

Tehtävissä 5, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_{-\pi}^{\pi} (x - \cos x) dx$ .
2. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{4x^2 + 1}{x} \geq 4$ .
3. Osoita: Funktiolla  $Ax + e^{-x}$  on yksi minimikohta, jos  $A > 0$ , mutta ei lainkaan ääriarvokohtia, jos  $A \leq 0$ .
4. Ratkaise yhtälö  $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{2}{5}$ .
5. a) Vektorit  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = x\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  ja  $\vec{c} = -2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  ovat suuntaissärmiön erisuuntaisina särminä. Määritä kertoimet  $x$ ,  $y$  ja  $z$  siten, että särmiö on suorakulmainen, ja laske tämän särmiön tilavuus.  
b) Ratkaise yhtälö  $\sin 2x - \tan x = 0$ .
6. a) Erään teollisuustuotteen laaduntarkkailussa löytyy viallisia kappaleita keskimäärin 3 %. Kuinka monta kappaletta on tutkittava, jotta todennäköisyys sille, että löytyy ainakin yksi viallinen kappale, olisi vähintään 0,90 ?  
b) Piste  $z$  liikkuu kompleksitasossa siten, että se toteuttaa yhtälön  $z = iz$ . Osoita, että piste  $z$  piirtää erään suoran. Osoita, että myös piste  $w = 2z + i$  piirtää erään suoran. Piirrä kuvio.
7. a) Kuvaus  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on injektio ( $\mathbb{R}$  reaalilukujen joukko). Osoita, että myös kuvaus  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (f(x))^3 + 3f(x)$  on injektio.  
b) Millä välillä lauseke  $\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2}$  määrittelee reaaliarvoisen funktion? Määritä funktion suurin ja pienin arvo tällä välillä.
8. Osoita, että  $\frac{3^n - 1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{3^n - 1}{3^n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).
9. a) Osoita, että epäyhtälöstä (a)  $|x| \leq 1$  seuraa epäyhtälö (b)  $|x^2 - x| \leq 2$ . Etsi jokin piste, jossa (b) on voimassa, mutta (a) ei ole voimassa.  
b) Funktio  $f$  on kaikkialla jatkuva, ja  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f(t) dt$ . Määritä  $f$ .
10. Osoita, ettei mikään käyrän  $y^2 = \frac{x^3 - 1}{3x}$  piste  $(x, y)$  ole ympyrän  $x^2 + y^2 = 1$  sisällä.