YLIOPPILASTUTKINTO 28.3.1979 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 4, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Laske $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\sin x + \cos x)dx$.

2. Määritä yhtälöiden $(1-2x^2)(1+2x^2) = 1$ ja $(1-2x^2)(1+2x^2) = 0$ kaikki juuret.

3. Piirrä käyrä $y = |x| + |x-1|$ sekä ratkaise sen avulla epäyhtälö $|x| + |x-1| < 2$.

4. a) Määritä funktion f: $f(x) = \cos x + \cos 2x$ suurin ja pienin arvo (tarkat arvot).
b) Satunnaismuuttujan tiheysfunktio on $xe^{-x^2/2}$, kun $x \geq 0$, ja $= 0$, kun $x < 0$. Määritä kertymäfunktio ja laske $P(1 < x < 2)$.

5. Piste P liikkuu tasossa siten, että sen etäisyys pisteestä $(6,0)$ on aina kaksi kertaa niin suuri kuin sen etäisyys pisteestä $(0,3)$. Määritä pisteen P piirtämän käyrän yhtälö. Piirrä kuvio.

6. Hyperbeli $x^2 - y^2 = 16$ ja suora $x = 8$ rajoittavat äärellisen alueen. Alueeseen piirretään suorakulmio siten, että sen kaksi kärkeä ovat suoralla ja kaksi muuta kärkeä hyperbelillä. Määritä suurimman tällaisen suorakulmion kanta.

7. Suunnikkaassa ABCD on $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \bar{b}$. Sivulta CD valitaan piste E siten, että $CE:ED = 1:3$. AE ja BD leikkaavat toisensa pisteessä F. Esitä $\overrightarrow{AF}$ vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla.

8. a) Osoita: Pisteestä $(a,0)$ voidaan piirtää paraabelille $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ kolme normaalia, jos $a > p$, mutta vain yksi normaali, jos $a \leq p$.
b) Funktiot f ja g määritellään seuraavasti: f: $f(x) = 5x + 3$, g: $g(x) = 3x + k$, missä k on vakio. Määritä k siten, että $f \circ g$ ja $g \circ f$ ovat sama funktio.

9. Osoita, että funktio f: $f(x) = (1+x)^k - 1 - kx - \frac{k(k-1)}{2} x^2$ on kasvava funktio, kun $x > 0$ ja $k > 2$.

10. a) Määritä funktion f: $f(x) = 2 - |x^4 + 1{,}8 \cdot x + 1|$ suurin arvo.

b) Joukossa $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ määritelty reaaliarvoinen funktio f täyttää seuraavat ehdot:

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| < \frac{1}{|x|}$,

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Osoita: On olemassa luku M siten, että $|f(x)| < M$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^*$.