

Tehtävissä 4, 5, 6 ja 7 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{x^2 - x}$ .
2. P on ensimmäisen asteen polynomi. Osoita, että lukujonon  $P(1), P(2), \dots, P(n), \dots$  kahden peräkkäisen luvun erotus on vakio.
3. Osoita, että funktion  $x^2(2x-1)^2$  derivaatalla on nollakohta lukujen 0 ja  $\frac{1}{2}$  välissä.
4. a) Määritä joukon  $\{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y < 2\}$  alkukuva kuvauksessa  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  ( $\mathbb{R}$  reaalilukujen joukko).  
 b) Millä  $x$ :n arvoilla funktion  $4x^2 - 4x + 2$  arvo kuuluu väliin  $1 < y < 2$ ?
5. a) Funktio  $f$  on jatkuva ja toteuttaa epäyhtälöt  $x^{3/2} \leq f(x) \leq x^{1/2}$  välillä  $0 \leq x \leq 1$ . Arvioi ylös- ja alaspäin integraalia  $\int_0^1 f(x) dx$ .  
 b) Nelikulmion OABC kärjestä O muihin kärkiin piirretyt vektorit ovat  $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = x\vec{i} + y\vec{j}$  ja  $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ . Määritä  $x$  ja  $y$  siten, että kulmat OAB ja OCB ovat suorita.
6. a) Kolminumeroisten positiivisten kokonaislukujen joukosta valitaan umpimähkään yksi luku. Millä todennäköisyydellä tämä on jaollinen 3:lla tai 5:llä?  
 b) Miten sijaitsevat kompleksitasossa ne pisteet  $z = x + iy$ , jotka toteuttavat yhtälön  $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0$ ?
7. a) Kolmion kärjet ovat  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  ja  $(a,a^2)$ . Minkä käyrän piirtää kolmion mediaanien leikkauspiste  $a$ :n vaihdellessa?  
 b) Funktio  $f$ , joka on derivoituva kaikilla  $x$ :n positiivisilla arvoilla, täyttää ehdot:  $f(x) + x \cdot f'(x) = 2$  ja  $f(2) = 1$ . Osoita, että  $f(x) < 2$ , kun  $x > 0$ .
8. Tasakylkisessä kolmiossa on kyljen vastainen mediaani  $= m$ . Mikä on kolmion alan suurin mahdollinen arvo?
9. Määritä piste, jossa käyrillä  $y = 1 + x + x^2$  ja  $y = \frac{1}{1-x}$  ( $x < 1$ ) on yhteinen tangentti. Osoita, että käyrät ovat tangentin samalla puolella ja toinen käyrä kulkee sivuamispisteessä toisen alapuolelta yläpuolelle.
10. Funktio  $f$  on jatkuva ja toteuttaa epäyhtälöt  $0 < f(x) < 1$  välillä  $0 \leq x \leq 1$ . Osoita: On olemassa luku  $a$  siten, että  $0 < a < 1$  ja  $f(a) = a$ .