YLIOPPILASTUTKINTO 1.10.1976 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 6, 7 ja 8 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske käyrien $y = x^2$ ja $y = \sqrt{x}$ rajoittaman alueen ala.

2. Jana AB halkaisijana piirretään ympyrä ja siihen jänne AP, joka muodostaa AB:n kanssa kulman α $(\pi/4 < \alpha < \pi/2)$. Kuinka suuren kulman ympyrälle pisteeseen P piirretty tangentti muodostaa suoran AB kanssa?

3. Tutki, onko $+\sqrt{90 - 60\sqrt{2}} = +\sqrt{30} - 2\sqrt{15}$.

4. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0$ on kolme erisuurta reaalijuurta?

5. Ratkaise yhtälöpari $x + y = 1$, $|x| + |y| = 4$.

6. a) Kartiopinta sivuaa R-säteistä palloa pitkin ympyrää. Kartion kärki on etäisyydellä 2R pallosta. Missä suhteessa sivuamisympyrän taso jakaa pallon sen halkaisijan, joka on kartion akselilla?

b) Olkoot $\bar{a}$ $(\neq \bar{0})$ ja $\bar{b}$ $(\neq \bar{0})$ kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa xy-tason vektoria. Saman tason vektori $\bar{r}$, jonka alkupiste on origo, muuttuu siten, että se toteuttaa yhtälön $\bar{a}\cdot(\bar{r} + \bar{b}) = \bar{b}\cdot\bar{r}$. Kuinka vektorin $\bar{r}$ loppupiste liikkuu? Piirrä kuvio.

7. a) Funktio f on määritelty kaikilla reaaliarvoilla ja täyttää seuraavat ehdot: 1° on olemassa äärellinen raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$, 2° $f(x+y) = f(x) + f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x, y. Osoita, että funktiolla f on derivaatta jokaisella arvolla x.

b) Määritä differentiaaliyhtälöä käyttäen ne käyrät, joilla on seuraava ominaisuus: suora $y = 1$ puolittaa käyrän jokaisen tangentin sen osan, joka on sivuamispisteen ja y-akselin välissä. Piirrä näistä käyristä se joka kulkee pisteen $(2,-1)$ kautta.

8. a) Laske funktion $\sin^6 x + \cos^6 x$ suurin ja pienin arvo.

b) Lukujoukon $\{x_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$ keskiarvo on $\bar{x}$ ja keskihajonta s_x. Laske määritelmistä lähtien lukujen $z_i = a + cx_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ keskiarvo $\bar{z}$ ja keskihajonta s_z. Olkoon erityisesti $\bar{x} = 5$, $s_x = 3$. Määritä a ja c siten, että $\bar{z} = 0$, $s_z = 1$.

9. Olkoot α ja β yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret $(\alpha > \beta)$ ja $c_n = \alpha^n - \beta^n$ $(n = 1,2,\ldots)$. Osoita, että $c_n + c_{n+1} = c_{n+2}$, ja laske c_3.

10. Olkoon $P = (0,t)$ $(t \geq 0)$ paraabelin $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ akselilla oleva piste ja $Q = (u,v)$ sitä lähinnä oleva paraabelin piste. Lausu v t:n funktiona ja piirrä tämän funktion kuvaaja.