YLIOPPILASTUTKINTO 4.4.1975 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

1. Määritä se toisen asteen polynomi P, joka toteuttaa yhtälön $P(x) - P'(x) = x^2$.

2. Laske cos x (tarkka arvo), kun $\sin x = \frac{12}{13}$ ja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

3. Piirrä käyrät $y = |2x + 1|$ ja $y = |3x - 2|$ sekä laske niiden leikkauspisteiden koordinaatit.

4. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

   a) Suora $3x - 2y + 4 = 0$ leikkaa paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2$ pisteissä A ja B. Kuinka suuressa kulmassa jana AB näkyy origosta?

   b) Millä muuttujan t arvoilla paikkavektorin $\bar{r} = (2t-1)\bar{i} + (3t + \frac{1}{2})\bar{j}$ loppupiste on paraabelilla $y = \frac{1}{2}x^2$? Laske saatuja t:n arvoja vastaavien vektoreiden välinen kulma.

5. Ympyrän sisään piirretyn puolisuunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, ja sen yhdensuuntaiset sivut ovat a ja 2a. Laske ympyrän säde.

6. Olkoon $A = (-1,1)$ ja $B = (1,1)$. Määritä x-akselin piste P siten, että murtoviiva APB on mahdollisimman lyhyt.

7. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

   a) Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat koordinaattiakselit, käyrä $y = \frac{1}{x+1}$ ja suora $x = 2$. Määritä tämän alan likiarvo korvaamalla käyrä sillä paraabelilla $y = ax^2 + bx + c$, joka kulkee käyrän pisteiden $(0,1)$, $(1,\frac{1}{2})$ ja $(2,\frac{1}{3})$ kautta.

   b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $\frac{dy}{dx} + y^2 = (\frac{y}{x})^2$ sekä piirrä pisteen $(2,2)$ kautta kulkeva integraalikäyrä.

8. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

   a) Olkoon $k > 1$ ja $x \geqq 0$. Osoita, että $x^k - 1 \geqq k(x - 1)$.

   b) Erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x) = ax + b$ välillä $0 \leqq x \leqq 3$; muualla $f(x) = 0$. Määritä vakiot a ja b siten, että jakautuman keskiarvo (odotusarvo) on 1. Laske lisäksi todennäköisyys sille, että tämän satunnaismuuttujan arvo on vähintään 1.

9. Funktio f toteuttaa välillä $-1 < x < 1$ yhtälön $f(x) = 1 + 2x + x^2 f(x^2)$, ja lisäksi $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Määritä $f'(0)$ derivaatan määritelmän nojalla.

10. Olkoon z yhtälön $x^2 + x + 2 = 0$ juuri. Määritä rationaaliluvut a ja b siten, että $\frac{1}{z^2 - z + 1} = az + b$.