

YLIOPIILASTUTKINTO 2.4.1993 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 3, 4, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö

$$\frac{x}{x-3} = \frac{x-3}{x}.$$

2. Laboratoriossa tarvitaan 750 grammaa 2-prosenttista suolaliuosta. Saatavilla on vain 5-prosenttista suolaliuosta ja vettä. Kuinka paljon näitä on sekoitettava halutun liuoksen valmistamiseksi?

3. a) Laske funktion $e^x + e^{-3x}$ tarkka arvo, kun $e^{2x} = 9$.

- b) Autoilijan työmatkan kesto t riippuu liikennevirrasta m kaavan

$$t = 0,01m^2 + 0,03m + 18$$

mukaisesti, missä t on ajoaika minuutteina ja m liikenteen mittauspisteen minuutissa ohittavien autojen määrä. Kuinka suuri saa liikennevirta enintään olla, jotta autoilijan työmatka kestäisi enintään puoli tuntia?

4. a) Huoneessa on kaksi pystysuoraa peiliä, joiden välinen kulma on 130° . Vaakasuora valonsäde heijastuu peräkkäin molemmista peileistä. Mikä on tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma?

- b) Olkoon $w = 1 - 2i$. Määritä kompleksiluku z , jolle $z + w$ on puhtaasti imaginaarinen ja zw reaalinen.

5. Ratkaise yhtälö

$$\frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} = a$$

vakion a kaikilla reaaliarvoilla.

6. a) Tutki, onko yhtälöllä $\sin x + \cos x = 1,41422$ reaalijuuria.

- b) Suoran tien viereen rakennetaan täyttömaasta meluvalli, jonka poikkileikkaus on pystyssä olevan paraabelin muotoinen. Vallin korkeus on 3 m, leveys maanpinnan tasolla 6 m ja pituus 55 m. Kuinka monta kuutiometriä täyttömaata valliin tarvitaan?

KÄÄNNÄ !

7. a) Pisteestä $P_1 = (10, 0, 0)$ lähetetään valonsäde suuntaan $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ ja pisteestä $P_2 = (310, 480, 400)$ suuntaan $\vec{v}_2 = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k}$. Kohtaavatko valonsäteet toisensa?

b) Laivan polttoainekulut tunnissa ovat verrannolliset nopeuden kuutioon. Laivan muut kulut ovat 12 000 mk tunnissa. Nopeudella 20 km/h polttoainekulut ovat 1500 mk/h. Millä nopeudella matka Helsingistä Turkuun on kokonaiskuluiltaan mahdollisimman edullinen?

8. Kemistä klo 15.12 lähtenyt juna kohtaa Muurolassa Rovaniemeltä klo 16.00 lähteneen junan ja on perillä Rovaniemellä klo 16.40. Vastaantullut juna on puolestaan Kemissä klo 17.22. Kuinka paljon kello on junien kohdatessa ja kuinka kaukana Muurola on Kemistä, kun Kemin ja Rovaniemen välimatka on 114 km?

9. a) Henkilöt A ja B käyvät päivittäin samassa kahvilassa. Kumpikin saapuu kahvilaan sattumanvaraiseen aikaan klo 9.00 ja 10.00 välillä ja viipyy siellä 15 minuuttia. Mikä on todennäköisyys sille, että he ovat kahvilassa tietynä päivänä samalla hetkellä?

b) Tutki, millä tarkkuudella likimääräinen yhtälö

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$$

pätee, kun $0 \leq x \leq 0,1$.

10. Missä \mathbf{R} :n osajoukossa A funktio f :

$$f(x) = \ln(3(1 - e^{-x}))$$

voidaan määritellä? Osoita, että f on A :ssa aidosti kasvava. Mikä on A :n kuva $f(A)$ kuvauksessa f ? Muodosta f :n käänteisfunktio f^{-1} . Missä joukossa B se puolestaan voidaan määritellä ja mikä on $f^{-1}(B)$? Laske $f'(x)$ ja $(f^{-1})'(y)$ ja totea, että niiden tulo vastinpisteissä on $= 1$. Piirrä samaan koordinaatistoon käyrät $y = f(x)$ ja $y = f^{-1}(x)$.