end{cases}$$

2. Kirjoita luvut samanlaiseen muotoon kuin 1893. K esim. 3) ja laske yhteen, niin huomaat, että voit tehdä aivan saman johtopäätöksen kuin siinäkin.

$$3. \quad x^2 - 12x + 32 = 0.$$

4. 31,49 vuoden kuluttua. Jos  $a$  mk on tontin hinta ja  $x$  on vuosimäärä, niin kuuluu ekv.

$$\frac{6a(1,045^x - 1)}{100(1,045 - 1)} = a \cdot 1,045^x.$$

5. Saadun ekv:n juuret ovat  $a + \frac{a}{\sqrt{2}}$  ja  $a - \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Vain jälkimäinen hyväksytään (minkätähden?). Vastaus kuuluu:  $a(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$  metriä  $= 0,293 a$  metriä.

6. Olkoon ympyrän A:n kaari piirretty kolmion sivulle BC! Piste A ja kolmion sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste P yhdistetään B:hen ja C:hen. Oetaan kolmioon joutuvalla BC-kaarella mielivaltainen piste X, joka myös yhdistetään B:n ja C:n kanssa.

Nyt on kehäkulma  $X = \frac{360^\circ - A}{2}$  eli kaari BXC on niitten pisteitten ura, joista BC näkyy kulmassa  $\frac{360^\circ - A}{2}$ . Toiselta puolen saadaan kolmiosta BPC, että  $P = 180^\circ - (\frac{B}{2} + \frac{C}{2}) =$  olettamuksen  $A = B + C$

mukaan  $= 180^\circ - \frac{A}{2} = \frac{360^\circ - A}{2}$ . Siis löytyy piste P ympyrän kaarella, jonka keskipiste on A.

7. Jatka ED ja GF, kunnes leikkaavat toisensa pisteessä H, yhdistä H pisteihin B ja C sekä piirrä H:sta suora A:n kautta siksi, että se leikkaa BC:tä pisteessä K. Suorien CE ja BH leikkauspiste olkoon L sekä suorien BG ja CH leikkauspiste M. Nyt koetetaan todistaa, että kulmat K:ssa, L:ssä ja M:ssä ovat suoria, josta seuraa, että HK, CL ja BM ovat BHC-

kolmion korkeusviivoja, mitkä kuten oppikirjasta tiedetään, leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Toistutus tapahtuu yhdenmukaisten kolmioitten avulla. (Helpoimmin käy todistus, jos merkitsee ne janat, jotka ovat yhtä suuret, samalla pienellä kirjaimella.)

8.  $\sqrt{\frac{2}{9\pi}}$  dm = 2,66 cm. (Huom! Jos paino on määrätty kg:ssa, niin on pituus määrättävä dm:ssä).

9. 8,97 metriä.

10. 99,561 kg. Saamme:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^3 & - & 0^\circ - 760 \text{ mm} - 1,293 \text{ kg} \\ 380 \text{ m}^3 & - & 0^\circ - 760 \text{ mm} - 380 \cdot 1,293 \text{ kg} \\ 380 \text{ m}^3 & - & 0^\circ - 700 \text{ mm} - \frac{700 \cdot 380 \cdot 1,293}{760} \text{ kg} \end{array}$$

$$380 \text{ m}^3 - 77^\circ - 700 \text{ mm} - \frac{700 \cdot 380 \cdot 1,293}{760 \left(1 + \frac{77}{273}\right)} \text{ kg.}$$

Mitenkä nyt kantovoima määrätään?

## 1895. S.

1.  $4\frac{3}{4}\%$ .

2.  $\frac{1}{2}$  ja  $-1\frac{2}{3}$ . Millä on yhtälön vasenpuolinen jäsen jaollinen?

3. 180 grammaa edellisestä ja 120 grammaa jälkimmäisestä. — Kullan yhtälö kuuluu

$$\frac{750x}{1000} + \frac{950y}{1000} = \frac{830 \cdot 300}{1000}$$

Miten kuuluu kuparin ekv.?

4. A 120 km ja B 96 km.

5. Piirrä säteet kateeteilla oleviin sivuamispisteihin!

6. Voiko piste X olla kolmion ulkopuolella? Jos X on kolmion sisällä, niin kuinka suuret ovat X:ssä

olevat kulmat? Missä kulmassa näkyvät siis kolmien sivut X:stä? Miten siis X löydetään?

7. Piirrä mallikuvio! Saadaan kuvioon suorakulmaisia kolmioita, joista kussakin yksi kulma =  $30^\circ$  ja toinen kateetti = x (etsittävän kolmion sivu). Suuretko siis toinen kateetti ja hypotenuusa? Mikä on näitten summa? Miten piirretään?

8.  $4,222 \text{ m}^3$ . Huoneesta juoksee sekunnissa  $\pi r^2 k \text{ cm}^3 = \pi \cdot 4^2 \cdot 140 \text{ cm}^3$  ilmaa. Siis paljonko 10 min:ssä?

9. 6,351 hehtaaria. Jaa nelikulmio lävistäjällä siten kahteen kolmioon, että toisen kulmaksi tulee annettu kulma. Laske ensin sen kolmion ala, jossa annettu kulma on, sekä määrää lävistäjän pituus. Nyt siis tunnetaan toisessa kolmiossa kaikki sivut (280 m, 300 m ja lävistäjä), joitten avulla saadaan toisenkin kolmion ala. Kolmioitten alojen summa = pellon ala.

10.  $72\frac{1}{9}$  grammaa. Kupari luovuttaa 5,7 kaloriaa.

## 1896. K.

1. Ensimmäisestä seoksesta 750 g, toisesta 800 g ja kolmannelle 450 g. Muodosta kuparin, sinkin ja nikkelin yhtälöt! (Katso 1895. S. esim. 3!)

2. Toinen 30 ja 40 min:ssä.

3.  $a^3b - b^3a = ab(a + b)(a - b)$ .

Nyt voi tapahtua, että a on tasan jaollinen luvulla 3 taikka jättää jäännöksen 2 tai 1. Samaten on b:n suhteen. Tämän perustuksella voimme kirjoittaa:

a = joko 3 m tai (3 m + 1) tai (3 m + 2),

b = joko 3 n tai (3 n + 1) tai (3 n + 2).

Jos nyt kukin a:n arvo vuorotellen otetaan yhdessä kunkin b:n arvon kanssa, saadaan yhdeksän paria, jotka parit vuorostansa sijoitetaan lausekkeeseemme:

ab (a + b) (a - b). Silloin näkee, että aina saa luvun 3 tekijäksi, josta seuraa väitys.

4. Luvut ovat 0,52; 1,3 ja 3,25, tahi 3,25; 1,3 ja 0,52. Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} 1) \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \\ 2) x + y + z = 5,07 \\ 3) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3. \end{cases}$$

(Ensim. yhtälö saadaan määräyksestä, että luvut muodostavat geometrisen sarjan). Ensin etsitään y:n arvo senraavalla tavalla: 3) kuuluu  $yz + xz + xy = 3xyz$ , johon 1):stä sijoitetaan x:n sijaan  $y^2$  ja saadaan  $yz + y^2 + xy = 3y^3$  eli  $y(z + y + x) = 3y^3$ , jossa sulkumerkkilauseke 2):n mukaan on 5,07. Saadaan  $5,07 y = 3y^3$ , josta  $5,07 = 3y^2$ , koska y ei voi olla nolla. Kun y on ratkaistu, määrätään x ja z ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä.

5. Mitä tiedät kohtisuorien suunnasta verrattuna kolmion sivujen suuntaan? Etsi kulmien suuruudet niissä pikku kolmioissa, jotka piirustuksen kautta syntyvät!

6. Olkoot annettuina jana a (= sivu) ja jana s (= lävistäjien summa) sekä kulma  $\alpha$ . Piirrä ensin kolmio ABC, jossa  $AB = a$ ,  $AC = \frac{s}{2}$  ja  $\angle C = \frac{\alpha}{2}$ . Sitten piirretään B:stä suora AC:tä O-pisteessä leikkaamaan siten, että  $\angle OBC = \frac{\alpha}{2}$ . Silloin on O etsittävän suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste,  $\angle AOB = \alpha$ .  $AO + OB = \frac{s}{2}$  ja  $\triangle AOB$  yksi niistä kolmioista, joihin lävistäjät jakavat suunnikkaan. Jatka! Todista!

7. a) Piirrä mallikuvio. Ympyröitten keskipisteet olkoot O ja P ja niitten leikkauspiste A sekä A:n kautta piirretty etsittävä sekantti, joka leikkaa ympyröitä pisteissä B ja C;  $AB = AC (= x)$ . Piirrä O:sta, P:stä ja A:sta kohtisuorat BC:tä vastaan! Miten jakaantuvat AB ja AC? Miten OP? Miten siis etsittävä sekantti piirretään?

b) Piirrä ympyröiden leikkauspiste sisäpuolisena mukaisuuden pisteenä ympyrä, joka on jommankumman annetuista ympyröistä kanssa perspektiiviasennossa ja yhtäsuureksi tämän kanssa. Jatka.

8. 14,44 cm. Ekv. on

$$s \left( \frac{4 \pi \cdot 8^3}{3} - \frac{4 \pi x^3}{3} \right) \cdot 8,8 = 5000,$$

jossa x on ontelon säde.

9. Koko rata on 7264,9 metr. Olkoon rata = suora osa AC + ympyrän kaari CD + suora osa DB. Olkoon lisäksi ympyrän kaaren keskipiste O. Jatketaan AC ja BD kunnes kohtaavat toisensa pisteessä E. Kolmiosta ABE saadaan  $\angle E = 99^\circ$ ,  $AE = 3563,25$  m ja  $BE = 3996,10$  m. Kolmiosta OED saadaan  $\frac{ED}{1000} = \cot 99^\circ = \cot 49^\circ 30'$ , ja tästä  $ED = 854,08$  m, joka myös on EC:n pituus. Nyt määrätystä arvoista saadaan vähennyslaskun avulla radan suorat osat AC ja BD. Radan käyrän osan määräämistä varten muodostamme

$$\frac{CD}{2\pi \cdot 1000} = \frac{\angle COD}{360^\circ} = \frac{81^\circ}{360^\circ}$$

josta  $CD = 1413,71$  mtr.

10. Vesi tunkeutuu putkeen 284,7 millimetrin korkealle. Jos tämä korkeus merkitään x:llä, saadaan ekv.

$$\frac{13,6 \cdot 760 + (2000 - x)}{13,6 \cdot 760} = \frac{2000}{2000 - x}$$

# 1896. S.

1. 112 mk 50 p. Ekv. on

$$\frac{x \cdot 4}{100} = \frac{100 \cdot 4 \frac{1}{2}}{100}$$

2. 3 tunnissa. Ekv. on

$$\frac{x}{9 \cdot 280} + \frac{x}{\frac{9}{4} \cdot 280} + \frac{x}{280} = 1,$$

jossa x on minuuttimäärä, missä säiliö täyttyy, kun kaikki kolme torvea on auki.

$$\begin{array}{rcl} 3. & x & 12 \quad 5 \quad -12 \quad -5 \\ & y & 5 \quad 12 \quad -5 \quad -12. \end{array}$$

4. 24 vuoden kuluttua. Ekv. on

$$10000 = 250 \cdot \frac{1.04^{t+1} - 1}{1.04 - 1}$$

5. Koska etsittävän kolmion ei tarvitse olla yhdenmukainen annettujen kolmioitten kanssa, niin pane annetut kolmiot vierekkäin siten, että syntyy joku monikulmio, joka sitten muutetaan kolmioksi.

6.  $(2\sqrt{3} - 3) R = 0.4641 R$ . Jos pienten ympyröiden keskipisteet yhdistetään, syntyy tasasivuinen kolmio, jonka painopisteessä on ison ympyrän keskipiste. Määrää siis korkeusviiva ja ota siitä  $\frac{2}{3}$ , joten saat ison ympyrän keskipisteen etäisyyden kunkin pienen ympyrän keskipisteestä!

7. Yhdistyssuoran jommankumman päätepisteen kautta piirretään aseman suuntainen suora.

8.  $254^\circ 33' 30''$ . Kartion sivuviiva (= ympyräsektorin säde) olkoon s ja kartion aseman säde = r. Saadaan  $r = \frac{s}{\sqrt{2}}$ . Siis kartion aseman kehä (= sektorin kaari)  $= 2\pi r = \pi s \sqrt{2}$ . Nyt on

$$\frac{\pi s \sqrt{2}}{2\pi s} = \frac{x^\circ}{360^\circ},$$

jossa x kysytään.

9.  $54^\circ 44' 8''$  ja  $35^\circ 15' 52''$ . Huomaa, että suoran kulman kärjestä piirretty kohtisuora on niitten osien keskiproportsionaali, joitten suhde toisiinsa on  $= 1:2$ .

10. 19,81 metriä sek:ssa. Ekv.

$$20 = \frac{c^2}{5.9.84},$$

jossa c on alkunopeus.

# 1897. K.

1.  $4\frac{2}{5}\%$  Osakkeita ostettiin 5236 markalla ja saatiin niitä siis 11 kappaletta.

2. Koska vastakkaiset kulmat ovat toistensa supplementtikulmia, niin nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä. Piirrä tämä ympyrä? Piirrä sitten toinen lävistäjä = toinen lävistäjä (= kolmion pisin sivu)! Montako ratkaisutulosta? Saatu nelikulmio on muuten puolisuunnikas.

3. Yhdistä ympyröiden keskipisteet O ja P keskenään sekä A:n ja B:n kanssa. Saadaan  $\triangle CBD \sim \triangle OAP$  (huom! kehäkulma = samaa kaarta vastaa- van sentrikulman puolikas), josta väitös.

4. Ala  $= \frac{2r_1 r_2 \sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}$ , kun  $r_1 > r_2$ . Ulkopuoliset tangentit leikatkoon toisensa C-pisteessä ja sisäpuolista

tangenttia pisteissä A ja B. Tangentin CB sivuamis-  
piste O-ympyrän (r,-säteisen ympyrän) kanssa olkoon  
E ja P-ympyrän kanssa F. Suora AB sivutkoon ympyröitä pisteessä D. Nyt yhdistetään O ja C sekä piirretään säteet E- ja F-pisteihin. Saadaan  $\triangle CEO \propto \triangle CDB \propto \triangle CFP$ , joitten avulla saadaan kolmion ABC korkeus CD ja aseman puolikas BD määrättyiksi.

5. 3:4:5. Koska voitosta A saa 3 osaa, B 2 osaa ja C 1 osan, niin A:lle tulee voitosta 50 % ( $= \frac{3}{3+2+1}$ ). B:lle 33  $\frac{1}{3}$  % ja C:lle 16  $\frac{2}{3}$  %. Koska A sai »päältä» 40 % voitosta ja B 20 %, niin jäljellä oleva osa voitosta tulee jaetuksi A:n, B:n ja C:n kesken suhteessa 10 % : 13  $\frac{1}{3}$  % : 16  $\frac{2}{3}$  % = 3:4:5, joka esimerkin mukaan ilmoittaa myöskin A:n, B:n ja C:n liikkeeseen sijoittamien rahamäärien suhdetta. — Tehtävän saa myös suoritetuksi yhtälöitten avulla.

6. Olkoot suorakaiteen sivut a ja b, joista  $a > b$ . Jos pelti taivutetaan b:n suuntaisesti ja x on taivutetun osan korkeus, saadaan ekv.

$$b(a - 2x)x = m \text{ (maksimiarvo), josta } m = \frac{a^2b}{8}, \text{ jolloin } x = \frac{a}{4}.$$

Jos taas pelti taivutetaan a:n suuntaisesti, saadaan

$$\begin{aligned} & a(b - 2x)x = m, \\ & \text{josta} \\ & m = \frac{ab^2}{8}, \text{ jolloin } x = \frac{b}{4}. \end{aligned}$$

Koska näistä maksimiarvoista  $\frac{a^2b}{8}$  ja  $\frac{ab^2}{8}$  edellinen on suurempi, sillä  $a > b$ , niin on siis pelti taivutettava pienemmän sivun suuntaisesti ja siten, että taivutetun osan korkeus on pitemmän sivun neljäsosan suuruisen

7. Suurempi luku on 3. Pienempi luku on joko  $\frac{1}{3}$  tahi  $-\frac{1}{3}$ , riippuen siitä, kummanko yhtälön  $9x^2 - 54x + 80 = 0$  juurista ottaa lukujen summaksi ja kummanko eroitukseksi?

8. 61,576 neliometriä.

9. Suurin kulma on  $90^\circ$  ja pienin korkeus 13,44 cm.

10. 3,5 m sek:ssa. Tässä tunnetaan alkunopeus 2,1 m sek:ssa, matka 0,8 m ja kiihtyväisyys  $-\frac{9,8}{2}$  m sek:ssa, joka viimeksimainittu saadaan siitä, että kalteuskulma  $30^\circ$ ; loppunopeutta kysytään.

## 1897. S.

1. 30 mk halvemmaksi. Laudoituksen tarvitaan 375 m<sup>2</sup> lautaa.

2. Mikä on niitten pisteitten ura, joista AB näkyy suorassa kulmassa? Koska D:stä piirretty suora DC jakaa D:n vastaisen sivun osiin, jotka ovat verrannolliset D:n viereisiin sivuihin, niin kuinka suuret ovat kulmat ADC ja CDB? Miten siis kolmio ADB piirretään? (Katso 1902. K. esim. 2!)

3. Saadaan ensiksi  $\triangle ABE \propto \triangle ACD$  (todista!), josta sitten helposti väitös.

$$4. \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3} = \frac{2,6207413}{3} = 0,8735804.$$

5. 4410 mk. Jos x on edellisenä vuonna maksettava osa pääomasta, on yhtälö

$$\frac{8200 \cdot 5 \cdot 1}{100} + x = \frac{(8200 - x) \cdot 5}{100} + (8200 - x).$$

6.  $r\sqrt{2}$ . Suunnikas on siis neliö. Jos  $x$  on ympyröiden keskipisteiden väli, niin

$$x\sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad m \text{ (maksimiarvo).}$$

7.  $36x^2 - 1 = 0$ . Annetun yhtälön juuret ovat  $\frac{1}{2}$  ja  $\frac{1}{3}$ : siis etsittävän juuret ovat  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$  ja  $(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})$ .

8.  $36^\circ 52' 11''$  ja  $53^\circ 7' 48''$ . Mikä on jakso?

9. 326,7 mm. Jos kolmion kolmas kärkipiste on C ja ympyrän keskipiste O, niin mikä etäisyyksistä AO, BO ja CO kysytään? Mitkä osat AOB-kolmiossa tunnetaan ja mikä etsitään?

10. 764 mm. Edellisellä kerralla olkoon putkessa olevan ilman paine  $= b_1$  ja jälkimäisellä  $= b_2$  sekä  $x$  etsittävä barometrikorkeus, niin yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} 260 + b_1 = x \\ 44 + b_2 = x \\ b_1 : b_2 = 161 : 230. \end{cases}$$

## 1898. K.

1. 0,75 mm. Määrää rautalankojen (sylinterien) tilavuudet, joiden suhde  $=$  painojen suhde.

2. Jos etsittävä jana on  $x$ , niin saadaan yhtälö

$$\frac{x}{x-a} = \frac{x-a}{a},$$

jossa  $a$  on pienempi osa.

Saadaan

$$x_1 = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2} \text{ ja } x_2 = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}.$$

Kelpaavatko sekä  $x_1$  että  $x_2$ ? Minkätähden  $x_2$  ei kelpaa? Miten  $x_1$  piirretään?

3. ABC-kolmion AB-sivulle, jänteenä on piirretty kaksi ympyränkaarta: toinen, jonka keskipiste on O, sivuaa AC:tä ja toinen, jonka keskipiste on P, sivuaa BC:tä. Piirrä ABC-kolmioon korkeusjana CK, säteet OA ja PB sekä sentraali OP, joka leikkaa AB:tä pisteessä L. Nyt voidaan todistaa, että  $\triangle OAL \sim \triangle ACK$  ja  $\triangle PBL \sim \triangle BCK$ , (2 kulmaa toisessa kolmiossa vastaavat kulmat toisessa). Tästä väitös. (Huomaa, että  $AL = BL$ ).

4. 50' cm. Mikä verranto vallitsee suorakulmaisen kolmion sivujen ja korkeusviivan välillä?

5.  $3\frac{1}{3}\%$ . Olkoon  $a$  mk se rahamäärä, joka yhden kuukauden kuluttua on maksettava! Silloin on alennus  $\frac{a \cdot 6 \cdot 8}{100 \cdot 12}$  mk ja loppusumma  $(a + \frac{a \cdot 6 \cdot 8}{100 \cdot 12})$  mk, josta mainittu alennus on  $x\%$ , jota juuri kysytään.

6. Nuorin 10400 mk, keskimäinen 11700 mk ja vanhin 14400 mk.

7. 7029 mk. Ekv. on

$$x = 1,04^{25} \frac{450(1,04^{25} - 1)}{1,04 - 1},$$

jossa  $x$  on talletuksen määrä.

8.  $30^\circ \pm n \cdot 360^\circ$  tahi  $150^\circ \pm n \cdot 360^\circ$ . Saadaan  $\sin x = \frac{1}{2}$  tai  $\sin x = -2$ . Kelpaako jälkimäinen?

9. 15 cm. Olkoon prisman toinen asema  $A_1 B_1 C_1$ . Määrää ensin sivutasojen lävistäjät  $AB_1$  ja  $AC_1$ !

10. 36 metriä syvälle. Kappaleen saapuessa veden pinnalle on sen nopeus  $\sqrt{2g \cdot 12}$  metriä sek:ssa.

Meriveden nostovoiman kiihtyväisyys  $\left(\frac{1,028}{0,771} - 1\right) g = \frac{g}{3}$  ja siis nopeus  $= \sqrt{2 \cdot \frac{g}{3} \cdot x}$  metriä sekunnissa, kuljettuaan matkan  $x$ . Kappaleen liike vedessä on tasaisesti hidastuva, jossa maan vetovoima ja veden

nostovoima vastustavat toisensa ja tunkeutuu kappale veteen, kunnes loppunopeus on nolla. Ekv. on

$$\sqrt{24g} - \sqrt{2 \cdot \frac{g}{3} \cdot x} = 0.$$

Vertaa oppikirjoissa oleviin pystysuorasti ylöspäin tapahtuvan heittoliikkeen kaavoihin!

### 1898. S.

1. 5 grammaa. Paljonko puhdasta vettä on 1000 grammassa Marienbader vettä? Montako grammaa glaubersuolaa vastaa tätä puhtaan veden määrää?

2. Jos  $a$  on annetun neliön sivu ja  $x$  etsittävän kolmion sivu niin on ekv.

$$\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = a^2,$$

$$\text{josta } x = \sqrt{\frac{4a^2}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot a\sqrt{3}.$$

Miten  $x$  piirretään?

3. Olkoon piste, jossa alkuperäisen ympyrän kehä leikkaa toisen ympyrän jängteen,  $C$ ! Missä asennossa tätä jännettä vastaan on  $AC$ ? Miten siis mainittu jänne tulee jaetuksi?

4. Suhteeseen  $6:1$  jaetun sivun viereinen kulma on  $90^\circ$  ja kolmas kulma  $30^\circ$  —  $ABC$ -kolmion  $AB$ -sivu olkoon jängteenä ympyrässä, joka leikkaa  $\widehat{CA}$ :n siten, että  $CD:DA = 6:1$  ja  $CB$ :n siten, että  $CE:EB = 3:11$ . Näistä saamme

$$CD:CA = 6:7$$

$$CE:CB = 3:14$$

Sekanttien osien verrannollisuudesta seuraa, että

$$CD:CE = CB:CA$$

Kolmesta viimeksisaadusta verrannosta saadaan  $CB = 2 \cdot CA$ . Jos  $CB$ :n keskipiste  $K$  yhdistetään  $A$ :han, niin minkälainen kolmio on  $ACK$ ? Mitenkä suuret sen kulmat? Kuinka suuri on kulma  $AKB$ ? Minkälainen kolmio  $AKB$ ? Kuinka suuri siis kulma  $B$ ? Kuinka suuri kulma  $CAB$ ?

5. 14 km tunnissa. Miksi ei 1 kra tunnissa kelpaa?

6. Glyseriiniä  $55 \text{ cm}^3$  tahi  $69,3 \text{ g}$ .

Vettä  $75 \text{ cm}^3$  »  $75,0 \text{ g}$ .

Alkohoolia  $70 \text{ cm}^3$  »  $56,7 \text{ g}$ .

Olkoon näitä aineita  $x$ ,  $y$  ja  $z \text{ cm}^3$ ! Yhtälöryhmä on

$$x + y + z = 200$$

$$1,11(x + y) + 0,81z = 201$$

$$1,11(x + y) = 1,26x + 1 \cdot y.$$

7. Logaritmit olkoot

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

Jos logaritmijärjestelmän kantaluku on  $a$ , niin ovat itse luvut

$$\text{eli } a^a, a^{a+d}, a^{a+2d}, a^{a+3d}, \dots$$

$$a^a, a^a \cdot a^d, a^a \cdot a^{2d}, a^a \cdot a^{3d}, \dots$$

siis geometrinen sarja, jossa ensimmäinen termi on  $a$  ja suhdeluku  $a^d$ .

8.  $\frac{8}{3}\pi \text{ dm}^3 = 8,378 \text{ dm}^3$ . Laske ensin niitten eheidän pallosegmenttien tilavuudet, jotka jäävät jällelle, kun koko pallosta otetaan pois etsittävä pallon osa.

9.  $c = 0,37 \text{ cm}$ .

10.  $4284 \text{ kg}$ . Esimerkissä otaksutaan, että  $9 \text{ cm}$ :n ja  $6 \text{ cm}$ :n painumiset luetaan pitkin lastiveneen korkeussärmää.

1. Kerroksen, jolla kappale päällystetään, tilavuus saadaan tarkkaan lasketuksi siten, että kerrosta pidetään kahden samanlaatuisen kappaleen erotuksena. Tässä esimerkissä siis hopeakerros = hopeoidun sylinterin ja hopeoimattoman sylinterin erotus. Tämän mukaan saa, että sylinterin koko pinnan hopeoimiseen menee 93,022 grammaa. — Toisinaan lasketaan tämä esimerkki niin, että kerroksen tilavuus = kerroksen paksuus kertaa sylinterin koko pinta-ala. Näin menetellen saisi 93 grammaa. Tämä arvo ei ole katsottava oikeaksi.

2. Piirrä ympyröitten keskipisteitten kautta suora, joka ympyröitten kehii leikkaa paitsi sivuamispisteessä T myöskin pisteissä A ja B. Yhdenmukaisten kolmioitten avulla voidaan todistaa, että pienemmän ympyrän kehä jakaa suuremman ympyrän, pisteestä T piirretyt, jänteet suhteeseen TA:TB.

3. Jos pisteestä piirretään mielivaltainen sekantti, niin mitä tiedetään pisteen ja kehän välisestä tangentin osasta verrattuun sekantin osiin, joita rajoittavat piste ja kehä? Miten siis tangenti piirretään?

4. Olkoot kolmion sivut a, b ja c, BD = x, AD y sekä c:n projektsiooni a:lle ja x:lle p. (Mistä tiedetään, että nämä projektsioonit ovat yhtäsuuret?) Lavennetun Puthagoraan väittämän mukaan saadaan

$$1) b^2 = a^2 + c^2 - 2ap$$

$$2) y^2 = x^2 + c^2 - 2xp,$$

ja siitä, että  $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ ,

$$a) y:b = x:a$$

1):stä ja 2):sta poistetaan  $\bar{p}$ , joten syntyy yksi yhtälö x:n ja y:n välillä, johon a):sta sijoitetaan y:n arvo.

Kun näin saatu yhtälö ratkaistaan x:n suhteen, saadaan tämän positiiviseksi arvoksi

$$x = BD = \frac{ac^2}{a^2 - b^2}.$$

Trigonometrisesti myöskin saa BD:n arvon

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin A}{\sin D} = \frac{\sin A}{\sin(A - B)},$$

josta

$$x = BD = \frac{c \sin A}{\sin(A - B)}.$$

5. 27, 48 ja 75 g.

6. Toisen asteen lauseke (funktsooni), jossa vaipaasti muuttuvana *reaalilukuna* on x, kirjoitetaan = *reaaliluku* m. Näin saatu toisen asteen yhtälö ratkaistaan x:n suhteen ja saadaan kaksi arvoa x:lle. Kumpikin sisältää terminä saman neliöjuurilausekkeen, jossa on m. Kun m:lle annetaan eri arvoja, niin muuttuu juurilausekkeen arvo, ja voi tapahtua, että juurilauseke tulee negatiiviseksi. Tässä on juuri kysymyksemme ydinkohta. Sillä kun näin tapahtuu, niin saapi x imaginaariarvon, joka ei kelpaa. Näemme, että m:lle voi löytyä arvo, jonka toiselle puolelle ei saa mennä, ja juuri tämä arvo nimitetään alkuperäisen funktsoinimme maksimi- tahi minimiarvoksi. Samalla näemme myöskin, että tämä arvo saadaan määrätyksi ottamalla neliöjuurilausekkeen positiivisuuden ja negatiivisuuden raja-arvon, se on: asettamalla juurilauseke nollan arvoiseksi ja sitten ratkaisemalla tämä yhtälö m:n suhteen. Täten saadaan m:n kyseessä oleva arvo eli siis funktsoinin maksimi- tahi minimiarvo. — Yllä olevasta selviää, mistä syystä toisen asteen yhtälön avulla kyetään määräämään funktsoinin maksimi- ja minimiarvoja.

7. Reaalijuuriarit ovat

$$\begin{cases} x_1 = 216 \\ y_1 = \frac{1}{27} \end{cases}; \begin{cases} x_2 = -216 \\ y_2 = -\frac{1}{27} \end{cases}$$

Otetaan uudet tuntemattomat  $u = x^{\frac{1}{3}}$  ja  $v = y^{\frac{1}{3}}$ .  
Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} u^4 - \frac{15}{v^4} = 81 \\ (uv)^3 = 8. \end{cases}$$

Toinen yhtälö antaa

$$uv = 2 \mid uv = -1 + i\sqrt{3} \mid uv = -1 - i\sqrt{3}.$$

Kukin näistä  $(uv)$ :n arvoista yhdistetään ensimmäisen yhtälön kanssa ja kukin yhdistys tuottaa neljä arvoa  $u$ :lle ja neljä  $v$ :lle, siis myös neljä  $x$ :lle ja  $y$ :lle eli kaikkiansa 12 juuriparia, joista reallijuuret jo mainittiin; muut juuriparit ovat imaginaarisia.

8. Yhtälön ratkaisu tuottaa

$$x^2 = -\frac{\sin v \operatorname{tg} v}{2} \pm \sqrt{\frac{\sin^2 v \operatorname{tg}^2 v}{4} + 1}.$$

Nyt on

$$\sin v \cdot \operatorname{tg} v = \frac{\sin^2 v}{\cos v} = \frac{1 - \cos^2 v}{\cos v}$$

Sijoitetaan tämä arvo  $(x^2)$ :n arvoon, otetaan neliöjuuri ja saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{\cos v}; x_2 = -\sqrt{\cos v} \\ x_3 &= +\sqrt{-\frac{1}{\cos v}}; x_4 = -\sqrt{-\frac{1}{\cos v}}. \end{aligned}$$

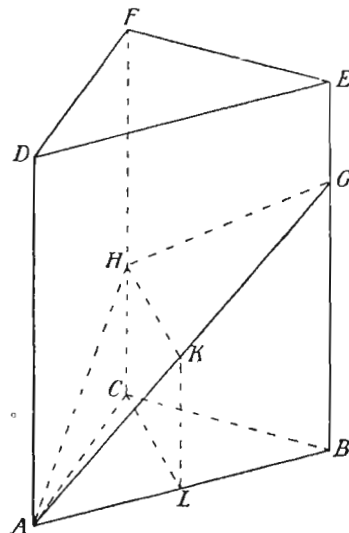
Näistä näemme, että  $x_1$  ja  $x_2$  ovat reaalisia ensimmäisessä ja neljännessä kvadrantissa sekä  $x_3$  ja  $x_4$  reaalisia toisessa ja kolmannessa kvadrantissa.

9.  $1,114 \text{ cm}^3$ .

10.  $0,112$  grammaa. Suuriko volyymi on rautapalalla ja suuriko platinapalalla? Mitkä kappalten kokoiset ilmamäärät? Lopuksi kappalten painot ilmassa? Yhtälö on

$$x = \left(1 - \frac{0,00129}{21,5}\right) - \left(1 - \frac{0,00129}{7,5}\right).$$

11. Olkoon suora prisma ABCDEF. (Katso kuv. 6). Prismaa leikataan taso, joka on kohtisuorassa prisman sivutasoa ABED vastaan ja niin, että leikkauskolmiossa AGH on kulma AHG suora! Piirrä HK  $\perp$  AG ja CL  $\perp$  AB sekä piirrä jana KL! Todista, että saadaan: HK  $\parallel$  CL, HK = CL, kuvio HCLK on suunnikas, HC  $\parallel$  KL, KL  $\parallel$  GB, AL = LB, AK = KG,  $\triangle AKH \cong \triangle GKH$ , AH = HG,  $\angle HGK = 45^\circ$ ,  $\angle KHG = 45^\circ$ , HK :



Kuva 6.

KG, CL = KG =  $\frac{AG}{2}$ , CL =  $\frac{AB\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{AB}{AG} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos \angle GAB = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ! Nyt on  $\angle GAB$ , jonka merkitsemme  $\alpha$ , juuri se kulma, jota etsitään.  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  antaa  $\alpha = 54^\circ 44' 7''$ . Tg:lla saa tarkemman arvon  $54^\circ 44' 8''$ , joten on parasta ensin  $\cos$  muuttaa tg:ksi ja sitten vasta määrätä kulma.

1. 25.

2. Sivuauspiste on ympyröitten ulkopuolinen mukaisuuden piste. (Katso 1880, esim. 2!). Piirrä mielivaltainen ympyrä ja siihen säännöllinen kymmenkultmio. Erotä tämän sivusta AB jana AC annettu jana ja piirrä ympyrä, joka A:ssa sivuaa annettua ympyrää ja kulkee C:n kautta sekä yhdistä äsken saadun säännöllisen kymmenkultmion kärjet A:n kanssa. Yhdistys-suorien leikkauspisteet pienemmän ympyrän kanssa ovat etsittävän säännöllisen kymmenkultmion kärkipisteet.

3. a) Suorakulmaisessa kolmiossa ABC olkoot kaiteetit b ja c sekä P-piste B:n ja C:n välillä. AB-sivun keskipisteestä K on piirretty kohtisuora PA:ta vastaan. Leikatkoon tämä kohtisuora PA:n pisteessä L ja BC:n pisteessä M. Piirretään jana AM. Olkoon  $AL = x$  ja  $LP = y$ . Nyt saamme:

$$\begin{aligned} APM &= C \\ LMP &= B \\ LAK &= C - B \\ AKM &= 2B \\ AK &= BK = MK \\ AMK &= MAK \quad \frac{180^\circ - AKM}{2} = \frac{180^\circ - 2B}{2} = 90^\circ - B \quad C \\ AMP &= C + B = 90^\circ. \end{aligned}$$

Tästä johtuu, että

$$\triangle ALM \sim \triangle BAC \sim \triangle MLP,$$

josta seuraa:

$$\frac{x}{c} = \frac{k}{b} \\ \frac{b}{y} = \frac{c}{k}.$$

Nämä verrannot kerrotaan keskenään ja saadaan

$$\frac{xb}{yc} = \frac{c}{b}$$

josta

$$\frac{x}{y} = \frac{c^2}{b^2},$$

joka oli todistettava.

b) Trigonometrisesti:

$$\frac{x+y}{c} = \frac{\sin B}{\sin(90^\circ + B)} = \frac{\sin B}{\cos B} \\ \frac{x}{c} = \sin 2B \quad 2 \sin B \cos B. \\ 2$$

Kun edellinen yhtälö jaetaan jälkimäisellä, on

$$\frac{x+y}{x} = \frac{1}{\cos^2 B},$$

josta

$$1 + \frac{y}{x} = \frac{1}{\cos^2 B}$$

ja tästä

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}.$$

Mutta

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin B}{\cos B}$$

Siis:

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Todista, että väittämä pitää paikkansa myöskin silloin, kun P on BC:n jatkeella.

4.  $\sqrt{313}$  cm = 17,69 cm. Minkätähden matkat 6 cm ja 24 cm ovat otettavat A:sta vastakkaisiin suuntiin? Koeta, mitä saat, jos nämä matkat luetaan samaan suuntaan A:sta! Minkätähden 5 cm ei kelpaa ympyrän säteeksi?

5. Toinen tarvitsee 1 min 12 sek ja toinen 1 min 30 sek.

6. Jos R ja r ovat asemien säteet sekä s on sivuviiva, niin piirrä katkaistuun kartioon suorakulmainen kolmio, jossa s on hypotenuusa ja (R-r) toisena kateettina! Saadaan

$$s > R - r.$$

Kerrotaan

$$\pi (R + r):llä:$$

$$\begin{aligned} \pi (R + r) s &> \pi (R + r) (R - r) \\ \pi R s + \pi r s &> \pi R^2 - \pi r^2, \end{aligned}$$

joka oli todistettava.

$$\begin{aligned} 7. \quad &120^\circ \pm n \cdot 360^\circ \text{ ja} \\ &240^\circ \pm n \cdot 360^\circ. \end{aligned}$$

$$8. \quad 4,16 \text{ } \%. \quad$$

$$9. \quad 3^\circ 57'; 86^\circ 3' \text{ ja } 90^\circ.$$

10. 20,37 sekunnin kuluttua; kappale on pudonnut 2037 metriä.

## 1900. K.

1. 28800000 peninkulmaa. Olkoon »sama aika» t! Mikä on maapallon ja mikä Marsin kiertoaika (yhteen kierrokseen menevä aika)?

2. Olkoon kolmion sisällä oleva mielivaltainen piste O sekä  $OA = a$ ,  $OB = \beta$ ,  $OC = \gamma$ ,  $OD = k$ ,  $OE = h$  ja  $OF = l$ ! Todista, että kumpikin väitöksessä olevista lausekkeista  $= a^2 + \beta^2 + \gamma^2 - k^2 - h^2 - l^2$ !

3. Piirrä mallikuvio! Todista, että suunnikas on vinoneliö! Todista, että, jos O on ympyrän keskipiste ja AB vinoneliön sivu, niin  $\triangle AOB$  on suorakulmainen! Tästä saadaan vinoneliön sivun molemmat osat määräytyiksi ja vinoneliö piirretyksi. Mutta, jos jatkamme tutkimustamme, saamme (trigonometrisesti, jos tarvitaan) kolmion AOB kulmat ja siis vinoneliön kulmat ( $60^\circ$  ja  $120^\circ$ ). Kuinka suuret ovat vastaavat sentrikulmat? Tästä saamme helpomman ratkaisun: piirrä kaksi  $60^\circ$  keskenänsä muodostavat halkasijat; halkasijoitten päätepisteet ovat suunnikkaan ja ympyrän sivuamispisteet.

4.  $2\pi a^2 \sqrt{3}$ . Minkä kappalten pinnat syntyvät?

5.  $60^\circ$ . Jos aseman lävistäjä = c, niin suorakulmaisesta kolmiosta saadaan aseman särmä  $\frac{c}{\sqrt{2}}$  ja toisesta suorakulmaisesta kolmiosta sivusärmä  $\frac{c}{\sqrt{2}}$ . Mitä siis voidaan sanoa sivupintoina olevista kolmioista?

$$6. \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 81 \\ y = 9. \end{cases}$$

Näitten lisäksi yhtälöjä ratkaistaessa saadaan  $x = 9$ ;  $y = \frac{1}{2}$ . Nämä arvot eivät toteuta alkuperäistä yhtälö-

ryhmää. — Yhtälöryhmän ratkaisemisessa käytetään apufunktionmattomia  $u = \sqrt{x}$  ja  $v = \sqrt{y}$ .

7. 4 kg:n painoisia 700 ja  $4\frac{1}{2}$  kg:n painoisia 1100 granaattia.

8. 100; 40; 36 ja  $21\frac{6}{13}$  tahi —  $4\frac{4}{13}$ ;  $17\frac{1}{13}$  —  $68\frac{4}{13}$  ja  $273\frac{1}{13}$ .

9. Saadaan  $\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}$  ja  $\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}$  Edellisen arvo antaa  $45^\circ$  ja  $135^\circ$ ; jälkimäinen  $225^\circ$  ja  $315^\circ$ , jotka kaikki toteuttavat alkuperäisen yhtälön. Vastaukseksi saamme siis

$$45^\circ \pm n \cdot 90^\circ.$$

10. 150 mm.

11. 126 litraa.

## 1900. S.

1. 6 metriä. Olkoon kiskon pituus =  $x$  metriä ja sysähdysten lukumäärä 27 sek:ssa kiskojen lukumäärä samassa ajassa  $a$ ! Saadaan

27 sek:ssa kuljetaan  $ax$  metr.

$1\frac{1}{4}$  tunnissa 4500 „ „  $a$  km = 1000  $a$  metr., josta helposti saa yhtälön.

2. Olkoon annetun kolmion sivu  $a$  ja sitä vastaava korkeusviiva  $k$ ! Etsittävän tasakylkisen kolmion asema olkoon  $x$  ja korkeus  $y$ ! Saadaan yhtälö

$$1) \frac{xy}{2} = \frac{ak}{2}$$

Toinen yhtälö saadaan näin: Piirrä joku tasakylkinen kolmio, jonka kärkikulma on annettu kulma. Olkoon tämän apukolmion asema  $s$  ja korkeus  $h$ ! Silloin saadaan

$$2) \frac{x}{s} = \frac{y}{h}$$

1):stä ja 2):sta saadaan

$$y = \sqrt{\frac{ak}{s}} \cdot h.$$

Miten  $y$  piirretään? Miten jatketaan?

3. Olkoon sivuamispiste D, joka yhdistetään keskipisteeseen.  $\triangle ADC \sim \triangle DBC$ , josta saadaan verranto, jota sopii käyttää todistaessamme, että  $\triangle PCB \sim \triangle ACP$ .

4. 32 cm. Piirrä ympyrän halkaisijat annettujen kahden pisteen A ja B kautta! Merkitse määrättävän jänteen ne osat, jotka ovat 14 cm:n janan jatkeita,  $x$ :llä ja  $y$ :llä! Näin saadaan kaksi jännettä, jotka leikkaavat toisensa A:ssa, ja kaksi, jotka leikkaavat toisensa B:ssä. Täten tulevat  $x$  ja  $y$  määrättyiksi ja näitten avulla koko jänne.

5. Ensimmäistä lajia 6 istukasta neliömetrille. Osat maa-alueesta ovat edellisen ehdotuksen mukaan 75. 65 ja 60  $m^2$  ja jälkimäisen mukaan 105 ja 95  $m^2$ . — Jos ensimmäistä lajia istutetaan  $x$  istukasta neliömetrille, saadaan yhtälö

$$\frac{450}{x} + \frac{520}{x+2} + \frac{540}{x+3} = \frac{630}{x} + \frac{760}{x+2}$$

Mitä merkitsevät termit tässä yhtälössä?

$$6. \begin{cases} x = 8 \\ y = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 32 \\ y = 8. \end{cases}$$

Ilmotus, että  $x$ , 20 ja  $y$  muodostavat aritmeettisen sarjan, merkitsee, että  $20 - x = y - 20$ , ja se, että  $x$ , 16 ja  $y$  tekevät geometrisen sarjan, merkitsee, että  $\frac{16}{x} = \frac{y}{16}$

7. Suhteessa 9:16. (Katso 1899 K. esim. 1!).

8.  $30^\circ$ . Saadaan  $\cos x = \sin 2x$ .

9. 335 km. (Katso 1891 esim. 7!).

10.  $\frac{2a}{g}$  sekuntia. Ylöspäin menevän rakettiosasen nousuaika  $= \frac{a}{g}$  sek. Sen putoamisaika ylhäältä siihen kohtaan, josta se lähti, on siis myös  $\frac{a}{g}$  sek., ja sen tässä kohdassa alaspäin oleva nopeus  $= a$  metr. sek:ssa. Jos tämän rakettiosasen koko aika on  $t_2$  sek. ja alaspäin lentävän rakettiosasen aika  $t_1$  sek., niin saadaan osasten lähtökohdan etäisyydelle maanpinnasta yhtälö

$$at_1 + \frac{gt_1^2}{2} = a \left[ t_2 - \left( \frac{a}{g} + \frac{a}{g} \right) \right] + \frac{g \left[ t_2 - \left( \frac{a}{g} + \frac{a}{g} \right) \right]^2}{2}$$

josta

$$t_2 - t_1 = \frac{2a}{g}.$$

### 1901. K.

1. 54 min:ssa. Huomaa, että ajat eivät ole verrannollisia astioiden asemien halkasijoihin!

2. Jos kolmion sivut ovat  $a$ ,  $b$  ja  $c$  sekä näitten osat  $a_1$  ja  $a_2$ ,  $b_1$  ja  $b_2$ ,  $c_1$  ja  $c_2$ , siten, että väitös kuuluu  $c_1 : a_1 : b_1 = c_2 : a_2 : b_2$ , niin, koska kulmat ovat puolitetut, saadaan verrann.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b} = \frac{a}{c}.$$

josta, kertomalla, väitös.

3. Piirrä mallikuvio! Merkitse annetun pisteen väli sivuamispisteestä tällä ja edellisen pisteen etäisyys etsittävän sekantin jommastakummasta leikkauspisteestä kehän kanssa  $x$ llä, niin saat yhtälön  $x$ :n ja  $t$ :n välillä,

jonka perustuksella tehtävä suoritetaan! — Montako ratkaisutulosta? Onko tehtävä aina mahdollinen? (Katso 1875 esim. 3!)

4. 7 sekunnin kuluttua ja 15 sekunnin kuluttua. Saadaan yhtälö

$$(30 - 2x)^2 + (40 - 4x)^2 = 20^2.$$

Ota selville, kuinka etäällä suorien leikkauspisteestä nämä ulkopuoliset sivuamiset tapahtuvat!

5. 28400 ja 28500 mk.

$$6. \quad x = \frac{a+b}{2}; y = \frac{a-b}{2}.$$

7. 1 mk 40 p. Toinen vastaus 2 mk 40 p. ei kelpaa, koska siinä tapauksessa henkilöitten lukumäärä olisi  $23 \frac{1}{3}$ .

8. 125 : 32. Mitenkä suuri on kartion aseman säde?

9. 3169.4 km. Yhtälö on

$$6370^x = \cos 60^\circ 9' 40''.$$

10. Olkoon pyramidinokärki  $O$ , yksi sen sivutasoista  $AOB$ , ja tässä korkeusviiva  $OD \perp AB$ , sekä pyramidin aseman keskipiste  $P$ . Piirretään janat  $PO$ ,  $PA$ ,  $PB$  ja  $PD$  sekä merkitään  $\angle OAD = u$  ja  $\angle ODP = v$ . On todistettava, että  $v < u$ . Merkitään vielä  $AB = s$  ja  $PD = r$ . Tarkotustamme varten etsitään ensin yhtälö  $s$ :n ja  $r$ :n välillä (säännöllisen monikulmion sivun ja sen sisään piirretyr ympyrän säteen välillä). Saamme

$$\frac{AD}{PD} = \frac{\sin \angle APB}{\sin \frac{n}{2}} = \frac{\sin n}{\sin \frac{n}{2}} = 2 \cos \frac{n}{2} = 2 \cos \frac{180^\circ}{n}; \quad (n \text{ on sivutasojen lukumäärä}).$$

Tästä  $AD = PD \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ ; mutta  $AD = \frac{s}{2}$ ; siis saadaan

$$AD = \frac{s}{2} = r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Nyt muodostamme

$$\operatorname{tg} v = \frac{OP}{PD} = \frac{OP}{r}$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{OD}{AD} = \frac{OD}{r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

Osottaja  $OP <$  osottaja  $OD$ . (Mistä syystä?)

Nimittäjä  $r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = r$ , jos  $n = 4$ , mutta pienempi kuin  $r$ , jos  $n > 4$  (Todista!).

Tästä päätämme, että

$$\operatorname{tg} v < \operatorname{tg} u$$

ja, koska  $v$  ja  $u$  ovat teräviä,

$$v < u.$$

Minkätähden sanotaan, että sivutasojen lukumäärä on suurempi kuin kolme? Siitä syystä, että, jos sivutasoja olisi kolme, saisimme  $r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = r \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = r \sqrt{3} = 1,732 \cdot r$  eli siis suurempi kuin  $r$ , ja tässä tapauksessa emme kykene sanomaan, kumpi on suurempi,  $\operatorname{tg} v$  vai  $\operatorname{tg} u$ .

11. 70 cm:n etäisyydellä. Miksi ei 12 cm kelpaa?

## 1901. S.

1. 20 cm. Koivupuun ominaispaino on siis 0,64 ja kuusipuun 0,49.

2. Olkoon annetun kolmion asema  $s$  ja korkeus  $k$  sekä annettu jana  $a$ , joka tulee asemaksi etsittävään kolmioon, jonka korkeus olkoon  $x$ ! Näitten kirjainten välisestä yhtälöstä saadaan  $x = \frac{k \cdot s}{a}$ . Miten  $x$  piirre-

tään? Mikä on niitten pisteiden ura, joista jana  $a$  näkyy annetussa kulmassa  $\alpha$ ? Millä kahdella uralla täytyy siis etsittävän kolmion  $\alpha$ -suuruisen kulman kärjen löytyä? Miten niinmuodoin kolmio saadaan?

3. Väitetään, että  $a^2 + b^2 = 2 \left[ \left( \frac{c}{2} \right)^2 + m^2 \right]$ , jossa

$a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat sivuja sekä  $m$  (mediaani eli) kolmion  $c$ -sivun keskipisteen ja vastaisen kärjen yhdistysjana. Projisioi  $m$  sivulle  $c$  sekä määrää  $a^2$  ja  $b^2$  lavennetun Pythagoraan väittämän mukaan!

4. Jos  $x$  on pienempi yhdensuuntaisista sivuista, niin saadaan yhtälö

$$(x + 50)^2 = (x + 25)^2 + 60^2,$$

josta  $x = 34,5$  ja siis lävistäjä  $= (34,5 + 50) \text{ cm} = 84,5 \text{ cm}$ .

5. Lainat olivat 10000 mk ja 20000 mk. Edellinen määrä pidettiin alkuperäisellä korolla 3 vuotta ja jälkinäinen 4 vuotta.

6.  $x = a^2$ ;  $y = b^2$ ;  $z = ab$ .

7. 30 sek. Kuinka suuri on 3 min:ssa suoritettujen matkojen erotus?

8.  $\frac{1}{4}$ .

9. 5,089 cm. Kuinka suuri on monikulmion yhtä sivua vastaavan sentrikulman puolikas? Mikä trigonometrinen yhtälö saadaan sivun puolikkaan määräämistä varten?

10.  $2\frac{1}{2}$  kg. Yhtälö on

$$\frac{x}{0,28} + \frac{56}{1,12} = x + 56.$$

## 1902. K.

1. 121:125. Jos edellisen tiililajin kunkin tiilen ulottuvaisuudet ovat a, b ja c cm sekä muurin suuruus V cm<sup>3</sup>, niin kysytään

$$\frac{4 \cdot V}{a \cdot b \cdot c} = \frac{5,5 \cdot V}{11a \cdot 11b \cdot 11c}$$

2. Olkoon mallikuvio ABC ja siinä AB-sivu — tunnettu jana sekä piste D, jossa ACB-kulman puolittaja leikkaa AB:n;  $\angle C$  = tunnettu kulma  $\alpha$ ! Kuinka suuret ovat kulmat ACD ja DCB? Siis on piirrettävä ympyrän kaari, jonka sisältämä kehä-kulma =  $\frac{\alpha}{2}$  ja jänne AD sekä toinen kaari, joka sisältää samansuuruisen kulman ja jota vastaa jänne DB. Se piste, jossa nämä kaaret leikkaavat toisensa, on C.

3. Yhdistä ympyrän keskipiste O pisteitten A:n ja D:n kanssa. Olkoon AD:n ja OB:n leikkauspiste P! Jos käydään ottamaan selville kulmien suuruudet kolmioissa AOD ja APO, niin saadaan tietää, että kolmiot ovat yhdenmukaiset, ja lisäksi tasakylkiset.

4. Pienemmän segmentin ala =  $\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = 0,614 r^2$

ja suuremman ala =  $\frac{2\pi r^2}{3} + \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = 2,527 r^2$ .

5.  $\frac{15}{\sqrt{2}}$  cm = 10,607 cm ja  $\frac{9}{\sqrt{2}}$  cm = 6,364 cm.

6.  $x = \frac{a}{b}$ ;  $y = \frac{b}{a}$ .

7. Edellinen kello 1 ja jälkimäinen kello 4 iltapäivällä. Olkoon Helsingin ja Hangon välinen matka s

kilometriä! Suorittakoon jälkimäinen tämän matkan x tunnissa! Ekv. on

$$\frac{4\frac{2}{3} \cdot s}{x-1} + \frac{2\frac{2}{3} \cdot s}{x} = s,$$

josta x = 8.

8. 2, 4, 6 tahi 1, 1, 1 tahi 0, 0, 0. (Katso 1900 S, esim 6!).

9. 187,13 m.

10.  $4\pi^2$  metriä = 39,4784 metriä.

8 a. Korko on suurin kahdeksantena vuonna. — Jos hätäapulaina on k mk., niin joka vuosi, paitse korkoa, suoritetaan  $\frac{k}{20}$  mk = 0,05 k mk. Saadaan

Ens. vuoden korko = 0,015 k mk.

Toisen „ „ =  $(0,015 + 0,0025) (1 - 0,05)$  k mk

Kolm. „ „ =  $(0,015 + 2 \cdot 0,0025) (1 - 2 \cdot 0,05)$  k „

Nelj. „ „ =  $(0,015 + 3 \cdot 0,0025) (1 - 3 \cdot 0,05)$  k „

Viid. „ „ =  $(0,015 + 4 \cdot 0,0025) (1 - 4 \cdot 0,05)$  k „

— — — — —

— — — — —

n:nnen „ „ =

$$[0,015 + (n-1) \cdot 0,0025] [1 - (n-1) 0,05] k mk$$

Koska nyt kysytään, monentenako vuonna korko on suurin, niin asetetaan

$$(0,015 + (n-1) 0,0025) [1 - (n-1) 0,05] k = m \text{ (maksimiarvo)}$$

ja ratkaistaan. Tästä tulee maksimiarvoksi  $\frac{169}{8000} k = 2\frac{9}{800} \%$  ksta, jota vastaa n = 8.

9 a. 133° 28' ja 46° 32'.

10 a. — 40°C — 40°F. Yhtälö on

$$x : (x - 32) = 100 : 180.$$

## 1902. S.

1. Joka kolmas viikko.

2. Piirrä mallikuvio! Piirrä suora annetun pisteen ja ympyrän keskipisteen kautta! Merkitään näin saatu halkasija  $d$ , halkasijan lähempänä annettua pistettä olevan päätepisteen etäisyys annetusta pisteestä  $a$ , koko sekantti  $x$  ja sen ympyrän sisään tuleva osa  $y$ ! Silloin saadaan

$$\begin{cases} x : d = d : y \\ x : a = (a + d) : (x - y), \end{cases}$$

joista  $x = \sqrt{d^2 + a^2 + ad}$ ;  $x$  on siis kolmas sivu kolmiossa, jossa kaksi sivua on  $d$  ja  $a$  sekä välinen kulma  $= 120^\circ$ . — Montako ratkaisutulosta? *9.*

3. Saadaan yhdenmukaisia kolmioita.

4.  $r\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0,765r$ . Piirrä ympyrän sisään piirretyn neliön sivu! Pythagoraan väittämän avulla saadaan vastaus.

5. Jalkamatkailija 4 km ja polkupyöräilijä 12 km tunnissa.

6. 2 mk tiulta.

7.  $x$ :n arvoiksi saadaan  $1\frac{1}{2}$  ja  $-4$ . Mitä on sanottava  $1\frac{1}{2}$ :sta? *onolemm. josta tulee 0:iksi.*

8.  $2.5 \cdot \sin 22^\circ 30' \text{ cm} = 3,8268 \text{ cm}$ .

9. Jos maapallon säde on  $r$ , niin kylmän vyöhykkeen (pallosegmentin) korkeus on  $r \sin 66^\circ 32' 53''$ . Suuriko siis kylmä vyöhyke? Kuinka suuri on sen pinta-alan suhde maan koko pintaan? Saadaan suhteen arvoksi  $0,0413$ .

10. Etsittävä matka olkoon  $x$  ja kalteuskulma  $\alpha$ . Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} x &= \frac{9,8 \cdot 6^2}{2} \sin \alpha \text{ eli} \\ x &= \frac{9,8 \cdot 6^2 \cdot 10}{2 \cdot x}, \end{aligned}$$

josta etsittävä matka 42 metriä.

## 1903. K.

1. 173 : 172.

2. Piirrä mallikuvio! Todista, että  $\angle ABC = \angle CAD$ ! Mitä tiedetään kolmioista  $ABC$  ja  $CAD$ ? Saadaan  $a : x = x : b$ , jossa  $AB = a$ ,  $CD = b$  ja  $AC = x$ . Miten  $x$  piirretään?

3. 1:o. Jos  $BC > CD$ , niin erota pitkin  $BC$ :tä  $CE = CD$  ja yhdistä pisteet  $A$  ja  $E$ . Saadaan  $\triangle ADC \cong \triangle AEC$ , josta  $AD = AE$  ja  $\angle D = \angle AEC$ . Minkälainen kolmio on  $ABE$ ? Saadaan  $\angle B = \angle AEB$ . Mitä tiedetään kulmista  $AEC$  ja  $AEB$  verrattuina toisiinsa? Mitä siis kulmista  $B$  ja  $D$ ? Entä monikulmion kulmista  $A$  ja  $C$ ?

2:o. Piirrä  $AK \perp BC$  ja  $AL \perp CD$ ! Todista, että  $\triangle ACK \cong \triangle ACL$ ,  $AK = AL$ ,  $\triangle AKB \cong \triangle ALD$ , josta saat väitöksen.

4. Pienemmän kaaren puolikasta vastaavan janteen etäisyys ympyrän keskipisteestä on  $\sqrt{\frac{r(r+a)}{2}}$  ja suuremman kaaren puolikasta vastaavan janteen etäisyys ympyrän keskipisteestä  $\sqrt{\frac{r(r-a)}{2}}$ . — Saadaan Pythagoraan väittämän mukaan.

5.  $\frac{r}{2}$ . Jos etsittävä jana on  $x$ , niin on yhtälö

$$\frac{2\pi r(r-x) + \pi(r^2 - x^2)}{2\pi r(r+x) + \pi(r^2 - x^2)} = \frac{7}{15}$$

6.  $x = y = z = \frac{d}{a+b+c}$ .

Minkätähden on lisäys, että  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat erisuuria lukuja, esimerkkiin liitetty?

7. 144.

8. 4; 12 ja 36. (Katso 1900. S., esim. 6!).

9. 111,53 mm.

10. 28 metriä sekunnissa. Kappaleet kohtaavat toisensa aivan keskivälillä 80 metrin matkaa; kumpikin on kulkenut alkupisteestään kohtaamispisteeseen matkan  $\frac{x^2}{2g}$  metriä, jossa  $x$  on etsittävä nopeus.

8 a. Edellinen sisältää 6 % ja jälkimäinen 69 % suolaa. Sekoitusastia vetäköön  $a$  litraa ja olkoon etsittävät prosentit  $x$  ja  $y$ ! Yhtälöt ovat

$$\begin{cases} \frac{x \cdot 9a}{100 \cdot 24} + \frac{y \cdot 9a}{100 \cdot 32} = 33 \cdot \frac{(9a + 9a)}{24 + 32} \\ \frac{x \cdot 9a}{100 \cdot 24} + \frac{y \cdot 12a}{100 \cdot 32} = 37,5 \cdot \frac{(9a + 12a)}{24 + 32} \end{cases}$$

9 a. 111,53 mm.

10 a. 1080 mm elohopeata.

### 1903. S.

1. 16 päivää.

2. Etsi ympyröitten mukaisuuden pisteet! (Katso 1880, esim. 2!). Niistä piirretään sekantit kysymyk-

sessä olevan leikkauspisteen kautta. Nämä sekantit ovat etsittävät suorat. Montako ratkaisutulosta saadaan?

3. Yhdistä kolmiossa otettu piste  $O$  kolmion kärkiin  $A$ ,  $B$  ja  $C$ ! Olkoot  $O$ :n etäisyydet näitten kulmien vastaisista sivuista  $k_1$ ,  $k_2$  ja  $k_3$  sekä tasasivuisen kolmion korkeus  $k$ ! Saadaan

$$\triangle BOC + \triangle COA + \triangle AOB = \triangle ABC \text{ eli, jos } BC$$

$$CA = AB = s,$$

$$\frac{k_1 s}{2} + \frac{k_2 s}{2} + \frac{k_3 s}{2} = \frac{ks}{2},$$

josta  $k_1 + k_2 + k_3 = k$ .

4.  $\sqrt{6}:1$ . Jos  $r$  on ympyrän säde, niin kolmion sivu on  $r\sqrt{12}$  ja neliön sivu  $r\sqrt{2}$ .

5. Jos neliön sivu on  $s$ , on etsittävä tilavuus  $\frac{5}{8}\pi s^3$ . Saadaan sylinteri, josta on vähennetty pallo.

6.  $x = 3$ ,  $y = 1$  ja  $z = 1$ . Ota sulkumerkkilausekkeet aputuntemattomiksi.

7.  $4\frac{1}{2}\%$  ja  $4\frac{3}{4}\%$ .

8.  $AB$  on 9 km ja  $BC$  6 km.

9. 20,43 cm ja 24,63 cm.

10.  $\sqrt[3]{3415104}$  mm -- 150,59 mm. Kuinka suuri on pallon rautaosan volyymi? Suuriko sen paino? Mikä määrä vettä painaa saman verran kuin kappale, joka kelluu vedessä?

### 1904 K.

1.  $73\frac{1}{2}\%$  miehiä ja  $26\frac{1}{2}\%$  naisia.

2. Yhdistä mallikuviassa se piste  $X$ , jossa etsittävä suora leikkaa janteen, ympyrän keskipisteeseen  $O$  sekä tämä piste tunnettuun pisteeseen  $A$ ! Kuinka suuri on kulma  $OXA$ ? Mikä on niitten pisteiden ura, joista

AO näkyy suorassa kulmassa? Miten siis X löydetään? Onko tehtävä aina mahdollinen?

3. Koska mielivaltaisen ympyrän jänteet OA ja OB ovat yhtäsuuret (= annetun ympyrän säde), niin kaari OA = kaari OB ja siis näitä kaaria vastaavat mielivaltaisen ympyrän kehäkulmat ovat yhtäsuuret, josta johtuu, että  $\triangle AOC \propto \triangle POA$  (tahi  $\triangle BOC \propto \triangle POB$ ). Saadaan väitös.

4. 362,25 mm. Yhdistä toisen ympyrän keskipiste sen sivuamispisteihin ja tee samoin toisenkin ympyrän suhteen! Saat suorakulmaisia kolmioita, jotka parittain ovat yhdenmukaisia. Saadaan sivujen kesken seuraavat verrannot

$$\begin{cases} \frac{35+x}{57-x} = \frac{35}{45} \\ \frac{35+y}{127+y} = \frac{35}{45} \end{cases}$$

joissa x on sisäpuolisen tangentin leikkauspisteen, ympyröitten keskipisteitten kautta kulkevan suoran kanssa, etäisyys pienemmän ympyrän kehästä ja y ulkopuolisen tangentin leikkauspisteen etäisyys.

5. 45 cm.

6. 71. Toinen arvo 1 ei toteuta yhtälöä.

7. Rautatielinja on 3469,4 km ja Itä-Euroopan aika on 1 t 55 min Pariisin ajan edellä. — Muuta kaikki ajat esim. Pariisin ajaksi!

8. Joko  $3\frac{1}{2}$  kk tahi 8 kk.

9.  $29^\circ 59' 58''$  ja  $67^\circ 40' 2''$ . Koska  $82^\circ 20'$ -kulma on puolitetty, niin kuinka suhtautuvat sen viereiset

set sivut toisiinsa? Jos toinen etsittävistä kulmista on x, saadaan yhtälö

$$\frac{\sin(97^\circ 40' - x)}{\sin x} = \frac{92,5}{50}.$$

10.  $3\frac{3}{7}$  sek.

9 a. 6,2 metriä.

10 a. 0,7.

## 1904. S.

1.  $46\frac{7}{8}\%$ .

2. 1:0 Piirrä mallikuvio! Suorakaiteen lävistäjä = 2r, jos r on ympyrän säde. Olkoon s neliön sivu sekä x ja y suorakaiteen sivut! Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} xy = s^2 \\ x^2 + y^2 = (2r)^2 \end{cases}$$

joista saadaan x ja y.

2:0 Mukavammin käy piirtäminen seuraavalla tavalla. Suorakaiteen ABCD lävistäjää AC vastaan mallikuviossa piirretään kohtisuorat BE ja DF. Merkitään  $BE = DF = z$ . Saadaan  $\triangle ABC + \triangle ACD =$  suorakaide = neliö, siis

$$\frac{z \cdot 2r}{2} + \frac{z \cdot 2r}{2} = s^2,$$

josta

$$z = \frac{s^2}{2r}.$$

Miten z piirretään? Kun z-jana on saatu, piirretään annettuun ympyrään halkasija ja sen kummallekin puolelle z:n etäisyydellä siitä halkaisijan suuntaiset suorat. Halkaisijan päätepisteet ja yhdensuuntaisten suorien leikkauspisteet ympyrän kehän kanssa ovat suorakaiteen kärkipisteinä. — Onko tehtävä aina mahdollinen?

3. Ympyröitten sivuamispisteen O kautta piirretään tangentti. Tangentti ja toinen sekanteista muodostavat ristikulmia, (jotka siis ovat keskenään yhtäsuuret ja) joista toinen on AOB-kolmion kulman suuruinen ja toinen COD-kolmion kulman suuruinen. (Mistä syystä?) Minkälaiset siis ovat kolmiot AOB ja COD?

4.  $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0,2071$ . (Katso 1895. S., esim. 5!)

5. Kartion kärjen puoleisen osan suhde toiseen osaan  $= 1:7$ . Jos edellisen osan (eheän kartion) korkeus on  $k$  ja aseman säde  $r$ , niin alkuperäisen kartion korkeus on  $2k$  ja aseman säde  $2r$ . Saadaan  $\frac{\pi r^2 \cdot k}{\pi (2r)^2 \cdot 2k} = \frac{1}{8}$ , josta osien suhde niinkuin ilmoitettiin.

6. Juuren poistamisen jälkeen saadaan

$$x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0,$$

josta

$$(x - 2)(x^3 - 1) = 0.$$

Kaksi juurta on siis  $x_1 = 2$  ja  $x_2 = 1$ . Ne kaksi muuta juurta ovat imaginaarisia. Toteuttavatko saadut  $x$ :n arvot alkuperäisen yhtälön?

7.  $8\frac{1}{4}$  päivää.

8. 4 tunnissa.

9.  $19,716$  cm. Kuinka suuri on tangenttikulma?

10.  $3,27$  m sek:ssa.

## 1905. K.

1. A saa vuosipalkkaa 2000 mk, B 1800 mk ja C 1500 mk. A:n osuus 589 markasta suhtautuu B:n osuuteen  $= 1800:2000 = 9:10$  ja B:n osuuden suhde C:n osuuteen  $= 1500:1800 = 5:6 = 10:12$ . Siis A:n, B:n ja C:n suhdeluvut ovat 9; 10 ja 12 (eikä 15; 18;

20), joiden mukaan 589 mk on jaettava. — Palkkiot ovat 171 mk, 190 mk ja 228 mk.

2. Olkoot ympyrät A ja B sekä edellisen kehällä C-piste! Ensiksi tiedämme, että etsittävän ympyrän keskipisteen täytyy löytyä sillä suoralla, joka kulkee A:n ja C:n kautta. (Minkätähden?) Jos pitkin mainittua suoraa erottaa  $CB_1 = B$ -ympyrän säde, niin mitä tiedetään B:n ja  $B_1$ :n etäisyyksistä etsittävän ympyrän keskipisteestä? Mikä on niitten pisteitten ura, jotka ovat yhtä etäällä B:stä ja  $B_1$ :stä? Millä suoralla myöskin siis täytyy etsittävän ympyrän keskipisteen löytyä? Missä siis on etsittävän ympyrän keskipiste? Onko tehtävä aina mahdollinen? Montako ratkaisutulosta saadaan? (Huomaa, että pitkin A:n ja C:n kautta kulkevaa suoraa voidaan C:stä lähtien erottaa B:n säteen pituisia osia kahteen suuntaan!)

3. Saadaan kaksi paria yhdenmukaisia kolmioita. Toisesta parista tulee  $AC:AD = EC:ED$  ja toisesta  $BC:BD = EC:ED$ , jossa E on tangenttien leikkauspiste. Verrannoista seuraa väitys.

4. Säteitten summa kerrottuna neliöjuurella luvusta 2.

5.  $320 \pi \text{ cm}^3 = 1005,3 \text{ cm}^3$ . (Katso 1879, esim. 10!)

6. Poista ensin juuret niinittäjistä! Saadaan lauseke muotoon

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

Jos sijoitetaan  $x$ :n arvo  $\frac{2ab}{1 + b^2}$ , niin saadaan

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{\frac{a^2(1 + b^4 - 2b^2)}{1 + b^4 + 2b^2}}$$

Nyt on huomattava, että lausekkeen  $\sqrt{1+b^4-2b^2}$  positiivinen arvo on

$$\begin{cases} 1-b^2, & \text{jos } b^2 < 1 \\ \text{nolla,} & \text{,, } b^2 = 1 \\ b^2-1, & \text{,, } b^2 > 1. \end{cases}$$

Jos nämä seikat otamme huomioon määrätessämme lausekkeemme  $\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$  arvon, saamme, että alkuperäinen lausekkeemme on

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b}, & \text{jos } b^2 < 1 \\ & \frac{1}{b} - b, & \text{,, } b^2 = 1 \\ & b, & \text{,, } b^2 > 1. \end{aligned}$$

7. 660 kg ja 540 kg. Olkoon liikemiehen ostohinta a mk kg:lta sekä x ja y etsittävät painomäärät! Jos myyntihinta B:lle kg:lta on m mk, niin saadaan  $a + 0,10 m = m$ , josta  $m = \frac{10a}{9}$ . Nyt kuuluu yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0,10 ax + 0,10 \cdot \frac{10a}{9} y = 0,105 (ax + ay) \\ 0,10 a (x - 108) + 0,10 \cdot \frac{10a}{9} (y + 108) = 0,106 (ax + ay). \end{cases}$$

8. 0,1 kg.

9. 12,24 metriä.

10. 138° 30' 54".

## 1905. S.

1. 6 mk 30 p.

2. Olkoon janojen erotus = a ja niitten keskipro-

portsionaali = b! Mitkä yhtälöt saat? Lopuksi saadaan

$$\begin{aligned} \text{pienempi jana} &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{a}{2} \\ \text{ja} \\ \text{suurempi jana} &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Miten nämä janat piirretään?

3. Jos  $AB = a$  ja sen suurempi osa = b. niin on

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b},$$

joka verranto yhdistetään ja saadaan

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

eli

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

4.  $\sqrt{20} \text{ cm} = 4,472 \text{ cm}$ .

5. 1800 cm<sup>3</sup>. Saadaan parallellipipeedi, jonka asema on 12 . 12 cm<sup>2</sup> ja korkeus 25 . sin 30° cm = 12,5 cm.

$$6. \frac{x+7}{x-7}.$$

7. Junan pituus on 147 m ja sen nopeus 7 m sekunnissa. — Jos junan nopeus on x metriä sek:ssa, niin junan pituus on 21x m ja yhtälö on

$$75x = 378 + 21x.$$

8. 30 tuntia.

9. 44° 54' 20". Piirrä suorakulmainen kolmio ABC (AB vaakasuorana ja AC pystysuorana kateetina), jossa AC:llä olevan D-pisteen etäisyys B:stä on 6,7 m ja C:stä 2,3 m sekä  $\angle BDA = 59^\circ 10'$  (D on silloin DC-tangon harjalla oleva päätepiste). Kulma CBA

kysytään. Määrää ensin suorakulmaisen kolmion ABD kateetit ja senjälkeen ABC-kolmiosta etsittävä kulma!

10. 26295 kg. Yhtälö on

$$x : 1 = \pi \cdot (1\frac{80}{2})^2 \cdot 76 : 73,55.$$

## 1906. K.

1. 156 cm. Laskekoon lyöntilaitoksen luoti kullakin lyönnillä  $x$  cm! Montako cm on tämä luoti vuorokaudessa laskenut? Kumpi luoti neljän tunnin kuluttua vedon jälkeen on alempana? Pitkähkö matkan on kelloa käyttävä luoti näissä neljässä tunnissa kulkenut ja siis minkä matkan vuorokaudessa? Miten saadaan vastaus?

2. Katso 1904. S., esim. 2!

3.  $\triangle CBA \infty \triangle COB$ , jossa  $O$  on lävistäjien leikkauspiste. Tästä seuraa väitös.

4.  $36\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 62,354 \text{ cm}^2$  ja  $180\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 311,769 \text{ cm}^2$ . — Lävistäjä on kolmas sivu kolmiossa, jossa kaksi sivua on  $= 12 \text{ cm}$  ja välinen kulma  $= 120^\circ$ ; siis lävistäjä  $= 12\sqrt{3} \text{ cm}$ .

5.  $\frac{46080\pi}{13} \text{ cm}^2 = 11136 \text{ cm}^2$ . Jos paperista laetaan tötterö (strut) ja siihen paanataan pallo, niin saadaan esimerkissä oleva tapaus. Tötterön kärjen ja sen pallolla olevan sivuamisviivan rajoittaman kartion aseman säde  $= 4\frac{80}{3} \text{ cm}$  ja kartion sivuviiva  $= 96 \text{ cm}$ .

6.  $x = 5\frac{1}{2}$ ;  $y = 4\frac{1}{8}$  ja  $z = 1\frac{1}{8}$ . Ota nimittäjät apu-tuntemattomiksi!

7. Virran nopeus on 5 km tunnissa ja kummankin höyrylaivan nopeus virrattomassa vedessä 20 km tun-

nissa. — Jos edellinen nopeus on  $x$  ja jälkimäinen  $y$  km tunnissa, niin yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} (10\frac{3}{4} - 6)(y + x) + (10\frac{3}{4} - 8)(y - x) = 160 \\ (11\frac{1}{4} - 8)(y + x) + (11\frac{1}{4} - 6)(y - x) = 160. \end{cases}$$

8. Joko 60 tahi 20 osanottajaa.

9.  $42^\circ 29'$ . — T., R., V. ja L. ovat sen ympyrän kehällä, jonka keskipiste on  $O$ . Sitäpaitse ovat L. ja R. saman halkasijan päätepisteinä.

10.  $42^\circ 43' 13''$ .

## 1906. S.

1. Takapyörän halkaisija on 66 cm ja etupyörän halkaisija 48 cm.

2. Olkoon ympyrän säde  $= r$  ja neliön sivu  $= a$ . Piirrä mallikuvio, jossa ympyrän keskipiste on  $O$  ja vinoneliö ABCD! Jos  $AB = x$ , niin yhtälöstä  $2rx = a^2$  saadaan  $x$ :n pituus. Sen asento ympyrän suhteen saadaan seuraavan keskustelun perustuksella: Minkälainen kolmio on AOB? Miten piirretään suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa ja sitä vastaava korkeusviiva tunnetaan? Miten jatketaan?

3. Piirrä ympyrän keskipisteestä kohtisuorat sekä jännettä että sen päätepisteihin piirrettyjä kohtisuoria vastaan! Saadaan kaksi ympyrän keskipisteestä piirrettyä kohtisuoraa yhtäsuuriksi (todista!) ja sen nojalla kaksi suorakulmaista yhteellistä kolmiota, joissa vastaavina sivuina juuri ovat yhtäsuuriksi todistettavat janat.

4. Syntyy paitse keskellä olevaa pientä neliötä, neljä kolmiota ja neljä puolisuunnikasta. Todista, että

yhden kolmion ja yhden puolisuunnikkaan summa on  
 = keskellä oleva pieni neliö. Siis tämä pieni neliö  
 = viides osa ABCD-neliöstä =  $\frac{3}{5} \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$ .

5. 4 cm.

6.  $\frac{3}{2}$  ja  $\frac{2}{3}$ . Toteuttavatko annetun yhtälön? — Vie yksi termeistä oikealle puolelle ja korota neliöön sekä senjälkeen saatu juuritermi yksin toiselle ja muut termit toiselle puolelle ja korota taas neliöön!

7. Se velka, josta korko on 6 %, on 7500 mk ja toinen velka 3000 mk.

8. 4 sekunnin kuluttua. Jos otaksutaan, että pallo-  
 lot voivat tunkeutua toistensa lävitse, niin sivuavat  
 ne toisensa myöskin 12 sekunnin kuluttua. (Katso  
 1901. K., esim. 4!)

9.  $25^\circ 23' 34''$ . Ota piste O, joka on etelään päin  
 B:stä ja itään päin A:sta! Tasakylkisestä suorakulmai-  
 sesta kolmiosta AOB saadaan  $AO = OB = \frac{23}{\sqrt{2}} \text{ km}$ .

Suorakulmaisesta kolmiosta AOC muodostetaan  $\frac{AO}{OC} =$   
 $\text{tg } C = \text{tg}$  etsittävälle kulmalle.

10. Yhtälö on

$$960 = 196t - \frac{9,8t^2}{2},$$

josta 
$$\begin{cases} t_1 = 5\frac{1}{2} \\ t_2 = 34\frac{2}{3} \end{cases}$$

Kappale on  $5\frac{1}{2}$  sekunnin kuluttua noussut 960 met-  
 rin korkeudelle ja on menossa ylöspäin, mutta se on  
 myöskin  $34\frac{2}{3}$  sekunnin kuluttua samalla korkeudella  
 palatessaan alaspäin.

1907. K.

1. 1794:901.

2. Olkoon tunnetun kolmion sivu a ja etsittävän  
 kolmion vastaava sivu x! Silloin on

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{3}{5},$$

$$\text{josta } x = \sqrt{\frac{3a}{5}}.$$

Miten x piirretään? Miten sitten saadaan alkupe-  
 räisen kolmion kanssa yhdenmukainen kolmio?

3. Kuinka suuri on jänteen etäisyys suuremman  
 ympyrän keskipisteestä? Jos suuremman ympyrän säde  
 on R ja pienemmän säde r sekä jänteen puolikas a,  
 niin saadaan  $R^2 - r^2 = a^2$ , josta  $x$ llä kertomalla tulee  
 tulokseksi väitös.

4.  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,618$ . Olkoon säännöllinen viisikui-

mio ABCDE ja siinä lävistäjä AC, joka pisteissä F ja  
 G leikkaa lävistäjiä BE ja BD. Jana AG jakaantuu  
 F-pisteessä jatkuvaisessa suhteessa (katso 1887, esim. 5).  
 Saadaan  $AG:AF = AF:FG$ . Nyt on  $AG =$  suurem-  
 man viisikulmion sivu s ja FG on pienemmän viisi-  
 kulmion sivu t sekä  $AF = AG - FG = s - t$ , joten  
 verrantomme kuuluu

$$\frac{s}{s-t} = \frac{s-t}{t},$$

josta ratkaisemalla s:n suhteen saadaan

$$s = \frac{(3 \pm \sqrt{5})t}{2}$$

Kelpaavatko molemmat s:n arvot? Miksi  $\frac{(3 - \sqrt{5})t}{2}$   
 ei kelpaa?

5. 7:8. (Katso 1904. S., esim. 5).

6.  $a=0$  tahi  $a=13\frac{1}{2}$ . Kun ratkaistaan  $x$ :n suhteen, saadaan

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 3a}.$$

Kumpi  $x$ :n arvo pannaan  $=2$  kertaa toinen  $x$ :n arvo? Myöskin voi tehtävän suorittaa käyttämällä hyväksyen toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia.

7. 44-vuotias saa 913 mk 50 p. ja toinen 571 mk 50 p.

8. 2 tunnissa. Yhtälö on  $1\frac{1}{2}(\frac{72}{x} - 2) + (x + \frac{1}{4} - 1\frac{1}{2})(\frac{72}{x} - 8) = 72$ , jossa  $x$  on etsittävä tuntimäärä.

9.  $3,1415929203$ ..... Olkoon suorakulmaisessa kolmiossa ABC kateetti AB  $\frac{7}{8}$  toisesta kateetista BC! Silloin, jos kulma ACB on  $a$ , saadaan

$$1) \operatorname{tg} a = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{8}.$$

Siitä suorakulmaisesta kolmiosta, jossa kulma  $= 2a$  ja sen toinen kylki  $= \frac{16d}{15}$  ( $d$  on ympyrän halkaisija) ja tämän projektsiooni toisella kyljellä  $= b$ , tulee

$$2) \cos 2a = \frac{15b}{16d} \quad 1 - \operatorname{tg}^2 a$$

$$\text{Nyt on } \cos 2a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

johon sijoitetaan  $\operatorname{tg} a$ :n sijaan  $\frac{7}{8}$  ja saadaan

$$3) \cos 2a = \frac{15}{113}.$$

Yhtälöistä 2) ja 3) johtuu

$$\frac{b}{d} = \frac{16}{113}.$$

Etsittävän janan ( $x$ ) pituuden suhde halkaisijaan on

$$x = \frac{3d + b}{d} = 3 + \frac{b}{d} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113} = 3,1415929203 \dots$$

(Matemaatikko Peter Metius'en arvo).

Vertauksen vuoksi mainittakoon, että oikea  $\pi$ :n arvo on  $3,1415926535 \dots$ . Siis saatu  $\pi$ :n arvo eroaa oikeasta vasta 7:nneellä desimaalilla.

Koeta suorittaa tehtävä logaritmeja käyttämällä!

10.  $-27\frac{1}{8}$  asteeseen. Yhdistetyn Gay-Lussac-Mariotten lain mukaan saadaan

$$\begin{cases} 750 \cdot v_1 = b_0 v_0 (1 + \frac{50}{273}) \\ 760 \cdot \frac{3v_1}{4} = b_0 v_0 (1 + \frac{1}{273}). \end{cases}$$

## 1907. S.

1. Suhteessa 15625:1536. Olkoon aukon suuruus  $a$  dm<sup>2</sup>! Maksakoon 1 dm<sup>2</sup> lasia  $m$  markkaa! Silloin aukon täyttävä suuri ruutu maksaisi  $(\frac{15a}{16})^3$   $m$  mk ja kukin kolmesta pienestä ruudusta  $(\frac{3a}{10})^3$   $m$  mk. Näitten hintojen suhde  $= \frac{15625}{512}$ , josta etsittävä suhde  $\frac{15625}{3 \cdot 512}$ .

2. Minkälainen on etsittävä kolmio, kun huomaa, että  $3^2 + 4^2 = 5^2$ ? Olkoon etsittävän suorakulmaisen kolmion kateetit  $x$  ja  $y$  sekä tunnetun kolmion asema  $a$  ja korkeus  $k$ ! Mikä yhtälö näitten kirjainten kesken saadaan? Mitä on  $x:y$ ?  $x$ :lle ja  $y$ :lle tulee helposti piirrettävät lausekkeet.

3. Yhdistä B-piste pisteihin C, A ja D! Kuinka suuret ovat kulmat ABC ja ABD? Kuinka suuri siis CBD-kulma? Huomaa, että ympyröiden keskipisteet voivat olla joko samalla puolella tai eri puolilla jännettä AB.

4. 48 cm. Piirrä halkaisija jännteellä annetun pisteen kautta. Saadaan kaksi sekantia, jotka leikkaavat toisensa tässä pisteessä.

$$5. \text{ Sylinterin asemasäde } = \frac{2 r \cdot k}{3 \sqrt{k^2 + r^2}} \text{ ja korkeus } = \frac{3(k^2 + r^2)}{4k}, \text{ jossa kartion asemasäde on } r \text{ ja korkeus } k.$$

$$6. \frac{12x + 9 - 2\sqrt{30}}{12x - 9 + 2\sqrt{30}}. \text{ Pane osottaja } = 0 \text{ ja ratkaise näin saatu yhtälö; osottaja on } = 48 \text{ kertaa } (x - \text{ensim. juuri}) \text{ kertaa } (x - \text{toinen juuri}). \text{ Samaten menettele nimittäjän suhteen! Supista!}$$

7. 42 kg. Jos kilogramman hinta alkuaan on a mk. ja x on etsittävä kilogrammamäärä, niin yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} (x - 2) a = 100 \\ x \cdot \frac{95a}{100} = 99,75. \end{cases}$$

8. 20 henkilöä ja jokaisen olisi maksettava 75 penniä. Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} (x - 8)(y + 50) = xy \\ (x - 8)(y + 50) + 8(y + 50) + 500 = 2xy, \end{cases}$$

jossa x on henkilömäärä ja y pennimäärä.

9. 39,113 metr. Yhtälö on  $\frac{x}{7,5 + x} = \operatorname{tg} 40^\circ$ , jossa x on etsittävä etäisyys.

$$10. \sqrt[3]{\frac{36\pi}{1,19^2}} \text{ dm}^2 = 4,3065 \text{ dm}^2.$$

## 1908. K.

1. 9,1 %. Paljonko maksoi 26,5 kg maltaita ennen ja nyt? Paljonko 100 litraa olutta ennen ja nyt? Suuriko voitto ennen ja nyt? Mikä voiton lisäys entisestä? Montako % nykyisestä oluen hinnasta on voitonlisäys?

2. Etsittävän ympyrän säde on annetun ympyräneljänneksen säteen puolikas.

3. Kolmiossa ABC olkoon AC-sivun keskipisteen kautta piirretty kohtisuora EF ja olkoon B-kulman puolittaja BD! Piirretään kolmion ympäri ympyrä ja EF leikkaa ympyrän kehän kahdessa pisteessä, joista se leikkauspiste, joka on jängteen AC sillä puolella, jolla ei ole B, merkitään L, sekä leikatkoon BD saman kehän pisteessä O! Kohtisuora EF jängnettä AC vastaan sen keskipisteen kautta puolittaa vastaavan AC-kaaren; siis ovat kaaret AL ja CL yhtäsuuret eli L on AC-kaaren keskipiste. Koska kehäkulmat ABO ja CBO ovat yhtäsuuret, niin ovat vastaavat kaaret AO ja CO yhtäsuuret eli O on AC-kaaren keskipiste. Siis kumpikin, sekä EF että BD, kulkee AC-kaaren keskipisteen kautta eli EF ja BD leikkaavat toisensa kolmion ympäri piirretyn ympyrän kehällä eikä niinmuodoin tämä leikkaus voi tapahtua kolmion sisällä.

4. Jos ympyrän säde on r ja kehä P, niin ympyrän ala  $A = \frac{P \cdot r}{2}$ . Egyptiläisten mukaan on  $A = (\frac{8}{9} \cdot 2r)^2 = \frac{256}{81} r^2$ . Saaduista A:n arvoista johtuu

$$\frac{P}{2r} = \frac{256}{81} = 3,1604 \dots$$

Vanhoiden egyptiläisten  $\pi$ :n arvo eroaa siis oikeasta  $\pi$ :n arvosta jo toisella desimaalilla. (Vertaa 1907. K., esim. 9!).

$$5. \frac{13230}{24389}$$

$$6. \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{ab + b^2}}{b}$$

7. Vetäköön ensimmäinen laatikko a litraa ja toinen b litraa. Paljonko on alkuaan ensin. laatikossa multaa? Paljonko on ensin. laatikossa (samaa) multaa senjälkeen, kun toinen laatikko on täydellisesti täytetty ensimmäisestä laatikosta otetulla mullalla? Paljonko on ensin. laatikossa sellaista multaa, jota siinä alkuaan oli, senjälkeen kun toisessa laatikossa nyt olevat multasekotukset huolellisesti ovat sekotetut ja siitä ensin. laatikko täydellisesti on täytetty? Saadaan yhtälö

$$a - \frac{b}{2} + \frac{b}{4} = \frac{5a}{7},$$

josta

$$b = \frac{8a}{7} = a + \frac{a}{7}.$$

Saamme siis vastaukseksi: toinen laatikko on yksi seitsemäs osa suurempi kuin ensimmäinen laatikko.

8. Rahasumman x mk osat olkoot y mk ja z mk sekä prosentti p. Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} 1) y + z = x \\ 2) x + \frac{x \cdot p \cdot 8}{100 \cdot 12} = 9360 \\ 3) y + \frac{y \cdot p \cdot 6}{100 \cdot 12} = 3090 \\ 4) z + \frac{z \cdot p \cdot 12}{100 \cdot 12} = 6360. \end{cases}$$

Määrää yhtälöistä 2), 3) ja 4) x:n, y:n ja z:n arvot p:ssä sekä sijoita näin saadut arvot yhtälöön 1). Näin saat, p tuntemattomana, yhden yhtälön, joka normaali-muodossa kuuluu

$$p^2 + 294 p - 1800 = 0,$$

josta

$$\begin{aligned} p_1 &= 6 \\ p_2 &= -300. \end{aligned}$$

Vastaus: Summa on 9000 mk ja prosentti 6.

9. 49,955 cm. Saadaan yhtälö

$$\sin 12^\circ 8' = \frac{10,5}{r},$$

jossa r on säde.

10. 10 kg. Yhtälö on

$$x(100 - 37) + x \cdot 537 = 250(37 - 13),$$

jossa x on etsittävä kilogrammamäärä.

## 1908. S.

1. 3 mk. Jos alkuperäisesti sovittu päiväpalkka on x mk ja y on miesten luku, jotka työnantaja »10 päivää myöhemmin otti työhön», niin on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4 \cdot 10 + 20 \cdot 6 + 10y = 20 \cdot 10 \\ 4 \cdot 10x + 20 \cdot 6x \left(1 + \frac{20}{100}\right) + 10y \cdot 3,50 = 20 \cdot 10x + 92. \end{cases}$$

2. Piirrä nelikulmioon ABCD lävistäjä AC sekä B:stä kohtisuora h AC:tä vastaan ja D:stä kohtisuora k AC:tä vastaan. Merkitse AC d:ksi! Jos x on tasakylkisen suorakulmaisen kolmion kateetti, niin on yhtälö

$$\frac{x^2}{a} = \frac{hd}{2} + \frac{kd}{2},$$

josta saadaan, että x on (h + k):n ja d:n keskiproportsionaali.

3.  $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$ , josta  $\angle ADE = \angle A'D'E'$  ja tästä  $\angle BDE = \angle B'D'E'$ , ja siitä taas  $\angle B = \angle B'$ . Samaten todistetaan, että  $\angle C = \angle C'$ . Siis saadaan väitös. — Koeta, pitääkö väitös paikkansa, jos kolmiot ABC ja A'B'C' eivät ole teräväkulmaisia!

$$4. 2(\pi - 2) \text{ cm}^2 = 2,283 \text{ cm}^2.$$

5. Syntyneiden kappalten kokonaispinta-alojen suhde on 1. — Olkoon tasasivuisen kolmion sivu  $a$  ja neliön sivu  $s$ ! Silloin on  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = s^2$ . Saadun kaksoiskartion kokonaispinta-ala  $= \pi a^2\sqrt{3}$  ja sylinterin kokonaispinta-ala  $= 4\pi s^2 = \frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{4} = \pi a^2\sqrt{3}$ . Siis näitten kappalten kokonaispinta-alat ovat yhtäsuuret.

6.  $a^2 + b^2 = (a - b)^2$ . Saadaan joko täydellisesti ratkaisemalla annettu yhtälö ja ottamalla juurten neliöitten summa tahi käyttämällä hyväkseen toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia.

7. 10 %.

8. Pitempi tie suhtautuu lyhyempään  $= 7:4$ . Sen jalkamiehen, joka lähti pitempää tietä, nopeus on  $\frac{6}{7} \frac{s_2}{120}$  metr. min:ssa ja toisen nopeus on  $\frac{s_1 + \frac{s_2}{7}}{120}$  metr. min:ssa, jos  $s_1$  on lyhempi ja  $s_2$  pitempi tie. Yhtälö on

$$\frac{s_1 + s_2}{\frac{6}{7} \cdot s_2} + 44 = \frac{s_1 + s_2}{s_1 + \frac{s_2}{7}},$$

josta ratkaisemalla  $s_2$ :n suhteen saadaan

$$s_2 = \frac{7s_1}{4}.$$

9.  $12,82 \text{ cm}^2$ . Saadaan: ala  $= \frac{5}{4} \cdot 2,73^2 \sqrt{1} + \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5}$  tahi trigonometrisesti

$$\text{ala} = \frac{2,73 \cdot 2,73 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot \text{tg } 36^\circ}.$$

10. 11,4. Jos  $x$  on etsittävä ominaispaine, niin on volyymin yhtälö

$$\frac{135}{x} + 36\pi = 135 + 0,3 \cdot 36\pi - 44.$$

## 1909. K.

1. Aineitten hinta laskettiin  $\frac{2}{3}$ ksi koko kustannusmäärästä.

2. Syntyy (tasakylkisiä) sentrikolmioita; jos toisen kolmion ympyrän keskipisteessä oleva kulma on  $\alpha$ , niin on toisen kolmion toisen ympyrän keskipisteessä oleva kulma  $(180^\circ - \alpha)$ . Edellisen tasakylkisen kolmion asemakulma  $= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  ja jälkimmäisen kolmion asemakulma  $= \frac{\alpha}{2}$ . Jos yhdistysjanojen tekemä kulma  $= x$ , niin yhtälö on

$$\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + x + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ,$$

josta

$$x = 90^\circ.$$

3. Olkoon annetun neliön sivu  $a$  ja etsittävän neliön sivu  $x$  sekä olkoon etsittävän neliön kärkipiste annetun neliön sivulta  $y$ -matkan päässä annetun neliön kärkipisteestä! Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{2}{3} \\ y^2 + (a - y)^2 = x^2. \end{cases}$$

Nämä yhtälöt antavat  $y = \frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{3}}{6}$ . Kelpaavatko molemmat  $y$ :n arvot? Miten  $y$  piirretään ja miten käy muuten jatketaan?

4. 1:3.

5. Jos ympyränsektorin piiri on  $a$  ja kaari  $l$ , niin säde on  $\frac{a-l}{2}$  ja sektorin ala  $= \frac{al - l^2}{4}$ , joka pannaan  $= m$  (maksimi-arvo). Tästä saadaan  $m = \frac{a^2}{16}$  ja kaari  $l = \frac{a}{2}$  sekä säde  $\frac{a}{4}$ . Verrannosta

$$\frac{x}{360} = \frac{\frac{n}{2}}{2\pi \cdot \frac{a}{4}}$$

tulee etsittävän sentrikulman  $x$ :n arvoksi

$$x = \frac{360^\circ}{\pi} = 114^\circ,5915590 \dots = 114^\circ 35' 30''.$$

6. Koska  $CA \perp AB$  ja  $DA \perp AB$  pisteessä  $A$ , niin on  $\angle CAD$  tasojen  $ABC$  ja  $ABD$  välisen diderikulman mitta.  $AB$ :n kautta asetettu taso leikatsoon  $DC$ :n pisteessä  $E$ ! Saadaan

$$\text{Osa I: osa II} = \frac{\triangle CAE \cdot AB}{3} : \frac{\triangle DAE \cdot AB}{3} = \frac{\triangle CAE}{\triangle DAE} = \frac{AE \cdot AC}{AE \cdot AD} = \frac{AC}{AD}.$$

Tarvitseeko  $CAD$  kulman olla  $90^\circ$ ?

7.  $x = a$ ;  $y = b$ ;  $z = a + b$ . Jos yhtälöt merkitään 1), 2), ja 3), niin laske 3) + 2) ja 3) - 2) ilman sulkumerkkien hävittämistä; saadaan  $z + x - y = 2a$  ja  $z - x + y = 2b$ , joista yhteenlaskemalla  $z = a + b$  ja vähentämällä  $x - y = a - b$ . Jos 1):een sijoitetaan  $z$ :n sijaan  $a + b$ , saadaan  $x + y = a + b$ , joka yhtälön  $x - y = a - b$  kanssa antaa  $x = a$  ja  $y = b$ .

8. 15 grammaa kuparia. Hopeamäärä  $\frac{25 \cdot 60}{x + 60} =$  kuparimäärä  $x + \frac{25x}{x + 60}$ , jossa  $x$  on etsittävä kuparimäärä.

9. Puolisuunnikkaan kulmat ovat  $71^\circ 33' 54,4''$ ;  $108^\circ 26' 05,6''$ ;  $71^\circ 33' 54,4''$  ja  $108^\circ 26' 05,6''$ . Olkoon puolisuunnikas  $ABCD$ , jossa  $AD = 2 \cdot BC$ ! Lävistäjien  $AC$  ja  $BD$  leikkauspiste olkoon  $O$ ! Silloin  $AO = DO = 2 \cdot BO = 2 \cdot CO$ ;  $\text{tg} \angle BAC = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{2}$ , josta  $\angle BAC = 26^\circ 33' 54,4''$ , johon lisätään  $45^\circ$  ja saadaan kulma  $A$ . Muut puolisuunnikkaan kulmat saadaan tästä helposti.

10.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  kg = 0,577 kg. Jos rihman jännitys on  $x$  kg, niin samansuuntainen ja saman vaikutuksen aikaansaava voima sauvan painopisteessä olisi  $2x$  kg. Jaa kappaleen paino kahteen komposanttiin: toinen sauvan suuntainen ja toinen vaakasuora; edellinen komposantti on  $2\sqrt{x^2 + 1}$  ja jälkimäinen  $2x$ . Yhtälö on

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ josta } x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

## 1909. S.

1. 9 gr.

2. Piirrä  $FK \perp AB$ ! Mistä tiedetään, että viiva  $CFK$  on suora viiva? Kulmat  $BAD$  ja  $FCD$  ovat yhtäsuuret (mistä syystä?) ja tästä saadaan väitös helposti.

3. Ympyrän  $O$  sisällä oleva tunnettu piste  $A$  keskipisteenä piirretään tunnettu  $a$ -jana säteenä ympyrän kaari, joka leikkaa annettua ympyrää pisteessä  $B$ . Sitten annettuun ympyrään piirretään  $AB$ :n suuruinen ja suuntainen jänne  $DC$ . Suunnikas on  $ABCD$ . Jänne  $DC$  saadaan seuraavalla tavalla: Ensiksi asetetaan tunnettuun ympyrään jänne  $= a$ ; sitten piirretään  $O$  keskipisteenä ympyrä, joka sivuaa  $AC$ :ta. Nyt piirretään  $O$ :n kautta kohtisuora  $AB$ :tä vastaan; siinä pisteessä, missä kohtisuora leikkaa äsken saatua ympyrää, on  $DC$  kohtisuorassa tätä kohtisuoran vastaan. — Montako ratkaisutulosta saadaan?

4. 5:4.

5. Lauseke voi saada ne reaaliarvot, jotka ovat joko yhtäsuuret tai pienemmät kuin 2. — Etsi lausekkeen maksimi- ja minimiarvot!

6. 916.

$$7. \frac{\pi \cdot 32 \sqrt{12}}{3} \text{ cm}^3 = 116,08 \text{ cm}^3.$$

8. Kustannukset olivat 500 mk. Jos kustannukset olivat  $x$  mk sekä 3 markan pilettejä oli  $m$  ja 5 markan pilettejä  $n$  kappaletta, niin mitenkä kuuluvat yhtälöt? Saadaan  $m = 300$ ,  $n = 200$  ja  $x = 500$ .

$$9. 48^\circ 35' 25''.$$

$$10. \frac{0,7 \cdot 9,81 \cdot 2}{\sqrt{2}} \text{ metriä sekunnissa} = 9,711 \text{ metriä sekunnissa.}$$

### 1910. K.

1. Puolisuunnikkaissa ABCD ja EFGH olkoon  $AB = EF$ ,  $DC = HG$ ,  $\angle A = \angle E$  ja  $\angle C = \angle G$ . — Mistä seuraa, että  $\angle D = \angle H$  ja  $\angle B = \angle F$ ? Piirrä  $BL \parallel AD$  ja  $FM \parallel EH$ ! Todista, että  $\triangle BLC \cong \triangle FMG$  (2 kulmaa ja yksi sivu)! Siis  $BC = FG$  ja  $BL = FM$  ja koska  $ABLD$  ja  $EFMH$  ovat suunnikkaita, niin  $AD = EH$ . Puolisuunnikkaissa ovat vastaavat osat yhtäsuuret ja kuviot siis yhteelliset.

2. Olkoon ympyrän keskipiste  $O$ ! Minkä jokaisessa ympyrässä olevan kulman asteluku on sama kuin kaaren asteluku? Mitä tiedetään niistä kulmista, joista jänne  $BC$  näkyy  $A$ :ssa ja  $O$ :ssa? Siis löytyvät pisteet  $A$ ,  $O$  ja  $B$  saman ympyrän kehällä.

3.  $\frac{a}{5}$ . Säde on  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  ja jos  $x$  on neliön sivu, niin on yhtälö

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

4.  $8 \text{ cm}^3$ . Saadun pyramiidin asema olkoon tasasuvinen kolmio  $ABC$  ja olkoon pyramiidin kärki sekä  $OB$  kohtisuorassa asemaa vastaan! Jos  $AC:n$

keskipiste on  $K$ , joka yhdistetään  $O:n$  ja  $B:n$  kanssa, niin missä asennossa ovat  $OK$  ja  $BK$  sivun  $AC$  suhteen? Saadaan  $\angle OKB = 45^\circ$ . (Huomaa, että  $\angle OAB = \angle OCB$  ei ole  $45^\circ$  suuri!) Kuinka pitkä on  $BK$ ? Kuinka suuri kolmion  $ABC$  ala? Kuinka pitkä on  $OB$ ?

5. Nopeampikulkuisen nopeus olkoon  $x$  ja toisen  $y$  km min:issa. Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} 200x + 200y = 90 \\ \frac{90}{x} = \frac{90}{y} - 90 \end{cases},$$

josta

$$x = \frac{1}{4} \text{ ja } y = \frac{1}{5} \text{ km minuutissa.}$$

Vastaus: nopeampikulkuinen kulkee 15 ja hitaampi 12 km tunnissa.

6.  $18,4$  penniä. Jos  $a$  kg:ssa maitoa on  $b$  kg kermää, niin on yhtälö (rasvamääriä osottava)

$$\frac{15,5b}{100} + \frac{0,5(a-b)}{100} = \frac{3,5a}{100},$$

josta

$$b = \frac{a}{5} \text{ ja } a - b = \frac{4a}{5}.$$

Kermamäärästä  $\left(\frac{a}{5} \text{ kg}\right)$  sai maanviljelijä  $\frac{80a}{5}$  penniä ja kuoritun maidon määrästä  $\left(\frac{4a}{5} \text{ kg}\right)$  sai hän  $\frac{3 \cdot 4a}{5}$  penniä. Siis  $a$  kg:sta kuorimatonta maitoa sai hän  $\frac{80a}{5} + \frac{3 \cdot 4a}{5}$  penniä, josta kilogramman hinnaksi tulee alussa ilmoitettu rahamäärä.

$$7. a = 2, b = -5 \text{ ja } c = 3.$$

Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 6 \\ \frac{c-1}{a} = 1. \end{cases}$$

8. 1:o. Kokonainen luku  $a$  on joko tasan jaollinen 5:llä tai jättää jäännökset 1, 2, 3 tai 4. Voidaan siis merkitä

$$\left. \begin{aligned} a &= 5k \\ a &= 5k + 1 \\ a &= 5k + 2 \\ a &= 5k + 3 \\ a &= 5k + 4 \end{aligned} \right\} \text{joissa } k \text{ on kokonainen luku.}$$

Lauseke  $a^5 - a = a(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$ . Jos tähän lausekkeeseen sijoitamme vuorotellen  $a = 5k$ ,  $a = 5k + 1$  j. n. e., niin huomaamme, että luku 5 aina tulee lausekkeemme tekijäksi, joten siis väitös on todistettu.

2:o. Väitös voidaan todistaa oikeaksi myös tavallisen induktionitodistuksen avulla: otaksutaan, että väitös on tosi, jos  $a = n$  ja todistetaan, että väitös kelpaa, kun  $a = n + 1$ . Siis  $n^5 - n$  olkoon jaollinen 5:llä! Saamme  $(n + 1)^5 - (n + 1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = (n^5 - n) + (5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n)$ . Koska  $(n^5 - n)$  on otaksumisen mukaan 5:llä jaollinen ja jälkimäinen sulkumerkkilauseke myös on 5:llä jaollinen, niin on  $[(n + 1)^5 - (n + 1)]$  5:llä jaollinen. — Olemme siis todistaneet, että, jos väitös kelpaa, kun  $a = n$ , niin kelpaa väitös, kun  $a = n + 1$ . — Jos  $n = 2$ , niin saadaan  $a^5 - a = 2^5 - 2 = 30$ , siis 5:llä jaollinen. Koska väitös kelpaa, kun  $a = n = 2$ , niin kelpaa se, kun  $a = n + 1 = 3$ ; koska väitös kel-

paa, kun  $a = 3$ , niin se kelpaa, kun  $a = 3 + 1 = 4$ , j. n. e. Siis väitös kelpaa yleisesti.

9.  $Ala = 5 \cdot \sin 72^\circ \cdot 5 \sin 72^\circ \cdot \text{ctg } 36^\circ \text{ cm}^2 = 31,124 \text{ cm}^2$ .

10. 0,981 m. Kiihtyväisyys  $a$  saadaan yhtälöstä  $(3 + 2) \cdot a = (3 - 2) g$ , ja sijoitetaan matkan kaavaan.

1910. §

1. Luvut ovat

joko 140 ja 9800  
tahi 280 ja 4900  
tahi 700 ja 1960  
tahi 980 ja 1400.

Voidaan kirjoittaa

$x = 140a$ ,  
 $y = 140b$  } joissa  $a$  ja  $b$  ovat keskenään jaottomia lukuja.

Nyt saadaan  $9800 = 140 \cdot a \cdot b$ , josta  $a \cdot b = 70$ ; siis on 70 jaettava kahteen tekijään, jotka ovat keskenänsä jaottomia. Mitkä eri tekijäparit saadaan? Kun nämä sijoitetaan  $x$ :n ja  $y$ :n arvoihin, saadaan alussa ilmoitetut luvut.

2. 180 cm<sup>2</sup>. Mitenkä jakaa A-kulman puolittaja BC-sivun? Mitenkä jakaa määrättävän suorakulmaisen kolmion korkeusviiva AC tämän kolmion hypotenuusan?

3. 80 dm<sup>2</sup>. Jos kokoliittilevyn suuruus on  $x$  dm<sup>2</sup>, niin on yhtälö

$$\frac{2000}{x} = \frac{2000}{x + 20} + 5.$$

$$4. \begin{cases} x = abc \\ y = ab + ac + bc \\ z = a + b + c \end{cases}$$

5. Olkoon D-piste AC-kaarella! Yhdistä D ja B! Saadaan  $\triangle DAB \sim \triangle BAE$ . (Mistä syystä?) Tästä johdetaan väite.

6. Olkoon tasasivuisen kolmion ABC kärjen C:n kautta kulkevan suoran etäisyys A:sta  $r_1$  ja B:stä  $r_2$ ! Minkä kappaleen sivupinta muodostuu AB:n liikunnan kautta ja kuinka suuri tämä pinta on? Mitä pintoja BC:n ja AC:n liikunnan kautta syntyy ja kuinka suuri näitten pintojen summa on?

7.  $56^\circ 0' 44''$ . Ympyrän keskipiste O yhdistetään janteen keskipisteen K:n kanssa. Ympyrän sisällä annetussa pisteessä A jakaantuu jänne kahteen osaan, joista pienempi on  $\frac{5r - r\sqrt{5}}{6}$ . Kun tämä vähennetään janteen puolikkaasta, saadaan AK, jonka suhde OA:han on etsittävän kulman OAK kosinus. Yhtälö on

$$\cos OAK = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

8.  $2\sqrt{51}$  metriä sekunnissa =  $14,283$  metriä sekunnissa. Tässä saadaan toinenkin arvo nopeudelle, nimittäin  $-2\sqrt{51}$ ; mitä tämä arvo ilmoittaa?

## 1911. K.

1.  $17,6\%$  sinkkiä. Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \frac{y \cdot 37,6}{100} = 21,9 \\ \frac{z \cdot 32,5}{100} = 7,8, \end{cases}$$

jossa  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ovat sinkin, kuparin ja nikkelin prosenttimäärät.

2. Jos B:stä piirretty suora leikkaa AC:tä pisteessä D ja C:stä piirretty suora AB:tä pisteessä E, niin  $\triangle BAC \sim \triangle BCE$ , josta  $\angle BEC = \angle BCA$ , ja nyt  $\triangle BCE \sim \triangle DBC$ , josta seuraa väite.

3. Olkoot  $a$  ja  $b$  annetun suorakaiteen sivut ja etsittävän suorakulmaisen kolmion kateetti olkoon  $x$ ! Kuinka pitkä on toinen kateetti? Saadaan

$$x = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}} \cdot b,$$

$\frac{a}{\sqrt{2}}$  on sivu neliössä, jonka lävistäjä on  $a$ . Miten  $x$  piirretään? Miten etsittävä suorakulmainen kolmio?

4.  $\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2 = 2,256 \text{ cm}^2$ . Se kuvio, jonka ala on määrättävä, on puoliympyrän ja ympyräsegmentin erotus. Puoliympyrän halkaisija AC on  $2\sqrt{3}$  cm sekä ympyräsegmentin kaari on  $120^\circ$  ja säde 2 cm.

5. Olkoon  $AB = a$  ja  $BC = b$ ! Jos B:n kautta piirretyn suoran se osa (jänne), jota rajoittaa ympyränkaari ja B, merkitään  $z$ , sekä se osa, jota rajoittaa kohtisuora ja B, merkitään  $x$ , niin saamme  $z = \frac{ab}{x}$  (yhdenmukaisista kolmioista) ja

$$x + \frac{ab}{x} = m \text{ (minimi-arvo).}$$

Tästä saamme minimi-arvoksi  $m = 2\sqrt{ab}$ , jota vastaa  $x = \sqrt{ab}$  ja jänne  $z = \frac{ab}{x} = \sqrt{ab}$ . Jos otaksumme, että  $a < b$ , niin  $a < \sqrt{ab} < b$ , ja huomaamme, että  $z$  ei sovi jänneksi ympyrään, jonka halkaisija on  $a$ , vaan joutuu toiseen ympyrään. Saamme siis vastaukseksi: lyhin etsittävistä suorista on  $= AB$ :n ja  $BC$ :n keskiproportsionaali kerrottuna luvulla 2 sekä jaka-

tuu tämä minimijana B:ssä kahteen yhtäsuureen osaan joista toinen on suuremmassa ympyrässä (puoliympyrässä) jänteenä ja toista rajoittaa B ja pienemmän puoliympyrän puoleinen kohtisuora.

6. Saadaan

$$\log_{10} x = -1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2},$$

josta

$$x = 10^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1000}} = \frac{\sqrt{10}}{100} = \frac{3,16228}{100} = 0,03162.$$

7. 45 penniä. — Vene olkoon a neliometriä pinta-alaltaan ja maalatkoon maalari t tunnissa  $7 \text{ m}^2$  sekä olkoon tuntipalkka maalauksesta x penniä! Paljonko veneen puhdistus maksoi? Paljonko itse maalaus? Paljonko koko työ? Yhtälö on

$$\frac{at(x+10)}{3} + \frac{atx}{7} = \left(\frac{at}{7} + \frac{at}{3}\right) \cdot 38.$$

8.  $\frac{\sqrt{21}}{9} = 0,5092$ . Olkoon ympyrän säde R sekä

pienemmän kartion korkeus ja aseman säde  $k_1$  ja  $r_1$  suuremman kartion vastaavat janat olkoot  $k_2$  ja  $r_2$ !

Saadaan  $r_1 = \frac{2R}{5}$ ;  $k_1 = \frac{R\sqrt{21}}{5}$ ;  $r_2 = \frac{3R}{5}$ ;  $k_2 = \frac{4R}{5}$ .

Näitten arvojen avulla muodostetaan vastaus.

9. Jos x on kehäkulma, joka vastaa pienempää jännettä, niin on

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4},$$

josta

$$x = 36^\circ 52' 11''.$$

Siis ovat kaaret:

$$2 \cdot (36^\circ 52' 11'') = 73^\circ 44' 23''$$

ja

$$180^\circ - 73^\circ 44' 23'' = 106^\circ 15' 37''.$$

10. 3.32. Metalliseoksen ominaispaino olkoon x Paljonko lyijypala painostansa menettää veteen upotettuna? Paljonko se siis vedessä painaa? Paljonko painaa metalliseospala vedessä? Yhtälö on

$$1000 - \frac{1000}{x} = 1000 - \frac{1000}{11,5} = 214.$$

1911. S.

1. 95 %.

2.  $25 \text{ cm}^2$ . Suorakaiteen ABCD lävistäjien leikkauspiste olkoon O! Kulkekoon vinoneliön EF-sivu A:n kautta! Piirrä janat OE, OA ja OF! Leikatko OE sivua AD pisteessä K ja OF sivua AB pisteessä L! Määrä AK:n ja OK:n pituudet! Suorakulmaisesta OAE-kolmiosta saadaan  $EK:AK = AK:OK$ . Kuinka pitkä on EK? Kuinka suuri  $\triangle AED$ ? Kuinka pitkä on FL? Kuinka suuri  $\triangle AFB$ ? Miten sitten saadaan vinoneliön ala?

3. Ympyräviivojen leikkauspisteet olkoot A ja B! Kulma  $AO_1 B = \beta$  ja kulma  $AO_2 B = \alpha$ . Kuinka suuri on ympyrässä  $O_1$  kehäkulmaa  $AO_2 B$  vastaava sentri-kulma? Kuinka suuri on tämä sentrikulma verrattuna kulmaan  $\beta$ ?

4.  $x = \frac{a\sqrt{(2b)^2 - a^2}}{2b}$ . Siis ensin etsitään toinen kateetti suorakulmaisessa kolmiossa, jossa hypotenuusa on 2b ja toinen kateetti a. Sitten haetaan  $(2b):n$ , a:n ja saadun kateetin neljäs proportionaali.

5.  $p = 7$ . Koska  $(2x + 3)$  on oleva lausekkeen  $(6x^2 + px - 3)$  tekijänä, niin minkä suuruiseksi tekee lausekkeen  $(6x^2 + px - 3)$  se x:n arvo, joka toteuttaa yhtälön  $2x + 3 = 0$ . Mitenkä siis menetellään?

6.  $\frac{(m+n)^3}{3m^2n}$ , jos  $m$  kuuluu korkeusviivan kartiokärjen puoleiselle osalle ja  $\frac{(m+n)^3}{3mn^2}$ , jos  $n$  kuuluu sille. Saadaan edellisessä tapauksessa, että kartion ja sylinterin tilavuuksien suhde  $= \frac{\pi R^2 K}{3} : \pi r^2 k = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{K}{k} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot \frac{m+n}{n} = \frac{(m+n)^3}{3m^2n}$ .

7. 8,95 cm. Olkoon kaaren asteluku  $a$ ! Kuinka suuri on vastaavan sentrikulman puolikas? Yhtälö on

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{5}{8},$$

josta  $a = 102^\circ 38' 7''_{,5}$ . Nyt saadaan

$$\frac{\text{kaari}}{2\pi \cdot 5} = \frac{102^\circ 38' 7''_{,5}}{360^\circ} = \frac{369487,5 \text{ sek.}}{1296000 \text{ sek.}}$$

8. 3 metriä sekunnissa. Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} 6 = \frac{at^2}{2} \\ 24 = \frac{a(t+2)^2}{2}, \end{cases}$$

jossa  $a$  on kiihtyväisyys ja  $t$  se sekuntimäärä, joka on kulunut siitä hetkestä, jolloin pisteen alkunopeus oli 0, siihen hetkeen, jolloin se on suorittanut 6 metrin matkan.

## 1912. K.

1. 9975 mk. Huomaa: vesipitoisuudeltaan 58 prosenttista puumassaa sisältää 42 % puumassaa, ja puumassasta maksetaan.

2. ABC-kolmion korkeusviiva BK halkaisijana piirretty ympyrä leikatkoon AB-sivun pisteessä M ja BC-sivun pisteessä L! Yhdistetään pisteet M, L ja K keskenään. Yhdenmukaisista suorakulmaisista kolmioista saadaan

$$\frac{BC}{BK} = \frac{BK}{BL}$$

ja

$$\frac{BK}{BM} = \frac{BA}{BK}$$

Kun verrannot kerrotaan toisilleen, saadaan verranto

$$\frac{BC}{BM} = \frac{BA}{BL},$$

jossa mainitut sivut kuuluvat kolmioon ABC ja LBM. Koska lisäksi B-kulma on yhteinen, niin  $\triangle ABC \sim \triangle LBM$ . Todista, että väitys pitää paikkansa siinäkin tapauksessa, että korkeusviiva joutuu kolmion ulkopuolelle!

3. 310,6 mm. Piirretään ympyränkehä, johonka samasta pisteestä lähtien samalle puolelle asetetaan säänn. 12-kulmion ja 6-kulmion sivut jänteiksi, ja näitä vastaavat sentrikolmiot piirretään. Syntyy kaksi suorakulmaista kolmiota, joista saadaan säänn. 12-kulmion sivu ja tästä taas sen piiri =

$$= 12 \cdot \sqrt{5000 - 2500\sqrt{3}} \text{ mm} = \sqrt{720000 - 388800000000} \text{ mm} = 310,68 \text{ mm.}$$

Vastauksen tarkemman arvon saamista varten yhdellä desimaalilla on parasta määrätä vastaus kahdella desimaalilla. Monellako desimaalilla on  $\sqrt{388800000000}$  määrättävä?

4. ABC-kolmion C-kärjestä piirretty suora leikatkoon AB-sivun pisteessä X! Merkitään  $BX = x$  sekä kolmion sivut  $a$ ,  $b$  ja  $c$ . Saamme

$$\frac{\Delta BCX}{\Delta ACX} = \frac{x}{c-x}; \{ \text{korkeudet yhtäsuuret} \}$$

ja

$$= \frac{a^2}{b^2},$$

josta

$$x = \frac{a^2 c}{a^2 + b^2} = \frac{ac}{a + \frac{b^2}{a}}$$

Miten piirretään?

5.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 3. \end{cases}$$

6.  $6\frac{2}{3}$  litraa. Jos henkilö sekoitti  $x$  litraa kiehuva vettä ja 10 asteista vettä yhteensä 20 litraa  $a$  y astetta, niin on yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 100x + 10(20 - x) = 20y \\ 18y + 2 \cdot 100 = 20 \cdot 46. \end{cases}$$

7. Kaikki muut reaaliluvut paitsi ne, jotka ovat lukujen 0 ja 4 välillä. — Luvun  $y$  osat olkoot  $x$  ja  $(y - x)$ . Saadaan

$$x(y - x) = y,$$

joka käsitellään maksimi- ja minimitehtävänä. Saamme:

$$\text{maksimi-arvo } y_1 = 0$$

$$\text{minimi-arvo } y_2 = 4.$$

Miten vastattaisi, jos  $y_1 = 0$  olisi ollut minimi- ja  $y_2 = 4$  maksimi-arvona? *kaikki reaaliluvut*

$$8. \frac{4\sqrt{2} + 2}{7} = 1,0938. \text{ Kysymyksessä olevien taso-}$$

jen ja pallon pinnan rajoittaman kappaleen kokonaispinta = pallon pinta minus neljän eheän pallosegmentin sivupintojen summa (eli neljän kalotin summa) plus neljä ympyrää.

9.  $\frac{120}{119}$ . Olkoon kärkekulman puolikas  $x$ ! Saadaan

$$\sin x = \frac{5}{13}, \text{ josta } \cos x = \frac{12}{13}, \text{ jotka sijoitetaan kaavaan}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

10. 0,6 kg. Saamme kaavan  $v = at$  mukaan

$$a = \frac{v}{t} = \frac{0,49}{10} = 0,049,$$

joka sijoitetaan kaavaan

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{0,049 \cdot 10^2}{2} = 2,45.$$

Kaavasta

$$ks = \frac{mv^2}{2}, \text{ saadaan}$$

$$k = \frac{mv^2}{2 \cdot s} = \frac{\frac{120}{9.8} \cdot 0,49^2}{2 \cdot 2,45} = 0,6.$$

1912. S.

1.  $29\frac{1}{2}\%$ . Saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x = \frac{32a}{100} \\ x = \frac{84y}{100} \\ z = \frac{ua}{100} \end{cases}$$

joista  $u = 29\frac{1}{2}\%$ .

2.  $\triangle ADB \sim \triangle ABE$  (2 kulmaparia =), josta

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$$

ja tästä, koska  $AB = AC$ ,

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

3.  $\frac{b^2 \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{4a}$ . Olkoon kolmion korkeuden mitta-luku k. Saadaan

$$k : \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{b}{2} : a.$$

josta saatu k:n arvo sijoitetaan kolmion alan kaavaan.

4.  $x^2(2x - 1)(2x + 3)$ .

5. Osamäärän Briggin logaritmi on  $0,71838 - 1$  ja itse osamäärän arvo  $0,52285$ . Määrää ensin  $\sqrt[3]{0,76}$ .

6. 2:1. Sylinterin ulkopuolella oleva kartionosa = katk. kartio minus sylinterin puolikas. Se sylinterin osa, joka ei kuulu kartioon, = sylinterin puolikas minus tämän korkuinen suora kartio.

7. 
$$\begin{cases} 26^\circ 33' 54'',3 \\ 36^\circ 52' 11'',4 \\ 26^\circ 33' 54'',3 \end{cases}$$

Olkoot suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusan BC osat  $BK = KL = LC$  ja hypotenuusan keskipiste O. Tässä kysytään kulmia  $x = \angle BAK = \angle CAL$  ja  $y = \angle KAL$ .

Otetaan lisäksi kulma  $u = \frac{y}{2} = \angle KAO$ . Saadaan

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{3}, \text{ josta } u = 18^\circ 26' 5'',7.$$

Miten tästä saadaan x ja y?

8. 2106 gramman paino. Tukikohta jakaa tuon 1,2 metrin sauvan niin, että vipuvarret ovat 48 cm ja 72 cm. Sauvan paino = 120.  $7,8 \text{ gram} = 8424 \text{ gram}$ , joka tukikohdassa jakaantuu osiin: 3369,6 ja 5054,4 grammaa.

Yhtälö on:

$$48 \cdot x + \frac{48}{2} \cdot 3369,6 = \frac{72}{2} \cdot 5054,4,$$

josta

$$x = 2106.$$

## 1913. K.

1. 36; 21; 14. Olkoot luvut x, y ja z. Saadaan

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 7 : 12 : 18,$$

josta

$$\frac{1}{x} = \frac{12}{7} \text{ eli } \frac{x}{y} = \frac{12}{7}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{18}{12} \text{ eli } \frac{y}{z} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Siis

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 7 : 12 : 14 \quad \begin{matrix} x : y = 12 : 7 \\ y : z = 3 : 2 \end{matrix}$$

Voidaksemme panna luvut samaan jonoon, täytyy y:tä, joka molemmissa verrannoissa esiintyy, vastata sama kokonaisluku. Tämä saadaan niin, että etsitään y:tä vastaavien lukujen 7:n ja 3:n pienin yht. jaettava; se on 21.

Nyt saamme

$$\frac{x}{y} = \frac{12}{7} = \frac{36}{21}$$

ja

$$\frac{y}{z} = \frac{3}{2} = \frac{21}{14}$$

jotka voidaan kirjoittaa verrantojonoon

$$x : y : z = 36 : 21 : 14.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 1030,8 \text{ mm}^2. \text{ Saadaan etsittävän kolmion ala} = \\ \frac{\text{korkeus} \cdot \text{kertaa} \cdot \text{asema}}{2} = \frac{6 \sqrt{91} \cdot 36}{2} \\ = 108 \sqrt{91} = \sqrt{1061424} = 1030,25. \end{aligned}$$

Katso huomautusta esimerkissä: 1912. K. esim. 3.

3. Olkoon kulma  $x$ ! Silloin:

$$\operatorname{tg} x = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b}.$$

Siis: piirretään suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on  $b$ :n ja  $a$ :n kolmas verto (proport.) ja toinen kateetti  $b$ . Viimeksi mainitun kateetin viereinen terävä kulma ( $x_1$ ) on etsittävä kulma. On huomattava, että on olemassa toinenkin kulma ( $x_2 = 180^\circ + x_1$ ), joka kelpaa, koska, näet, näiden kulmien trigon. tangentit ovat yhtäsuuret merkkeineen (positiiviset) päinvineen. Mitkä kulmat kelpaisivat, jos  $x = -\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ?

4. Olkoon  $BF = x$ . Silloin väitetään:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x},$$

josta

$$x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

Leikatkaa AE:n jatke BC:n jatkeen O-pisteessä. Koska ABO-kolmiossa AF on kulman puolittaja, saadaan

$$\frac{BF}{OF} = \frac{AB}{AO}.$$

Nyt ovat

$$BF = x,$$

$$OF = a + a - x = 2a - x,$$

$$AB = a,$$

$$AO = 2 \cdot \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{5}.$$

Edellinen verranto kuuluu siis

$$\frac{x}{2a - x} = \frac{a}{a\sqrt{5}},$$

josta

$$x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

5. Oppikirjoissa on todistus.

6.  $\sqrt[4]{a + 2}$ . Tässä on huomattava, että

$$(\sqrt[4]{a - 2})(\sqrt[4]{a + 2}) = \sqrt[4]{a - 4}$$

on yhteinen nimittäjä.

7. Osakkeista: 288 mk; (siis kaikista osakkeista: 12960 mk). Obligatsioonista: 88 mk; (siis kaikista obligatsioneista: 7040 mk).

Yhtälöryhmä, jos osakkeen hinta (= kurssiarvo) merkitään  $x$ llä ja obligatsioonin hinta (= kurssiarvo)  $y$ llä markalla, on:

$$\begin{cases} 45x = 80y + 5920 \\ \frac{8 \cdot 9000}{100} + \frac{5 \cdot 8000}{100} = \frac{5,6(45x + 80y)}{100} \end{cases}$$

8. Osat ovat 6 ja 4.

9. 0,06626. Saadaan

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\pi rk}{4\pi r^2} = \frac{k}{2r} = \frac{r - r \sin 60^\circ 10'}{2r} = \\ &= \frac{1 - \sin 60^\circ 10'}{2} = \frac{0,13252}{2} = 0,06626. \end{aligned}$$

Katso 1902. S. esim. 9.

10. 25839,8 cm<sup>3</sup>. Koska kaasun lämpö ei muutu, voidaan käyttää Boyle-Mariotten lakia. Siis

$$\frac{3 \text{ atmosf. painetta}}{1 \text{ atmosf. paine}} = \frac{100}{x},$$

josta

$$x = 25839,8$$

### 1913. S.

1. 5,15 metriä sekunnissa. Maapallon isoympyrän kehä =  $2\pi \cdot 6367000$  metriä, joka siis vastaa 360° eli 360.60 min. = 21600 min. Tästä saadaan:

10 solmuväliä = 10 minuuttia maapallon isoympyrän kaaresta tunnissa =  $\frac{10 \cdot 2\pi \cdot 6367000}{21600}$  metriä tunnissa =  $\frac{10 \cdot 2\pi \cdot 6367000}{60 \cdot 60 \cdot 21600}$  metriä sekunnissa = 5,146 metriä sekunnissa.

2. Tämä tehtävä on esimerkin 6 vuonna 1879 erikoistapaus. — Piirrä yhdensuuntaisten A:n ja B:n keskilinjoille suora L näitten suuntaiseksi sekä ota L:llä mielivaltainen piste K keskipisteeksi ja A:n ja B:n välin puolikas säteeksi piirtääksesi ympyrän. Tämä sivuaa A:tä ja B:tä. Piirrä sitten tunnetun pisteen C:n kautta A:n ja B:n suuntainen suora, joka leikatkoon K-ympyrän kehän pisteissä U ja V. Lopuksi piirrä C:stä UK:n ja VK:n suuntaiset suorat. Näin saat etsittävien ympyröiden säteet. — Miten piirretään etsittävä ympyrä, jos C on joko A:lla tahi B:llä? Entä, jos C on L:llä? — Milloin on tehtävä mahdoton?

3. 20 mm. Saadaan lavennetun Pythagoraan väitteen mukaan.

4.  $\frac{m^2}{n^2 + 2mn}$ . Leikatkoon B:n kautta asetettu taso CA:n pisteessä K ja CD:n pisteessä L. KL on siis AD:n suuntainen; (mistä syystä?). Olkoon annetun pyramiidin ja siis osapyramiidiidenkin korkeus k. Silloin saadaan:

$$\frac{\text{Pyr. ABCD}}{\text{pyr. KBCL}} = \frac{\frac{\triangle ACD \cdot k}{3}}{\frac{\triangle KCL \cdot k}{3}} = \frac{\triangle ACD}{\triangle KCL} = \frac{(m+n)^2}{m^2}.$$

On näet huomattava, että  $\triangle ACD \sim \triangle KCL$ .

Verrannon eroittamisella muodostuu seur. verranto:

$$\frac{\text{Pyr. ABCD} - \text{pyr. KBCL}}{\text{pyr. KBCL}} = \frac{(m+n)^2 - m^2}{m^2}$$

eli

$$\frac{\text{Pyr. ABKLD}}{\text{pyr. KBCL}} = \frac{(m+n)^2 - m^2}{m^2} = \frac{n^2 + 2mn}{m^2},$$

joka verranto käännetään.

5. Piirretään suorakulmainen kolmio ABC, jossa B-kulma = 60° ja siis toinen terävä kulma C = 30°. Sivut olkoat a, b ja c. Silloin on  $c = \frac{a}{2}$  ja  $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , josta

$$\sin 60^\circ = \sin B = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tg } 60^\circ = \text{tg } B = \frac{b}{c} = \sqrt{3}$$

ja

$$\text{ctg } 60^\circ = \text{ctg } B = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nyt saadaan:

$$3x^2 - 8x \sin 60^\circ + 3 = 0$$

$$3x^2 - \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot x + 3 = 0,$$

joka antaa

$$x_1 = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{ctg} 60^\circ.$$

6. Sinkkiä: 165 gr; kuparia: 99 gr ja tinaa: 36 gr.  
— Olkoon sekoituksessa x gr sinkkiä, y gr kuparia ja z gr tinaa sekä tinanlisäys u gr! Yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x + y + z = 300 \\ \frac{z}{y} = \frac{11}{4} \\ x = \frac{50, (300 + u)}{100} \\ z + u = \frac{20 (300 + u)}{100} \end{cases}$$

7. Piirrä suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 5 pituusyksikköä ja toinen kateetti 3 pituusyksikköä. Tämän kateetin viereinen kulma on etsittävä kulma v. Tästä saadaan helposti piirretyksi 2v. Nyt jatketaan näin:

$$\sin 2v = 2 \cos v \sin v = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{24}{25}.$$

$$\begin{aligned} \cos 2v &= \cos^2 v - \sin^2 v = \cos^2 v - (1 - \cos^2 v) = \\ &= 2 \cos^2 v - 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}. \end{aligned}$$

8. 0,18 prosentilla. — Yhtälö on

$$v_0 + \frac{xv_0}{100} = v_0 (1 + 3 \cdot 0,000012 \cdot 50),$$

josta

$$x = 0,18.$$

## 1914. K.

1.  $\frac{353}{798}$ . Murtoluku supistetaan yksinkertaisimpaan mahdolliseen muotoon siten, että se supistetaan osottajan ja nimittäjän suurimmalla yht. tekijällä.

$$2. \quad \begin{cases} x = -\frac{a^2}{4b} \\ y = -\frac{a^2}{4b} \text{ ja} \\ z = \frac{a^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = b - a \\ y = -b \\ z = ab. \end{cases}$$

3. 95 markalla 13 pennillä. — Olkoon vuosi sitten velka x markkaa! Nyt siis on velka, ennen noiden 250 markan suoritusta,  $= (x + \frac{x \cdot 5 \cdot 1}{100})$  mk. Kun tästä suoritetaan 250 mk, jää maksamatta 3002 mk 27 p.; yhtälö on siis:

$$x + \frac{x \cdot 5 \cdot 1}{100} - 250 = 3002,27,$$

josta

$$x = 3097,40.$$

Laina lyheni

$$(3097,40 - 3002,27) \text{ mk:lla} = 95,13 \text{ mk:alla.}$$

4. Lukujen tulo on 32. Lasketaan näin:

$$15x^2 - 25x + 3 = 0,$$

josta

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{5} = 0.$$

Jos juuret ovat  $x_1$  ja  $x_2$ , saadaan

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{3}.$$

Olkoot ne luvut, joitten tulo on laskettava, u ja v! Silloin saamme:

$$\left. \begin{array}{l} \log_8 u = x_1, \text{ josta } 8^{x_1} = u \\ \log_8 v = x_2, \quad \quad \quad 8^{x_2} = v \end{array} \right\} \text{ Näistä } uv =$$

$$8^{x_1} \cdot 8^{x_2} = 8^{x_1 + x_2} = 8^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32.$$

$$5. \quad \frac{384\sqrt{3} - 128\pi}{3} \text{ cm}^2 = 87.7 \text{ cm}^2.$$

Kyseessä olevan kuvion ala = säänn. 6-kulmion ala minus kuuden ympyräsegmentin alojen summa. Tällaisen ympyräsegmentin kaari on  $120^\circ$  ja säde  $\frac{8}{\sqrt{3}}$ .

6. Olkoon kolmiossa ABC sivun AC:n keskipiste  $K_1$ , CB:n keskipiste  $K_2$  ja BA:n keskipiste  $K_3$ . Lisäksi olkoon B:stä piirretyn korkeusviivan AC-sivulla oleva kantapiste P. Yhdistetään pisteet P,  $K_1$ ,  $K_2$  ja  $K_3$  toisensa kanssa siten, että syntyy nelikulmio. Otaksukaamme, että piste P on A:n ja  $K_1$ :n välillä; silloin on nelikulmiomme  $K_1K_2K_3P$ . Tämän nelikulmion suhteen voidaan nyt todistaa, että siinä vastakkaisten kulmien summat ovat yhtäsuuret, ja siis kumpikin summa  $= 180^\circ$ .

Todistus: Kuvio  $AK_1K_2K_3$  on suunnikas; (mistä syystä?). Siitä seuraa, että  $\angle K_1K_2K_3 = A$  ja  $\angle PK_1K_2 = 180^\circ - A$ . Koska APB-kulma on suora, niin on P-piste sen ympyrän kehällä, jonka halkaisija on AB siis säde  $K_3P$ ; se merkitsee, että  $K_3P = K_3B$ . Jana  $K_3K_2$  on kohtisuorassa PB:tä vastaan; (mistä syystä?). Huomaamme siis, että  $K_3K_2$  jakaa  $PK_3B$ -kolmion kahteen suorakulmaiseen yhteelliseen (yhteneväiseen) kolmioon; siis on  $\angle PK_3K_2 = \angle BK_3K_2$ , joka taas (mistä syystä?) on  $= A$ . Olemme siis saaneet

$$\angle K_1K_2K_3 = A.$$

$$\angle PK_1K_2 = 180^\circ - A$$

$$\angle PK_3K_2 = A.$$

Tästä seuraa, että nelikulmiomme neljäs kulma  $\angle K_1PK_3 = 180^\circ - A$ .

(Todista!)

Nelikulmiossa  $K_1K_2K_3P$  ovat siis vastakkaisten kulmien summat kumpikin  $180^\circ$ . Koska näin on asialaita, niin voidaan nelikulmion ympäri piirtää ympyrä s.o. P on sen ympyrän kehällä, joka kulkee pisteitten  $K_1$ ,  $K_2$  ja  $K_3$  kautta.

Samalla tavalla todistetaan, että muittenkin korkeusviivojen kantapisteet ovat kolmion sivujen keskipisteiden kautta kulkevan ympyrän kehällä. Siis jokaisessa kolmiossa ovat sivujen keskipisteet ja korkeusviivojen kantapisteet saman ympyrän kehällä; (Feuerbachin ympyrä).

7. Jos kuution särmä on a, niin sen lävistäjä on  $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ . (Todista!) Miten piirretään  $a\sqrt{3}$ , kun a on tunnettu? Merkitään  $a\sqrt{3} = b$ . Nyt piirretään suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on b ja toinen kateetti a; tämän viereinen kulma on etsittävä kulma.

8. 7:20. Saamme

$$\frac{2\pi r k}{2\pi r (2r - k)} = \frac{1}{2},$$

josta

$$k = \frac{2r}{3}.$$

Nyt kysytään

$$x = \frac{\pi k^2 \left(r - \frac{k}{3}\right)}{\pi (2r - k)^2 \left(r - \frac{2r - k}{3}\right)},$$

johon sijoitetaan k:n arvo ja suoritetaan; lopuksi tulee

$$x = \frac{7}{20}.$$

9.  $37^{\circ} 0' 16''$ .<sub>2</sub> Pyramiidin asema (pohja) olkoon neliö ABCD ja sen kärki O sekä korkeusjana OK. Piste K (neliön lävistäjien leikkauspiste) yhdistetään A:han ja AB-sivun keskipisteeseen L:ään. Jos neliön sivu = a, niin  $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Nyt on

$$\frac{AK}{AN} = \cos OAK = \cos 63^{\circ} 20',$$

josta

$$AO = \frac{AK}{\cos 63^{\circ} 20'} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos 63^{\circ} 20'}.$$

Kulma AOL merkitään x. Saadaan, koska  $AL = \frac{a}{2}$ ,

$$\sin x = \frac{AL}{AO} = \frac{a \cdot 2 \cos 63^{\circ} 20'}{2 \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\cos 63^{\circ} 20'}{\sqrt{2}},$$

josta

$$x = 18^{\circ} 30' 80''$$

ja siis

$$2x = 37^{\circ} 0' 16''$$

10. 0,279 cm. Kohdatkoon valonsäde lasilevyn A-pisteessä ja jatkakoon kulkuaan lasilevyn toiselta puolelta pisteestä B. Kohdatkoon kohtisuora B:stä (tätä muuten juuri kysytään) tulosädetä vastaan tämän jatketta pisteessä C. A:sta piirretään lasilevyn paksuusjana AK. Kulma BAK merkitään u:lla ja jana AB y:llä sekä jana BC x:llä.

Saamme

$$\frac{\sin 40^{\circ}}{\sin u} = \frac{3}{2},$$

josta

$$u = 25^{\circ} 22' 26''$$

Nyt on

$$\angle BAC = 40^{\circ} - u = 14^{\circ} 37' 33''$$

Lisäksi saamme

$$\frac{AK}{AB} = \frac{1}{y} = \cos u,$$

$$\text{josta } y = \frac{1}{\cos u},$$

ja

$$\frac{x}{y} = \sin BAC,$$

josta

$$x = y \sin BAC = \frac{\sin BAC}{\cos u} = \frac{\sin 14^{\circ} 37' 33''}{\cos 25^{\circ} 22' 26''}$$

josta

$$x = 0,279.$$

## 1914. S.

1. 12 %. Voitto olkoon v markkaa! A sai siis ensiksi voitosta  $\frac{15v}{100}$  mk ja B 20 mk. Se rahamäärä, joka jaettiin suhteellisesti A:n, B:n ja C:n panoksien mukaan, on siis  $\left(\frac{85v}{100} - 20\right)$  mk josta summasta A saa  $\left(120 - \frac{15v}{100}\right)$  mk, B x mk ja C y mk.

Asettamus on:

|          |                                         |
|----------|-----------------------------------------|
| A 600 mk | $\left(120 - \frac{15v}{100}\right)$ mk |
| B 700 »  | x mk                                    |
| C 800 »  | y »                                     |
| 2100 mk  | $\left(\frac{85v}{100} - 20\right)$ mk. |

Saadaan verranto

$$600 : 2100 = \left(120 - \frac{15v}{100}\right) : \left(\frac{85v}{100} - 20\right),$$

josta

$$v = 320.$$

C:n osuus y mk saadaan verrannosta  $800 : 2100 = y : \left(\frac{85v}{100} - 20\right)$ , johon sijoitetaan v:n arvo 320. Saamme

$$y = 96.$$

Jos C sai voittona p prosenttia panoksestaan, niin on

$$\frac{p \cdot 800}{100} = 96,$$

josta

$$p = 12.$$

Laske, montako % panoksestaan saivat A ja B.

2. Määritellään ja todistetaan oppikirjoissa.

3.  $\frac{a}{b} = \pm \frac{5}{2}$ . Jos yhtälön

$$x^2 + ax + b^2 = 0$$

toinen juuri on  $x_1$ , niin toinen on siis  $4x_1$ .

Saamme

$$x_1 + 4x_1 = 5x_1 = -a, \text{ josta } x_1 = -\frac{a}{5},$$

$$x_1 \cdot 4x_1 = 4x_1^2 = b^2, \text{ josta } x_1 = \pm \frac{b}{2}.$$

Siis

$$-\frac{a}{5} = \pm \frac{b}{2},$$

ja tästä:

$$\begin{array}{l} -\frac{a}{5} = \frac{b}{2}, \\ \text{josta} \quad \frac{a}{b} = -\frac{5}{2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{a}{5} = -\frac{b}{2}, \\ \text{josta} \quad \frac{a}{b} = \frac{5}{2}. \end{array}$$

$$\text{Vastaus siis: } \frac{a}{b} = \pm \frac{5}{2}.$$

4. Piirrä tunnetun kolmion ympäri ympyrä (miten?) ja yhdistä kolmion kärkipisteet ympyrän keskipisteeseen kanssa! Piirrä sitten näin syntyneiden sentriikulmien suuruiset sentriikulmat tunnettuun ympyrään, joten saat etsittävän kolmion kärkipisteet!

5. Suhteessa 1 : 2. Olkoon AB (= a) kuution särmä ja AC aseman (pohjan) lävistäjä! Silloin on BC kuution lävistäjä. AK olkoon kohtisuorassa BC:tä vastaan. Nyt on

$$AB = a$$

$$AC = a\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$$

$$BK = x.$$

Saadaan

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{a\sqrt{3}},$$

josta

$$BK = x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

ja

$$KC = a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Siis:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}.$$

$$6. \quad \frac{(m^2 + 2n^2 + 4mn) \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}}{2(m+n)^2}.$$

Säänn. tetraederissa ABCO olkoon taso (kolmio)  $A_1B_1C_1$  yhdensuuntainen ABC-kolmion kanssa. Pyramiidi  $A_1B_1C_1O$  ja ABCO ovat yhdenmukaiset (yhdenmuotoiset); siis vastinjanojen suhde  $= m : (m+n)$  ja vastinpintojen suhde  $= m^2 : (m+n)^2$ .

Nyt saadaan

$$\Delta ABC = \Delta OAB = \Delta OAC = \Delta OBC = \frac{s \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{s^2 \sqrt{3}}{4}$$

ja

$$\Delta A_1B_1C_1 = \Delta OA_1B_1 = \Delta OA_1C_1 = \Delta OB_1C_1 = \frac{m^2 s^2 \sqrt{3}}{4(m+n)^2}.$$

Katk. pyramiidin kokonaispinta-ala  $= \Delta ABC + \Delta A_1B_1C_1 +$  kolme puolisuunnikasta  $=$

$$= \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{m^2 s^2 \sqrt{3}}{4(m+n)^2} + 3 \cdot \left[ \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{m^2 s^2 \sqrt{3}}{4(m+n)^2} \right] =$$

$$= \frac{(m^2 + 2n^2 + 4mn) s^2 \sqrt{3}}{2(m+n)^2}.$$

$$7. \quad \frac{25\sqrt{5} + 10\sqrt{11}}{9} \text{ cm}^2 = 9.90 \text{ cm}^2.$$

Kolmio olkoon ABC ja B:stä piirretty halkaisija BK siten, että  $AB = 5$  cm,  $BC = 4$  cm ja  $BK = 6$  cm. Piirretään janat KA ja KC. Suorakulmaisista kolmioista BAK ja BCK saadaan, jos  $\angle ABK = x$  ja  $\angle CBK = y$ ,

$$\cos x = \cos ABK = \frac{5}{6}$$

ja

$$\cos y = \cos CBK = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Näistä saamme

$$\sin x = \frac{\sqrt{11}}{6} \text{ (miten?)}$$

ja

$$\sin y = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ (miten?)}$$

Nyt

$$\Delta ABC = \frac{5 \cdot 4 \cdot \sin ABC}{2} = 10 \sin ABC = 10 \sin(x+y) =$$

$$= 10 (\sin x \cos y + \cos x \sin y),$$

johon sijoitetaan saadut arvot.

$$8. \quad 7\sqrt{15} = 27.11 \text{ metriä sekunnissa. Saamme}$$

$$\begin{cases} c \cdot t = 15 \\ \frac{gt^2}{2} = 1.5, \end{cases}$$

johon yhtälöryhmään sijoitetaan  $g = 9.8$  ja määrätään alkunopeus  $c$ .

## 1915. K.

1. 30.9 prosentilla. Yhtälö on

$$\frac{235000}{2145000} \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{340000}{2370000},$$

jossa  $x$  on prosentti.

2. Puolittajajanan kärjenpuoleisen osan suhde toiseen osaan  $= 3:2$ . — Olkoot ABC-kolmiossa kateetit  $AB = 3$  ja  $AC = 4$ . Kuinka pitkä on BC? ABC-kolmion korkeusjana olkoon AE, joka leikatkoon kulman puolittaja-janan BD (piste D on AC:llä) pisteessä F. Merkitään  $BF = x$ ,  $FD = y$  ja  $BE = z$ .

Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan

$$\frac{x+y}{x} = \frac{3}{z}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{z},$$

joista

$$\frac{x+y}{x} = \frac{5}{3}$$

ja tästä

$$3y = 2x,$$

josta

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}.$$

3. Käytetään sitä suurimman yhteisen tekijän etsimisen menettelyä, jonka näet 1887-vuoden esimerkin 2 selityksessä, ja saadaan

$$\begin{array}{r|l} 2m+3n & m+n \\ \hline \mp 2m+2n & 2 \\ \hline n+m & n \\ \mp n & 1 \\ \hline n & m \end{array}$$

Tästä näemme, että lukujen  $m$  ja  $n$  suurin yht. tekijä = lukujen  $n$  ja  $n+m$  suurin y. t. = lukujen  $m+n$  (eli  $n+m$ ) ja  $2m+3n$  suurin y. t.

4. Erotus on  $6' 38''$ ,<sub>2</sub>. Säännöllisen seitsenkulmion sivua vastassa olevan keskuskulman oikea arvo on =

$$\frac{360}{7} \text{ astetta} = 51^\circ 25' 42'',_{86}.$$

Jos ympyrän säde on  $r$ , niin ympyrään piirretyn tasasivuisen kolmion sivu on  $r\sqrt{3}$  ja sen puolikas  $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ , jonka siis Dürer suosittelee otettavaksi säänn. sisäänpiirretyn seitsenkulmion sivuksi. Jos tämän monikulmion keskuskulmion kärkikulman puolikas merkitään  $x$ llä, niin saadaan

$$\sin x = \frac{r\sqrt{3}}{2} : r$$

eli

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

josta

$$x = 25^\circ 39' 32'',_{31}$$

ja itse keskuskulma =

$$= 2x = 51^\circ 19' 4'',_{62}.$$

5. Huomaa: AC:n ja BD:n ei tarvitse olla ympyröiden halkaisijoina eikä ympyröiden tarvitse olla yhtäsuuria. Yhteinen jänne olkoon EF, jonka leikkauspiste BC:n kanssa olkoon K. Merkitään:  $AB = CD = a$ ,  $EK = u$ ,  $KF = v$ ,  $BK = x$  ja  $KC = y$ . On todistettava, että  $x = y$ . Nyt saadaan:

$$\begin{cases} \frac{a+x}{u} = \frac{v}{y} \\ \frac{a+y}{u} = \frac{v}{x} \end{cases}$$

joista  $uv$ :n arvoksi

$$(a+x)y = (a+y)x$$

ja tästä

$$x = y.$$

$$6. \quad a^2 y^2 + (2ac - b^2)y + c^2 = 0,$$

jossa  $y$  on tuntematon.

a) Etsitään annetun yhtälön juuret, joitten neliöt  $y_1$  ja  $y_2$  sijoitetaan yhtälöön  $(y - y_1)(y - y_2) = 0$ , joka taas sievennettynä antaa vastauksen.

b) Ratkaistaan käyttämällä apuna toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia. Saadaan

$$\begin{cases} 1) x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ 2) x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Korota <sup>1)</sup> neliöön ja näin saatuun yhtälöön sijoita  $x_1 x_2$ :n arvo yhtälöstä <sup>2)</sup>, joten saat

$$3) x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Lisäksi tulee

$$4) x_1^2 x_2^2 = \frac{c^2}{a^2}.$$

Jos uuden yhtälön juuret ovat  $y_1 = x_1^2$  ja  $y_2 = x_2^2$ , niin saadaan uusi yhtälö kuulumaan

$$\begin{aligned} (y - y_1)(y - y_2) &= 0 \\ y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 &= 0 \\ y^2 - (x_1^2 + x_2^2)y + x_1^2 x_2^2 &= 0 \\ y^2 - \frac{b^2 - 2ac}{a^2}y + \frac{c^2}{a^2} &= 0, \end{aligned}$$

josta vastaus.

7. Ilman kantta tarvitaan rautapeltiä  $\frac{700 \sqrt[3]{3\pi}}{3} \text{ cm}^2 = 492,88 \text{ cm}^2$ . Jos  $r$  on pohjan (aseman) säde, niin tarvitaan  $7\pi r^2 \text{ cm}^2$  rautapeltiä. Kuinka pitkä on tämä säde?

8. Yhtälö voidaan kirjoittaa

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3,$$

joka  $\operatorname{tg} x$ :n suhteen ratkaistuna antaa

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ja } \operatorname{tg} x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

jotka molemmat ovat positiivisia; (huom!  $3 > \sqrt{5}$ ). Nyt valitaan mielivaltainen jana  $a$ . Silloin voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_1 &= \frac{(3 + \sqrt{5})a}{2a} = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2a} \\ \operatorname{tg} x_2 &= \frac{(3 - \sqrt{5})a}{2a} = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2a}. \end{aligned}$$

Miten  $x_1$  ja  $x_2$  piirretään? Huomaa, että, koska  $\operatorname{tg} x$ :t ovat positiivisia, saataisiin näiden kahden kulman lisäksi kaksi muuta kulmaa (lisäämällä  $180^\circ$ ); nyt näitä ei oteta, koska esimerkissä vaaditaan, että kulmat ovat teräviä.

Kulmien astelukujen saamista varten otetaan  $\sqrt{5} = 2,2360679$ , joka antaa  $\operatorname{tg} x_1$  ja  $\operatorname{tg} x_2$  desimaalilukuina. Logaritmien avulla saadaan

$$x_1 = 69^\circ 5' 41''$$

ja

$$x_2 = 20^\circ 54' 19''.$$

Näemme, että  $x_1$  ja  $x_2$  ovat toistensa komplementtikulmia. Tämän komplementtisuuden huomaa myös siitä, että luvut  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  ja  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  ovat toistensa inversiarvoja, josta seuraa:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_1 &= \frac{1}{\operatorname{tg} x_2} = \operatorname{ctg} x_2 \\ \operatorname{tg} x_1 &= \operatorname{ctg} (90^\circ - x_1). \end{aligned}$$

joista

$$x_2 = 90^\circ - x_1.$$

9. Olkoot  $AB$ :n,  $AC$ :n ja  $BD$ :n keskipisteet  $K_1$ ,  $K_2$  ja  $K_3$ . Leikkauskuvion  $CD$ :llä oleva kärkipiste olkoon  $X$ . Koska  $K_1 K_2 \parallel BC$  (mistä syystä?), niin  $K_1 K_2$  on  $BC$ :n kautta kulkevan  $BCD$ -tason suuntainen. Tästä taas seuraa, että  $K_1 K_2$ :n kautta asetetun  $K_2 K_1 K_3$   $X$ -tason ja  $BCD$ -tason leikkausviiva

$$K_3 X \parallel K_1 K_2.$$

Samoin todistetaan, että

$$K_2 X \parallel K_1 K_3.$$

Leikkauskuvioimme on siis suunnikas. — Koska

$$K_1 K_2 = \frac{BC}{2} \text{ ja } K_1 K_3 = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2},$$

niin

$$K_1 K_2 = K_1 K_3.$$

Tämä merkitsee, että suunnikkaamme on tasasivui-  
nen suunnikas.

Olkoon BCD-kolmion painopiste P. Jana  $AP$  on siis  
tetraederin korkeusjana. Koska

$$\triangle APB \cong \triangle APC \text{ (mistä syystä),}$$

niin

$$\angle ABP = \angle ACP.$$

Nyt saadaan

$$\triangle K_1 B X \cong \triangle K_2 C K_3 \text{ (mistä syystä).}$$

Tästä johtuu, että

$$K_1 X = K_2 K_3$$

eli tasasivuisen suunnikkaamme lävistäjät ovat yhtä-  
suuret, joka taas merkitsee sitä, että leikkauskuvioimme  
on neliö. J. o. t.

10.  $5\frac{2}{3}$  sekunnin kuluttua  $24\frac{1}{2}$  dm:n päässä pis-  
teestä P lukien. Yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} 1) c - \frac{a}{2} = 7,75 \\ 2) \left(c \cdot 3 - \frac{a \cdot 3^2}{2}\right) - \left(c \cdot 2 - \frac{a \cdot 2^2}{2}\right) = 4,75 \end{cases}$$

saadaan c:n ja a:n arvot, jotka sijoitetaan kaavaan

josta

$$v = c - at = 0,$$

$$t = \frac{1}{3} = 5\frac{2}{3}.$$

Kun c:n, a:n ja t:n arvot sijoitetaan kaavaan

$$s = ct - \frac{at^2}{2}, \text{ niin saadaan } s = 24\frac{1}{2}.$$

## 1915. S.

1. 10 prosenttia. Olkoon kauppiaan ostohinta a mk.  
Mikä oli hänen myyntihintansa yleensä? Mikä pa-  
raimmille ostajille? Hinnanalennusprosentti on otet-  
tava edellisestä myyntihinnasta.

$$2. \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{4} = 1,045.$$

Huomaa: koska monikulmioilla on yhtä pitkät piirit,  
niin niitä ei voida piirtää yhtäsuuriin ympyröihin.  
Olkoon säänn. kahdeksankulmio piirretty r-säteiseen ja  
säänn. kuusikulmio R-säteiseen ympyrään. Kahdeksan-  
kulmion sivu  $= r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  (saadaan, kun piirretään  
ympyrään neliön sivu ja kahdeksankulmion sivu jän-  
teiksi samasta kehän pisteestä sekä jänneiden pääte-  
pisteet yhdistetään ympyrän keskipisteeseen, joten syn-  
tyy suorakulmaisia kolmioita) ja keskuskolmion kor-  
keus  $= \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ . Kuusikulmion sivu  $= R$  ja kes-

kuskolmion korkeus  $= \frac{R\sqrt{3}}{2}$ . Lisäksi on

$$8r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 6R.$$

3. Olkoon  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ . Tästä suhteen määri-  
telmän mukaan

$$a = kb, \text{ josta } 3a = 3kb$$

$$c = kd, \text{ » } 2c = 2kd$$

$$e = kf, \text{ » } e = kf.$$

Yhteenlaskemalla saadaan  $3a - 2c + e = k(3b - 2d + f)$ , josta suhteen määritelmän mukaan väitös.

4. Olkoon ABCD-pyramiidin asema- (pohja-) kolmio  
ABC ja korkeus DK sekä AB'C'D'-pyramiidin asema-

kolmio  $AB'C'$  ja korkeus  $D'K'$ . Merkitköön nämä suureet lukuarvoja; silloin saadaan

$$\frac{\text{Pyr. } AB'C'D'}{\text{pyr. } ABCD} = \frac{\frac{D'K' \cdot \Delta AB'C'}{3}}{\frac{DK \cdot \Delta ABC}{3}} = \frac{D'K'}{DK} \cdot \frac{\Delta AB'C'}{\Delta ABC}$$

Yhdistä  $K$  ja  $K'$  A-pisteeseen. Mikä suhde on  $\frac{D'K'}{DK}$ ? Mikä on  $\frac{\Delta AB'C'}{\Delta ABC}$ , koska niillä on yhteinen kulma?

5. 25 decimetriä lähelle. a) Henkilö lähenee junaa siihen hetkeen saakka, jolloin junan nopeus on tullut = henkilön nopeus; sen jälkeen välimatka suurenee. Saamme, jos lähenemisaika on  $t$ ,

$$v = at = 50$$

eli

$$2t = 50$$

josta

$$t = 25.$$

Henkilön matka on nyt  $= 50 \cdot 25 = 1250$  ja junan matka  $= \frac{2 \cdot 25^2}{2} = 625$ . Lyhin välimatka on siis  $= (650 + 625 - 1250)$  desimetriä.

b) Myöskin voidaan esimerkki ratkaista maksimi- ja minimiprobleemina. Olkoon lähenemisaika  $x$  sekuntia ja etsittävä välimatka  $y$  dm; silloin kuuluu yhtälö

$$650 + \frac{2x^2}{2} - 50x = y,$$

josta

$$\text{minimiarvo } y = 25.$$

6.  $2b$  ja  $-\frac{b}{2}$ . Kirjoita  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$  ja ota aputuntemattomiksi  $x + y = u$  ja  $x - y = v$ . Etsitään  $v$ .

7. 1,068 cm.

a) Suurempi kaari olkoon  $x$  ja pienempi  $y$ . Suora- kulmaisista kolmioista saadaan

$$\sin x = \frac{5}{12} \text{ ja } \sin y = \frac{1}{4},$$

joista logaritmien avulla määrätään  $x$  ja  $y$  sekä sitten niitten erotus  $x - y = 10^\circ 8' 49'' = 36529$  sek. Saadaan

$$\frac{\text{kaari}}{2 \cdot \pi \cdot 6} = \frac{36529}{1296000}$$

(huomaa, että  $360^\circ = 1296000$  sek), josta vastaus.

b) Sittenkun  $\sin x = \frac{5}{12}$  ja  $\sin y = \frac{1}{4}$  on saatu, määrätään  $\cos x = \frac{\sqrt{119}}{12}$  ja  $\cos y = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , jotka sijoitetaan

kaavaan

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Saamme

$$\sin(x - y) = \frac{5\sqrt{15}}{48} - \frac{\sqrt{119}}{48} = 0,17617,$$

josta logaritmitaulujen avulla

$$x - y = 10^\circ 8' 49'',$$

josta jatketaan niin kuin a:ssa.

$$8. \frac{224\pi}{81} \text{ kg} = 8,688 \text{ kg.}$$

Jos veden alle joutuneen pallosegmentin korkeus on  $= k$ , niin saadaan, koska säde on 2 dm,

$$2\pi \cdot 2 \cdot k = \frac{4\pi \cdot 2^2}{3},$$

josta

$$k = \frac{4}{3} \text{ (dm).}$$

Pallosegmentin tilavuus

$$= \pi \cdot k^2 \left( 2 - \frac{k}{3} \right) = \frac{224\pi}{81} \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Veden pinnalla kelluvan kappaleen syrjäyttämä vesimäärä painaa yhtä paljon kuin itse kappale. Syrjäytetty vesimäärä  $\frac{224\pi}{81} \text{ dm}^3$  painaa  $\frac{224\pi}{81} \text{ kg}$ , joka siis on kappaleenkin paino.

OK, 100  
for 100  
100 - 0

|        | Aritmetiikka ja algebra. |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | Geometria.       |          |                         |        |                |              |                           | Trigono-<br>metr. |               |               | Fysiikka.   |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
|--------|--------------------------|--------------------------|-------------|------------------------------------|-------------|----------------------------------|-----------|------------|----------------|------------|--------------|------------|---------|--------|----------|------------|---------|---------------|--------------|----------|----------|----------------|----------------|------------------|----------|-------------------------|--------|----------------|--------------|---------------------------|-------------------|---------------|---------------|-------------|---------------|------------------|---------------------|--------------------|-------------|------------|-------------|--|
|        | Murtolukujen<br>supist.  | Lukujen jaolli-<br>suus. | Juurilasku. | Yhtälöitä yhd.<br>tuntemattomalla. | Yhtälöryhm. | Tois. ast. yht.<br>juurien omin. | Lukuprob. | Seuralask. | Prosenttilask. | Korkolask. | Alennuslask. | Arvopaper. | Aikapr. | Työpr. | Matkapr. | Om. paino. | Seospr. | Maks. ja min. | Ekspon. yht. | Logarit. | Sarjapr. | Korko korolle. | Alg. todistus. | Sekalaisia esim. | Teoreem. | Algm. sovit.<br>gemaan. | Urapr. | Perspektiivpr. | Geom. piirt. | Jana- ja kulma-<br>probl. | Pinta-alalask.    | Tilavuuslask. | Pinta tasoit. | Pyörimispr. | Maks. ja min. | Goniometr. lask. | Suorakulm.<br>kolm. | Vinokulm.<br>kolm. | Mekaniikka. | Valo-oppi. | Lämpö-oppi. |  |
| 1874   |                          |                          |             | 5                                  |             |                                  |           |            |                | 1          |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          | 7        |                | 4, 6           | 3                | 2        |                         |        |                |              |                           | 8                 |               |               |             |               |                  |                     | 9, 10              |             |            |             |  |
| 1875   |                          |                          |             | 5                                  |             |                                  |           |            |                | 4          |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          | 7        |                | 6              | 1                | 3        | 2                       |        |                |              |                           |                   | 8             |               |             |               |                  |                     | 9                  | 10          |            |             |  |
| 1876   |                          | 7                        |             |                                    |             | 7                                |           |            |                |            |              |            |         |        |          | 9          |         |               |              |          |          | 4              | 5, 6           | 2, 3             |          |                         |        | 1              |              |                           |                   | 8             |               |             |               |                  |                     | 10                 |             | 9          |             |  |
| 1877   |                          |                          |             |                                    |             |                                  | 6         |            |                |            |              |            |         |        | 5        |            |         |               |              |          |          |                |                | 1                | 2, 3     |                         |        |                |              |                           | 7                 | 8             | 8             |             |               |                  | 9                   | 10                 |             |            |             |  |
| 1878   |                          |                          |             | 5                                  |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          | 6              | 4              |                  | 2        |                         |        |                |              | 3                         | 1                 | 8             | 8             |             |               |                  | 9                   | 10                 |             |            |             |  |
| 1879   |                          |                          | 2           |                                    |             |                                  |           | 1          |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                | 4              | 9                |          | 5                       | 6      |                |              |                           | 3, 10             | 10            | 10            |             |               |                  | 7, 8                | 11                 |             |            |             |  |
| 1880   |                          |                          |             |                                    | 4           |                                  |           |            |                |            |              |            | 3       |        |          |            |         |               |              |          | 6        |                | 5              | 1                |          |                         |        |                |              |                           | 7                 |               |               |             |               |                  | 9                   | 8                  | 10          |            |             |  |
| 1881   |                          |                          |             | 5                                  |             |                                  |           |            |                |            |              |            | 6       |        |          |            |         |               |              |          |          |                | 4              | 3                |          | 1                       | 2      | 2              |              |                           | 7                 | 7             |               |             |               |                  | 9                   | 8                  | 10          |            |             |  |
| 1882   |                          |                          |             | 5                                  |             | 6                                |           |            |                |            |              |            |         | 4      |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 1                | 2        |                         | 2      | 3              |              |                           |                   | 7             |               | 7           |               |                  |                     | 8, 9               | 10          |            |             |  |
| 1883   |                          | 1, 4                     | 9           |                                    | 6           |                                  |           | 2          |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          | 7              | 5              |                  | 3        |                         |        |                |              | 7                         | 4                 | 11            |               |             | 8             | 10               |                     |                    | 12          |            |             |  |
| 1884   |                          | 1                        |             |                                    | 3           | 5                                |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                | 2              |                  | 3, 5     | 7                       |        |                |              | 7                         |                   | 4             | 10            |             |               | 8                |                     | 9                  | 11          |            |             |  |
| 1885.A |                          |                          |             |                                    | 4           | 2                                |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               | 6            |          |          |                | 1              | 3, 5             | 7        |                         | 8      |                |              |                           |                   | 9             |               |             | 10            | 11               | 12                  | 12                 |             |            |             |  |
| 1885.B |                          |                          |             |                                    | 3           |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        | 2        |            |         |               |              |          | 5        |                | 1              | 6                | 7        |                         |        |                |              |                           | 8                 |               |               |             |               | 10               |                     | 9                  | 10          |            |             |  |
| 1886   |                          | 8, 4                     |             |                                    |             | 3                                |           | 1          | 2              |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          | 5              |                | 6                | 7        |                         |        |                |              |                           | 9                 | 8, 9          |               |             | 10            |                  | 11                  | 12                 |             |            |             |  |
| 1887   |                          | 2                        |             |                                    |             |                                  |           |            | 1              |            | 3            |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 5                |          |                         |        |                |              | 6                         | 4                 |               | 7             |             |               |                  | 8                   | 4, 9               | 10          |            |             |  |
| 1888   |                          |                          | 1           | 4                                  | 5           |                                  |           |            | 3              |            |              |            |         |        |          | 9          | 2       |               |              |          |          |                |                | 4                | 5        |                         | 7      |                |              |                           |                   | 4             |               |             | 11            | 10               | 12                  | 9                  |             |            |             |  |
| 1889   |                          |                          | 1           |                                    | 4           |                                  |           |            | 2              |            |              | 3          |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                | 5              |                  | 6, 9     | 5, 8                    | 7      |                |              |                           |                   |               |               |             | 10            |                  | 6, 11               | 12                 |             |            |             |  |
| 1890   |                          | 2                        |             | 4                                  |             |                                  |           | 1          |                | 3          |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 7                |          |                         |        |                |              |                           |                   | 9             |               |             | 10            | 11               |                     |                    | 12          |            |             |  |
| 1891   |                          | 1, 3                     |             |                                    | 6           |                                  | 2         |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                | 4              | 5                |          | 8                       | 9      |                |              | 7                         |                   |               | 10            |             |               | 11               |                     |                    | 12          |            |             |  |
| 1892   |                          | 4                        |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         | 2      | 1        |            |         | 5             |              |          |          |                | 3              |                  |          |                         |        |                |              |                           |                   |               | 9             |             | 9             |                  | 11                  | 10                 | 12          |            |             |  |
| 1893.K |                          |                          | 2           | 4                                  |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          | 5        |                | 3              |                  |          | 6, 7                    |        |                |              |                           | 8                 |               |               |             |               |                  |                     | 9                  | 10          |            |             |  |
| 1893.S |                          | 2                        |             |                                    | 3           |                                  |           | 4          |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               | 5            |          |          |                | 1              | 6                |          |                         |        |                |              |                           | 7                 | 8             | 8             |             |               | 9                |                     | 10                 |             |            |             |  |
| 1894.K |                          | 3                        |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          | 4              | 1              |                  | 5        | 6                       |        |                |              |                           |                   | 2             | 7             |             |               |                  | 8                   | 10                 |             |            |             |  |
| 1894.S |                          |                          |             |                                    | 2           |                                  | 3         |            |                |            |              |            |         |        | 4        | 1          | 1       |               |              |          |          |                |                | 6, 7             |          |                         |        |                | 5            |                           |                   |               | 8             |             |               |                  |                     | 9                  | 1           | 10         |             |  |
| 1895.K |                          |                          |             |                                    |             | 3                                |           |            |                |            |              |            |         |        |          | 8          | 1       |               |              |          |          | 1              | 2              |                  | 6, 7     |                         |        |                |              |                           |                   | 5             |               |             |               |                  | 9                   | 9                  | 8           |            | 10          |  |
| 1895.S |                          |                          |             |                                    |             | 2                                |           |            |                | 1          |              |            |         |        |          |            | 3       |               |              |          |          |                |                | 5                | 7        |                         | 6      | 7              |              |                           |                   |               | 8             |             |               |                  |                     | 9                  |             |            | 10          |  |
| 1896.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         | 2      | 8        | 1          |         |               |              |          | 4        | 3              |                | 5                |          |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  | 9                   | 8, 10              |             |            |             |  |
| 1896.S |                          |                          |             |                                    | 3           |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                | 2            |                           |                   |               |               |             |               | 6                | 8, 9                | 9                  |             | 10         |             |  |
| 1897.K |                          |                          |             |                                    |             | 7                                |           | 5          |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 1                | 3        |                         |        | 2              |              |                           |                   | 4             |               |             |               | 6                | 8                   |                    | 9           | 10         |             |  |
| 1897.S |                          |                          |             |                                    |             | 7                                |           |            |                |            | 5            |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        | 2                       |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               | 8                |                     |                    | 9           | 10         |             |  |
| 1898.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            | 6            | 5          |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        | 2                       |        |                |              |                           |                   | 4             |               |             | 1             |                  |                     |                    | 9           | 10         |             |  |
| 1898.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        | 5        | 6, 10      | 1       |               |              |          | 7        | 7              |                |                  |          | 3                       | 2      |                |              |                           |                   |               | 8             |             |               |                  |                     | 9                  | 6, 10       |            |             |  |
| 1899.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 5                | 2        | 3                       |        |                |              |                           |                   |               |               | 1           |               |                  | 8                   | 9, 11              |             | 10         |             |  |
| 1899.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 1                | 3, 6     |                         |        | 2              |              |                           |                   |               |               |             |               | 7                | 9                   |                    | 10          |            |             |  |
| 1900.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 2        | 3                       |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    | 10          |            |             |  |
| 1900.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 1, 7             | 2        | 3                       |        |                |              |                           |                   | 5             | 4             |             |               | 4                |                     |                    |             | 11         |             |  |
| 1901.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 5                | 3        | 2                       |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1901.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                | 7                | 2, 10    | 3                       |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1902.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1902.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        | 2                       |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1903.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        | 2                       |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1903.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1904.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1904.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1905.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1905.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1906.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1906.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1907.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1907.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1908.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1908.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1909.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1909.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1910.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1910.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1911.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1911.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1912.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1912.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1913.K |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |
| 1913.S |                          |                          |             |                                    |             |                                  |           |            |                |            |              |            |         |        |          |            |         |               |              |          |          |                |                |                  | 3        |                         |        |                |              |                           |                   |               |               |             |               |                  |                     |                    |             |            |             |  |