

YLIOPIPILASTUTKINTO 24.9.1993 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 3, 4, 5, 7 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Mitkä kokonaisluvut toteuttavat yhtälön $x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0$?
2. Kumpi luvuista $2 + 3x$ ja $3 + 2x$ on suurempi, kun $x > 1$?
3. a) Ratkaise yhtälö $10^4 \cdot (x^2 - 1) = x - 1$.
 b) Esitä muodossa $Ax + By + C = 0$ se suora, jonka origosta alkava vektori $2\vec{i} - \vec{j} + t(\vec{i} + 2\vec{j})$ piirtää, kun t saa kaikki reaaliarvot.
4. a) Kun maan A rahayksikkö devalvoidaan, kallistuu maan B rahayksikkö A :n rahayksikössä lausuttuna p % ($p > 0$). Silloin A :n rahayksikkö halpenee B :n rahayksikössä lausuttuna q %. Johda yhtälö p :n ja q :n välille. Laske yhtälöstä p :n arvoja 5, 10 ja 30 vastaavat q :n arvot.
 b) Piirrä käyrä $y = x - |x - 2|$ ja ratkaise sitä apuna käyttäen yhtälö $3x - 3|x - 2| = x^2$. Tarkat arvot.
5. a) Millä vakion p arvoilla polynomi $2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$ on koko \mathbb{R} :ssä aidosti kasvava?
 b) Laske $\int_0^1 (1 - x^2)^r x \, dx$, kun r on positiivinen vakio.
6. Tavaraerässä on 2 % virheellisiä yksilöitä. Millä todennäköisyydellä umpimähkään otetussa 20 kappaleen näytteessä on enintään kaksi virheellistä yksilöä?
7. a) Johda n :nnen derivaatan lauseke funktiolle $f: f(x) = xe^x$.
 b) Määritä se pisteen $(2, 3)$ kautta kulkevista suorista, joka positiivisten koordinaattiakseleiden kanssa rajoittaa mahdollisimman pienen kolmion. Mikä on tämän kolmion ala?
8. Osoita, että $(1 + x) \ln x + 2(1 - x) \leq 0$, kun $0 < x \leq 1$.
9. Neliön muotoiseen kehikkoon, jonka sivu on $8r$, asetetaan r -säteisiä palloja toistensa viereen 16 kappaletta. Yhdeksään pallojen väliin jäävään kuoppaan asetetaan samoin r -säteiset pallot ja näiden yhdeksän pallon päälle edelleen neljä palloa ja näiden päälle yksi pallo. Mikä on syntyneen pallopyramidin korkeuden suhde pallon halkaisijaan $2r$?
10. a) Määritä kaikki funktiot f , jotka ovat koko \mathbb{R} :ssä derivoituvia ja toteuttavat ehdon $f(x + y) = f(x) + f(y)$ kaikilla arvopareilla (x, y) .
 b) Neliön muotoisen ruohokentän kulmaan kiinnitetään lampaan liekaköysi siten, että lammas pääsee syömään 90 % kentän ruohosta. Kuinka monta prosenttia (kahden numeron tarkkuudella) köyden pituus on kentän lävistäjän pituudesta? Tehtävä vaatii sopivalle tuntemattomalle johdetun yhtälön numeerisen ratkaisemisen.