YLIOPPILASTUTKINTO 7.9.1971 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Ratkaise yhtälöpari $x+y = 3$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$.
2. Laske suorien $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = 2x-3$ ja $y = -3x + 12$ rajoittaman kolmion pinta-ala.
3. Olkoot A, B ja C kolmion kulmat. Osoita, että $\sin(A+B) + \sin(B+C) + \sin(C+A) = \sin A + \sin B + \sin C$.
4. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

   a) R-säteisen pallon sisään on piirretty suora särmiö, jonka pohja on tasasivuinen kolmio. Laske särmiön tilavuus, kun pohjasärmä on $R\sqrt{2}$.

   b) Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\bar{a} = \bar{i} + \sqrt{2}\,\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + \sqrt{2}\,\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{c} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}\,\bar{j} - \bar{k})$ ovat tetraedrin särminä. Osoita, että tetraedri on säännöllinen.
5. Osoita, että funktio $f(x) = \cos\alpha - \cos(2x + \alpha)$ ($\alpha$ vakio) saa kuvaajansa kaikissa käännepisteissä saman arvon.
6. Yhtälö $3x - 5 = |y - 1|$ määrittelee kaksi jatkuvaa funktiota $y = f(x)$ ja $y = g(x)$, joiden kuvaajilla on yhteinen piste. Piirrä funktioiden kuvaajat ja laske se kulma, jonka ne muodostavat mainitussa pisteessä.
7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < 1.$$
8. Laske käyrän $y = \frac{1}{x}$ ja suoran $x + ey + 1 + e = 0$ rajoittaman alueen pinta-ala (e Neperin luku).
9. Osoita, että funktio $f(t) = \int_0^{\pi/2} (3t + 2\sin x)^2 dx$ on toisen asteen polynomi, joka on kaikilla t:n arvoilla positiivinen.
10. Yhtälöiden $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ ja $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ kertoimet ovat reaaliset ja nollasta eroavat sekä toteuttavat yhtälön $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Osoita, että ainakin toisen yhtälön juuret ovat reaaliset.
11. Laske integraali $\int_0^1 x(1-x)^p dx$ $(p>0)$.
12. Lukujoukon $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ aritmeettinen keskiarvo on $\bar{x}$ ja keskihajonta s. Osoita, että $s^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \bar{x}^2$.