YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

27.9.1996

Tehtävissä 2, 5, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö $\dfrac{(x+1)^2-\pi^2}{x^2+\pi^2}=0.$

2. a) Laske $\int\limits_0^{\ln 2}(e^{3x}+2e^{-x})dx.$

   b) Tavaran hintaa alennettiin ensin p % ja näin saatua hintaa vielä q %. Kuinka monta prosenttia oli kokonaisalennus? Mitä vaikuttaa kokonaisalennukseen, jos p ja q vaihdetaan?

3. Säännöllisen n-kulmion, jonka sivut $=2$, kärjet keskipisteenä piirretään ympyrät, joiden säde $=1$. Määritä sen alueen ala, jonka pisteet kuuluvat n-kulmioon mutta eivät kuulu mihinkään ympyröistä.

4. Lentokone, jonka nopeus tyynessä säässä on v km/h, lentää matkan A:sta B:hen ja takaisin. Matkan aikana puhaltaa tuuli, jonka suunta on A:sta B:hen ja nopeus c km/h. Tällöin matkaan kuluu 20 % enemmän aikaa kuin tyynessä säässä. Laske suhde c/v.

5. a) Olkoon $\overline{OP_1}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$, $\overline{OP_2}=3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ ja $\overline{OP_3}=2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$. Laske kolmion $P_1P_2P_3$ ala.

   b) Vuoden 1994 verotuksessa opintorahaa pidettiin ansiotulona, mutta opiskelijalla oli oikeus tehdä kunnallisverotuksessa ansiotuloistaan opintorahavähennys. Vähennyksen enimmäismäärä oli 13 000 mk, kuitenkin enintään saadun opintorahan suuruus. Vähennys pieneni 50 %:lla siitä määrästä, jolla ansiotulot ylittivät 13 000 mk. Vähennystä ei myönnetty, jos ansiotulot ylittivät 39 000 mk. Esitä vähennyksen määrä y ansiotulojen x funktiona ja piirrä funktion kuvaaja, kun opiskelijan opintoraha oli 11 000 mk. Mikä oli vähennyksen suuruus, kun ansiotulot olivat 22 500 mk?

6. Määritä funktion $f: f(x)=2\sin x+\cos 2x$ suurin ja pienin arvo.

7. a) Käyrällä $y=x^3(x^2-1)^{-1}$ on kolme suoraviivaista asymptoottia. Määritä ne ja piirrä käyrä asymptootteineen.

   b) Olkoon K ympyrän keskipiste, A ja B ympyrän halkaisijan päätepisteet ja C mielivaltainen kehän piste, joka ei ole A eikä B. Todista, että kehäkulma CAB on puolet keskuskulmasta CKB.

KÄÄNNÄ!

8. a) Määritä lukujonon $\frac{n^4}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ suurin luku. Perustelu.

b) Henkilö lähtee töihin joka aamu autolla samaan aikaan. Hän saapuu työpaikkansa pysäköintialueelle ajankohtana, joka noudattaa normaalijakaumaa. Keskiarvo on klo 8.50 ja hajonta 5 min. Pysäköintialueelta löytyy paikka 65 % todennäköisyydellä, ja sieltä on viiden minuutin kävelymatka työpaikalle. Jos kaikki pysäköintipaikat ovat varattuja, henkilö voi ajaa viidessä minuutissa toiselle alueelle, jolta aina löytyy pysäköintipaikka mutta jolta on 10 minuutin kävelymatka työpaikalle. Mikä on todennäköisyys, että henkilö saapuu työpaikalleen klo 9.00 jälkeen?

9. Osoita, että suora $(C^2 + 1)x - C^2y + C^2 - 1 = 0$ kaikilla vakion C arvoilla kulkee kiinteän pisteen kautta. Mikä tämä piste on? Piirrä suoraparvi.

10. a) Funktio $f : [1, \infty[\to \mathbf{R}$ on ei-negatiivinen ja toteuttaa yhtälön $x + f(x) = e^{f(x)}$. 1° Määritä $f(e-1)$ ja $f(1)$. 2° Piirrä käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja ja sen avulla funktion f kuvaaja.

b) Sydneyn asukasluku toteuttaa erään mallin mukaan differentiaaliyhtälön

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{100}y = \frac{17}{1000},$$

jossa $y = y(t)$ on asukasluku vuonna $1990 + t$ miljoonina asukkaina. Sydneyn asukasluku vuonna 1990 oli 3 539 000, joten $y(0) = 3{,}539$. Mikä on mallin mukaan Sydneyn asukasluku vuonna 2000?