YLIOPPILASTUTKINTO 30.3.1994 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 3, 4, 6 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö $|2x-1| = |3x+2|$.

2. a) Polynomin $P(x) = ax^3 - 31x^2 + 1$ eräs nollakohta on $x = 1$. Määritä $a$ ja ratkaise tämän jälkeen yhtälö $P(x) = 0$.

   b) Puu, jonka korkeus oli 30 metriä, taittui 10 metrin korkeudelta, ja latvaosa kaatui maahan irtoamatta tyviosasta. Kuinka kaukana latva osui maahan?

3. a) Ratkaise yhtälö $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$.

   b) Teollisuustuotannon osuus kansantuotteesta on 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia teollisuustuotannon tulisi kasvaa, jotta sen osuus kansantuotteesta nousisi 30 prosenttiin, jos muilla osa-alueilla ei tapahdu muutoksia?

4. a) Sadevesimittarina käytettiin kärjellään seisovaa ympyräkartiota, jonka korkeus oli 15 cm ja pohjan säde 20 cm. Sateen jälkeen mittarin vedenpinta oli 7 cm korkeudella. Kuinka monta millimetriä oli sademäärä?

   b) Määritä kompleksiluvut $z = x + iy$, joille $z^2 = -i$.

5. Erästä peliä pelaa kolme yhtä taitavaa pelaajaa A, B ja C. Kukin pelaaja saa voitosta pisteen, ja lopullinen voittaja on se pelaaja, joka ensiksi saa kolme pistettä. A voittaa ensimmäisen pelin, B toisen ja kolmannen. Mikä on todennäköisyys sille, että C on lopullinen voittaja?

6. a) Laske $\displaystyle\int_{-\frac{\omega}{k}}^{-\frac{\omega}{k}+\frac{\pi}{k}} k\,\sin(kx+\omega)\,dx$, kun $k \neq 0$. Miten lausekkeen arvo riippuu vakiosta $k$?

   b) Neliön muotoista tonttia esittävät $xy$-koordinaatistossa epäyhtälöt $0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 10$. Tontilla on neljä rakennusta, joiden pohjat ovat

   $$1 \le x \le 4,\quad 1 \le y \le 4\,; \qquad 6 \le x \le 9,\quad 1 \le y \le 4\,;$$

   $$6 \le x \le 9,\quad 6 \le y \le 9 \qquad \text{ja} \qquad 1 \le x \le 4,\quad 6 \le y \le 9.$$

   Muodosta lyhin tie tontin kulmasta $(0,0)$ vastakkaiseen kulmaan.

KÄÄNNÄ !

7. a) Jana $AB$, jonka pituus on 5, liikkuu siten, että sen päätepiste $A = (0, y)$ on $y$-akselilla ja päätepiste $B = (x, 0)$ negatiivisella $x$-akselilla. Aikavälillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on $y$ ajan $t$ funktio: $y = y(t) = 5\ \sin t$. Millä välillä piste $B$ liikkuu, ja mikä on sen nopeus ajan $t$ funktiona?

b) Vektorin $\bar{v} = p\bar{i} + p\bar{j} + z\bar{k}$ pituus on 1. Määritä $p$ siten, että $\bar{v}$ yhdessä vektoreiden $2p\bar{i}$ ja $2p\bar{j}$ kanssa virittää tilavuudeltaan mahdollisimman suuren tetraedrin. Mikä on tämän tetraedrin tilavuus?

8. Lasista valmistettu maljakko on muodoltaan pyörähdyskappale, joka syntyy suorien $y = 4$ ja $y = -4$, paraabelin $x = 1 + y^2$ sekä $y$-akselin rajoittaman alueen pyörähtäessä $x$-akselin ympäri. Maljakon pohjan halkaisija on 8,0 cm. Kuinka paljon maljakko painaa, kun lasin tiheys on 3600 kg/m$^3$?

9. Osoita, että lausekkeella

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

missä $x^2 + y^2 > 0$, on vakioarvo kullakin origosta lähtevällä säteellä. Mikä tämä vakioarvo on säteellä, joka muodostaa kulman $\varphi$ positiivisen $x$-akselin kanssa, ja minkä rajojen välissä tämä vakioarvo vaihtelee? Voiko vakioarvo olla sama kahdella eri säteellä?

10. Pisteen $(1,2)$ kautta kulkee käyrä $y = f(x)$, jonka mielivaltaiseen pisteeseen $(x, f(x))$ piirretty normaali leikkaa $x$-akselin pisteessä $(\frac{x}{3}, 0)$. Määritä käyrän yhtälö.