

YLIOPIILASTUTKINTO 31.3.1989 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 2, 4, 6, 7 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

- Määritä vakiot  $A$  ja  $B$  siten, että funktio  $f: f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$  toteuttaa ehdot  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 4$ .
- a) Laske  $\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$ .  
 b) Auto kulkee matkan  $s$  tasaisella nopeudella  $v$ . Kuinka monta prosenttia nopeammin matka olisi kuljettava, jotta matkustusaika vähenisi 60 prosentilla?
- Yksikkövektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Määritä vektorin  $\bar{c}$  pituus, kun  $\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c} = \bar{0}$ .
- a) Ympyränkaari  $s_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$  muodostaa tasoalueen  $S$  yläreunan. Kaaret  $s_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + Rx = 0, y \leq 0\}$  ja  $s_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - Rx = 0, y \geq 0\}$  muodostavat sen alareunan. Piirrä  $S$  ja määritä sen ala.  
 b) Kumpi luvuista  $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt[6]{10^{-1001}}}$  ja  $y = \sqrt[6]{1 + \sqrt[3]{10^{-1001}}}$  on suurempi?
- Räjätystyömaalta lentää kivi 30 metrin päähän, jolloin sen lentoratana olevan paraabelin huippu on 10 metrin korkeudessa. Määritä lähtökulma  $0,1^\circ$  tarkkuudella vaakasuoran maanpinnan suhteen mitattuna.
- a) Suoran ympyräkartion korkeuden  $H$  ja pohjan säteen  $R$  suhde on 2. Määritä kartion sisäänpiirretyn pallon tilavuuden suhde kartion tilavuuteen. Tarkka arvo ja likiarvo kahdella desimaalilla.  
 b) Heitettäessä kahta noppaa silmälukujen neliöiden summa  $s$  on satunnaismuuttuja. Määritä  $s$ :n odotusarvo.
- a) Mitkä kompleksiluvut  $z$  toteuttavat yhtälöparin  $z\bar{z} = 1$ ,  $z - \bar{z} = i(z + \bar{z})$ ?  
 b) Käyrät  $y = -2x^2 + 2 \geq 0$  ja  $y = \sqrt{1-x^2}$  rajoittavat useampiosaisen tasokuvion. Näistä osista se, joka jää ympyrän  $x^2 + y^2 = 1$  ulkopuolelle, pyörähtää  $x$ -akselin ympäri. Määritä syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuuden tarkka arvo ja likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.
- a) Määritä likiarvoja käyttämättä funktion  $f: f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , suurin ja pienin arvo.  
 b) Määritellään  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  kaavalla  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + nx}{1 + nx^2}$ . Piirrä funktion  $f$  kuvaaja.
- Lankaan pujotetaan 24 pallon muotoista lasihelmeä, jotka peittävät 40 cm langasta. Helmistä on 6 mustaa, 8 punaista ja 10 vihreää. Samanväriset helmet ovat samankokoisia, ja mustan helmen halkaisija on puolet punaisen halkaisijasta. Minkä pituisia on helmien halkaisijoiden oltava, jotta helminauha olisi mahdollisimman kevyt? Helmien pujotusreikiä ei oteta huomioon. Vastaus 0,1 mm tarkkuudella.
- 100 000 markan laina, jonka vuotuinen korko on 10 %, maksetaan takaisin kymmenessä vuodessa suorittamalla kunkin vuoden lopussa vakioerä, joka koostuu korosta ja kuoletuksesta. Minkä suuruisen tämän vakioerä on? Mikä on kymmenentenä vuotena maksettu korko?