

YLIOPIILASTUTKINTO 18.9.1992 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 3, 4, 5 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä vakiot A ja B siten, että funktio $f: f(x) = A \sin x + B \cos x$ toteuttaa ehdot $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
2. a) Määritä ne tason vektorit, joiden pituus on $= 1$ ja jotka ovat kohtisuorassa vektoria $-\vec{i} + 3\vec{j}$ vastaan.
b) Johda lauseke säännöllisen n -kulmion kulmalle.
3. a) Tavarahan hinta nousi ennen joulua p %. Sitä myytiin joulun jälkeen 60 % alennuksella, jolloin sen hinta tuli samaksi kuin ennen korotusta. Määritä p .
b) Ratkaise yhtälö $\sin x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.
4. a) Määritä käyrän $y = x^3 + 1$ ja sen pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn tangentin leikkauspiste.
b) Korttipakassa on 52 korttia, joista 4 on ässiä. Pelaaja ottaa pakasta umpimähkään 4 korttia. Mikä on todennäköisyys, että i) kaikki ovat ässiä, ii) mikään ei ole ässä?
5. a) Osoita, että yhtälöllä $(x + 1)^3 = x$ on täsmälleen yksi reaalijuuri.
b) Kumpi luvuista $a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ja ab on suurempi, kun $a \neq 0$, $b \neq 0$? Esimerkit eivät kelpaa perusteluksi.
6. Olkoot \vec{a} ja \vec{b} vektoreita, joille $|\vec{a}| + |\vec{b}| > 0$, ja $\vec{c} = \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$. Vektoreilla \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} on sama alkupiste. Osoita, että \vec{c} :n kärki C on \vec{a} :n kärjen A ja \vec{b} :n kärjen B yhdysjanalla. Missä suhteessa C jakaa janan AB ?
7. a) Ympyrälieriön muotoinen putki, jonka pituus on 50 cm ja halkaisija ulkoa mitattuna 10 cm sekä sisältä mitattuna 9,9 cm, peitetään sekä ulkoa että sisältä 0,1 mm maalikerroksella. Kuinka monta prosenttia enemmän maalia kuluu ulkopuolen maalaamiseen?
b) Laske $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x}$.
8. Lentokone, joka on 15 kilometrin korkeudessa merenpinnasta rantaviivan yläpuolella, lähettää valosignaaleja, jotka merellä oleva laiva näkee horisontissa. Kuinka pitkä matka laivan on kuljettava rantaan päästäkseen? Maapallon halkaisija on 12 756 km.

KÄÄNNÄ !

9. Lainasta, jonka suuruus on K mk, peritään 15 % vuotuinen korko, ja laina maksetaan takaisin n vuoden aikana maksamalla kunkin vuoden lopussa koron lisäksi vakiolyhennys $\frac{K}{n}$ mk. i) Kuinka paljon korkoa kaikkiaan maksetaan? ii) Millä n :n arvoilla korkomenot ylittävät lainan määrän K mk? iii) Kuinka monta prosenttia korkomenot nousevat, jos korkoprosentti nousee kahdella prosenttiyksiköllä?
10. Esitä funktio $f: f(x) = \int_0^{2x} (t + |t - x|)dt$, $x \in \mathbf{R}$, integroidussa muodossa sekä piirrä funktion kuvaaja.