

YLIOPIILASTUTKINTO 21.9.1988 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 2, 4, 6 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Ratkaise yhtälö $8x + 2\sqrt{1-x} = 5$.

b) Kuinka monta prosenttia kuution särmä kasvaa, jos kuution tilavuus kasvaa 33,1 % ?

2. a) Ratkaise yhtälö $\sin x = 2 \sin^2 x$.

b) Auton polttoainemittari näyttää nolaa, kun säiliössä on 5 l polttoainetta, ja lukemaa 50, kun säiliössä on 48 l. Mittarin lukeman muutos on verrannollinen polttoaineen lisäykseen. Kuinka paljon säiliössä on polttoainetta, kun mittarin lukema on 25 ?

3. Laske sen alueen ala, jota rajoittavat käyrä $y = \frac{1+x}{x^3}$, x -akseli sekä suorat $x = \frac{1}{3}$ ja $x = \frac{1}{2}$.

4. a) Pisteestä $A = (1,1)$ ja $B = (-1,2)$ piirretään vektorit suoralla $y = x + 1$ olevaan pisteeseen P . Määritä P siten, että vektorit \vec{AP} ja \vec{BP} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Suoran ympyrälieriön muotoisen litran mitan pohjan halkaisija on 12,0 cm. Kuinka suuri on samanmuotoisen $\frac{1}{3}$ litran mitan korkeus?

5. Osoita, että funktio $f: f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5x$ on koko \mathbb{R} :ssä aidosti kasvava.

6. a) Suoran ympyrälieriön muotoinen säiliö, jonka tilavuus on V , valmistetaan kahdesta eri materiaalista. Pohjiin käytettävän materiaalin hinta (mk/m^2) on 40 % suurempi kuin vaipan materiaalin. Määritä lieriön korkeuden ja pohjan säteen suhde siten, että säiliön materiaalikustannukset ovat mahdollisimman pienet.

b) Suoran $ax - by = 0$ kertoimet a ja b valitaan umpimähkään väliltä $[0,1]$. Mikä on todennäköisyys, että suoran kulmakerroin on $\leq \frac{1}{3}$?

7. a) Määritä vakiot A ja B siten, että funktio $F: F(x) = A \ln(1-x) + B \ln(x+2)$ on funktion $f: f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x-2}$ integraalifunktio välillä $] -2,1[$.

b) Määritä kaikki kompleksiluvut z , joille $z^2 = 2i$.

8. Määritä kaikki kokonaisluvut n , jotka toteuttavat yhtälön $(n^2 + n - 1)^{n+3} = 1$.

9. Osoita, että kaikilla x :n positiivisilla arvoilla funktion $f: f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x+t}$ derivaatta on

$$-\int_0^1 \frac{dt}{(x+t)^2}.$$

10. Suppenevan lukujonon (x_n) , $n = 1,2,3,\dots$, luvut toteuttavat kaikilla n :n arvoilla kaavan $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, missä $a > 0$. Määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.