YLIOPPILASTUTKINTO 1.4.1977 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 4, 5, 6 ja 7 suoritetaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Määritä vakiot a ja b siten, että suora $2x - y - 2 = 0$ sivuaa paraabelia $y = ax^2 + bx + 2$ pisteessä (2,2).

2. Ratkaise epäyhtälö $x - \frac{1}{4x} > 0$.

3. Määritä $f(x)$, kun $f'(x) = -\frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2}$ ja $f(0) = \frac{3}{2}$.

4. a) Määritä $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^a \sqrt[n]{ax}\, dx$ $(a > 0)$.

b) Laske $\int_1^2 (x - 1) \ln x \, dx$.

5. a) Olkoon f kuvaus $A \to R$: $f(x) = \frac{\sin 2x}{\tan x}$, missä A on mahdollisimman laaja reaalilukujen joukon R osajoukko. Mikä on A ja sen kuva f(A) ?

b) Ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ympäri on piirretty kolmio ABC, jonka kaksi kärkeä ovat A = (1,3) ja B = (1,-2). Määritä kolmas kärki C ja kolmion ala.

6. a) Vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{a} - \bar{b}$ pituudet ovat: $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 6$ ja $|\bar{a} - \bar{b}| = 7$. Määritä $|\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}|$.

b) Kolmion ABC kulma A on 60°. Sen sivulta BC valitaan piste D siten, että tämän sivuista AB ja AC laskettujen etäisyyksien suhde on 1:2. Laske kulma BAD $0{,}1^\circ$:n tarkkuudella.

7. a) Miten sijaitsevat kompleksitasossa ne pisteet $z = x + iy$, jotka toteuttavat ehdon $|2z - \bar{z}| \leq 1$? Piirrä kuvio.

b) Kahta noppaa heitettäessä saadut pisteluvut olkoot x ja y. Määritä satunnaismuuttujan $|x - y|$ todennäköisyysjakautuma ja odotusarvo (keskiarvo).

8. Osoita, että xy-tason piste $x = \frac{1}{2 + \sin^2 t}$, $y = \frac{e^{-|t|}}{1 + e^{-|t|}}$ pysyy suorakulmiossa $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, kun t muuttuu reaalilukujen joukossa.

9. Piste (x_0, y_0) liikkuu tasossa siten, että siitä paraabelille $y = x^2$ piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Minkä käyrän piste (x_0, y_0) tällöin piirtää?

10. Määritä funktion f: $f(x) = \int_1^2 \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{x} \right| dt$ suurin ja pienin arvo välillä $1 \leq x \leq 2$.

17420—76/11