

Tehtävissä 5, 7 ja 8 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä yhtälön $x^4 - x^3 + x^2 - x = 0$ kaikki juuret.
2. Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(2,3)$ ja joka sivuaa suoraa $y = 2x + 2$.
3. Määritä $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{\frac{2}{x}} - 1}{2 - x}$.
4. Suora $y = \frac{1}{2}x$ ja paraabeli $y = kx^2$ ($k > 0$) rajoittavat äärellisen alueen A. Määritä vakio k siten, että A:n ala on 3.
5. a) Määritä pisteitä $A = (4,7)$ ja $B = (-5,3)$ yhdistävältä janelta piste C siten, että $AC:CB = 2:3$.
b) Määritä differentiaaliyhtälön $y' + 3y = 2$ se ratkaisu, joka toteuttaa ehdon $y(0) = 1$.
6. Suoran ympyräkartion korkeus on h ja pohjaympyrän säde r. Määritä kartion sisään piirretyistä suorista ympyrälieriöistä tilavuudeltaan suurin. Mikä on maksimitilavuuden ja kartion tilavuuden suhde?
7. a) Osoita, että funktio $f: f(x) = \sin \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$ on positiivinen välillä $0 < x < \pi$.
b) Joukossa $A = 2\mathbb{Z} \times \{0\}$, jonka alkiot ovat siis muotoa $(2n,0)$ ($n \in \mathbb{Z} =$ kokonaislukujen joukko), määritellään laskutoimitus kaavalla $(2m,0) + (2n,0) = (2(m+n),0)$. Osoita, että kuvaus $f: \mathbb{Z} \rightarrow A$, $f(n) = (-2n,0)$ on bijektio (eli surjektio ja injektio) ja lisäksi toteuttaa ehdon $f(m+n) = f(m) + f(n)$.
8. a) Määritä kompleksiluvut z, jotka toteuttavat samanaikaisesti ehdot $|z - 0,5| = |z - 1|$ ja $|z - i| = \frac{5}{4}$.
b) Laatikossa on 2 valkoista ja 3 mustaa palloa. Siitä otetaan umpimähkään kaksi palloa samanaikaisesti. Mikä on todennäköisyys sille, että 1^o pallot ovat eriväriset, 2^o molemmat pallot ovat valkoisia, 3^o molemmat ovat mustia?
9. Millä arvoilla sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (xe^{-(x+1)})^n$ suppenee? Mikä on tällöin sen summa?
10. Osoita, että $0 < \int_1^n \frac{dx}{x} - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) < 1 - \frac{1}{n}$, kun $n = 2,3,\dots$.