

YLIOPIILASTUTKINTO 27.3.1991 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 3, 4, 5 ja 7 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Ratkaise yhtälö  $x - \sqrt{43 - 3x} = 11$ .

b) Seuramatkan hinnasta lennon osuus on 50 %. Lennon hinnasta 30 % on polttoainekustannuksia. Polttoaine kallistuu 10 %. Kuinka monen prosentin nousun tämä aiheuttaa matkan kokonaishintaan?

2. Laske  $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ .

3. a) Millä vakion  $a$  arvoilla  $x = 0$  on yhtälön  $x^3 + ax^2 + x = 0$  ainoa reaalijuuri?

b) Määritä funktion  $f: f(x) = (1 - \cos^3 x)^3$  suurin ja pienin arvo.

4. a) Henkilö lottoaa yhden rivin (7 numeroa 39:stä). Mikä on todennäköisyys, ettei hän saa yhtään oikein?

b) Olkoon vektori  $\vec{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$ . Määritä piste  $B$  siten, että kulma  $OAB$  on suora ja vektorin  $\vec{OB}$  pituus on kaksi kertaa vektorin  $\vec{OA}$  pituus.

5. a) Yhtälössä  $\ln y = x/2 + 10^5$  muuttuja  $x$  kasvaa ykkösen verran. Kuinka monta prosenttia kasvaa tällöin  $y$ ?

b) Suoran ympyräkartion pohjana on kuution pohjaneliöön sisäänpiirretty ympyrä. Kartio leikkaa kuution vastakkaisen tahkon pitkin ympyrää, jonka ala on kolmasosa pohjaympyrän alasta. Laske kartion tilavuuden ja kuution tilavuuden suhde.

6. Kahden metrin korkeudelta heitetty pallo osuu viiden metrin päässä olevan puun runkoon viiden metrin korkeudella. Pallon lentoratana on paraabeli, jonka huippu on heittäjän ja puun välissä kahden metrin etäisyydellä puusta. Laske heittokulma.

7. a) Tasa-aineinen pallo kelluu vedessä siten, että siitä on pinnan yläpuolella osa, jonka korkeus on  $r/5$  ( $r$  on pallon säde). Määritä pallon tiheys ( $\text{kg/m}^3$ ), kun veden tiheys on  $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

b) Osoita, että erotus  $1 + 0,5 \cdot t - \sqrt{1+t}$  on pienenevä, kun  $-1 \leq t \leq 0$ , ja kasvava, kun  $t \geq 0$ . Tutki tätä tietoa käyttäen, millä tarkkuudella yhtälö  $\sqrt{1+x^5} \approx 1 + 0,5 \cdot x^5$  on voimassa, kun  $x \in \left[-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right]$ .

KÄÄNNÄ !

8. Jana  $AB$ , jonka pituus on 1, liikkuu siten, että sen päätepiste  $A = (a, 0)$  on  $x$ -akselilla ja päätepiste  $B = (0, b)$   $y$ -akselilla. Minkä käyrän piirtää tällöin piste  $C = (x, y)$ , joka jakaa janan siten, että  $|AC| : |CB| = 1 : 3$  ?
9. Funktio  $f$  on määritelty välillä  $] -1, 1[$ , ja derivaatta  $f'$  on olemassa pisteessä  $x = 0$  (mutta ei välttämättä muualla). Määritä

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(-x^2)}{x^2}.$$

10. Suorakulmaisen huoneen korkeus on 2 m, leveys 3 m ja pituus 4 m. Lattian nurkkapistestä on seinää ja kattoa pitkin vedettävä mahdollisimman lyhyt sähköjohto katon keskipisteeseen. Mihin katonrajan kohtaan johto on vedettävä, ja kuinka paljon johtoa tarvitaan?