

Tehtävissä 3, 4, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske  $\int_1^e (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})dx$ .
2. Määritä yhtälön  $(1 + x + x^2)^2 = 1 + x + x^2$  reaalijuuret.
3. a) Määritä  $x$ , kun  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  ja  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ .  
 b) Eräänä viisivuotiskautena 1000 markan talletus kasvoi korkoa 5% vuodessa. Samana aikana hinnat nousivat 7% vuodessa. Kuinka monta prosenttia talletuksen reaaliarvo aleni tuona aikana?
4. a) Jaa vektori  $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$  kahteen keskenään kohtisuoraan komponenttiin, joista toinen on suoran  $3x - y + 2 = 0$  suuntainen.  
 b) Tasasivuisen kolmion, jonka sivut ovat  $= s$ , sisään on piirretty kolme  $r$ -säteistä ympyrää, jotka sivuavat toisiaan pareittain. Lisäksi kukin ympyröistä sivuaa kahta kolmion sivua. Määritä suhde  $r:s$ .
5. Määritä ellipsin  $x^2 + 4y^2 = 4$  sisään piirretyistä suorakulmioista se, jonka piiri on pisin.
6. Ratkaise yhtälöpari  $x^{1/y} = 27$ ,  $(\frac{x^2}{3})^y = 3$ .
7. a) Todista, että yhtälöllä  $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$  on täsmälleen yksi reaalijuuri, ja määritä juuren arvo kolmen desimaalin tarkkuudella.  
 b) Määritä käyrä  $y = f(x)$ , jolla on seuraavat ominaisuudet: 1<sup>o</sup> Käyrän pisteseen  $(t, f(t))$  piirretty tangentti leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $(t + \frac{1}{t}, 0)$ , kun  $t \neq 0$ , ja on vaakasuora, kun  $t = 0$ . 2<sup>o</sup> Käyrä kulkee pisteen  $(1, 1)$  kautta. Piirrä käyrä.
8. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2\cos x)^n$  suppenee, ja mikä on tällöin sen summa?
9. a) Olkoon  $I_n$   $x$ -akselin jana  $[2n, 2n+1]$ . Tason pisteestä  $(0, 1)$  piirretään suora, joka muodostaa  $x$ -akselin kanssa umpimähkään valitun kulman  $\alpha$ . Millä todennäköisyydellä suora kohtaa jonkin janoista  $I_{-2}$ ,  $I_{-1}$ ,  $I_0$ ,  $I_1$  ja  $I_2$ ?  
 b) Osoita, ettei taso, jonka määräävät origosta lähtevien vektoreiden  $\vec{a} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + (x+1)\vec{j} + \vec{k}$  ja  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + (x+2)\vec{k}$  kärjet, millään  $x$ :n arvolla ole vektorin  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  suuntainen.
10. Määritä  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , kun  $f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}$  ja  $x \in [0, 1]$ . Piirrä funktioiden  $f_1$ ,  $f_{10}$  ja  $f$  kuvaajat. Laske  $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$  ja määritä  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  nojautuen siihen, että  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = 0$ .