

YLIOPIILASTUTKINTO 30.3.1988 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 1, 2, 4, 5 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. a) Laske $\int_0^1 x(\sqrt{x} + 1)dx$.
 b) Kuinka paljon 30-prosenttista pakkasnestettä on lisättävä 5 litraan 60-prosenttista pakkasnestettä, jotta seos olisi 40-prosenttinen?
2. a) Osoita, että lausekkeiden $x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2}$ ja $x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 2x^2}$ arvot ovat toistensa käänteislukuja kaikilla x :n arvoilla.
 b) Auton jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden 2. potenssiin. Jos nopeus on 100 km/h, on jarrutusmatka 60 m. Mikä on jarrutusmatka, jos nopeus on 60 km/h?
3. Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 + (3a + 1)x + 81 = 0$ juuret ovat reaaliset?
4. a) Määritä ne vektorien $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ määräämän tason yksikkövektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ vastaan.
 b) Metsäpalstan puuston määräksi arvioitiin vuoden 1988 alussa 100 m^3 ja sen vuotuiseksi kasvuksi 17 %. Metsästä myydään vuodesta 1988 alkaen joka vuoden lopussa 16 m^3 puuta. Minkä vuoden alussa metsässä on puuta yli 120 m^3 ?
5. a) Suoran ympyräkartion korkeus on h ja pohjan säde r . Sen sisään on piirretty toinen suora ympyräkartio, jonka pohjaympyrä on annetun kartion vaipalla ja huippu annetun kartion pohjan keskipisteessä. Miten suuri on enintään jälkimmäisen kartion tilavuuden suhde annetun kartion tilavuuteen?
 b) Määritä yhtälön $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ kaikki ratkaisut.
6. Käyrät $y = e^x + C$ ja $y = 2x$ leikkaavat toisensa origossa. Laske käyrien toisen leikkauspisteen koordinaatit kolmella desimaalilla. Piirrä kuvio.
7. Osoita, että lukujono $a_n = \frac{n!}{n^{\frac{1}{n}}}$ on aidosti vähenevä (so. $a_n > a_{n+1}$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$).
8. Määritä se funktion $f: f(x) = |x - 1|$ integraalifunktio F , jolle $F(-1) = 0$. Piirrä funktioiden f ja F kuvaajat.
9. a) Osoita, että jokainen parven $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ympyrä leikkaa parven $x^2 + y^2 - 2by = 0$ jokaisen ympyrän kohtisuorasti.
 b) Suunnikkaan $OABC$ sivujen AB ja BC keskipisteet ovat D ja E . Osoita, että vektorit \vec{OD} ja \vec{OE} jakavat lävistäjän \vec{AC} kolmeen yhtä suureen osaan.
10. Osoita, että kaikilla x :n arvoilla $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.