YLIOPPILASTUTKINTO 2.4.1973 MATEMATIIKKA, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta. - Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Määritä vakiot a ja b siten, että funktio $f(x) = a \sin x + b$ täyttää ehdot $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

2. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $\frac{a}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 0$ ei ole reaalijuuria?

3. Ratkaise epäyhtälö $\ln(2-x) + 1 < 0$.

4. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

   a) Tasakylkisen kolmion kannan suuntainen suora puolittaa sekä kolmion alan että sen piirin. Laske kolmion kyljen ja kannan suhde.

   b) Paikkavektorit $\bar{r}_1 = (a + \cos\phi)\bar{i} + \sin\phi\,\bar{j}$ ja $\bar{r}_2 = (a - \sin\phi)\bar{i} + \cos\phi\,\bar{j}$ ($0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ ja $|a| < 1$) ovat kolmion sivuina. Laske kolmannen sivun pituus.

5. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:

   a) Olkoot x ja y reaalilukuja. Merkinnällä xoy tarkoitetaan tässä tehtävässä lauseketta $2x+y+1$. Osoita: On olemassa reaaliluku a siten, että aoy = y kaikilla reaaliluvuilla y.

   b) Ympyränsektorin säde on 1 ja keskuskulma 60°. Määritä se keskuskulman puolittajasäteen piste, joka on kauimpana sektorin piiristä. Perustelu.

6. Olkoon (x_0, y_0) käyrän $y = e^x$ piste. Osoita, että pisteiden $(x_0+y_0, e^{x_0+y_0})$ ja $(x_0-y_0, e^{x_0-y_0})$ välimatka on yhtä suuri kuin näiden pisteiden ordinaattojen summa.

7. Käyrän $y = \frac{x+1}{x^2}$ ja suorien $y = 0$, $x = 1$ ja $x = a$ $(a > 1)$ rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Osoita, että syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on a:sta riippumattoman äärellisen rajan alapuolella.

8. Määritä funktion $e^{-x}\sin x$ $(x \geq 0)$ ääriarvot. Osoita, että funktion peräkkäiset maksimiarvot muodostavat geometrisen jonon (geometrisen sarjan).

9. Laske käyrien $x^2 + y^2 = 1$ ja $y = |x-a|$ $(|a| < 1)$ leikkauspisteiden yhdistysjanan pituus.

10. Jana a liikkuu siten, että sen toinen päätepiste on positiivisella y-akselilla ja toinen puolisuoralla $2y = x$ $(x \geq 0)$. Määritä janan keskipisteen ordinaatan suurin arvo.

11. Määritä differentiaaliyhtälön $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ yleinen ratkaisu. Osoita, että integraalikäyrillä on seuraava ominaisuus: Käyrän pisteeseen $P = (x_0, y_0)$, x_0 ja $y_0 \neq 0$, asetettu tangentti erottaa positiivisista koordinaattiakseleista janat, joiden summa pysyy muuttumattomana P:n liikkuessa samaa integraalikäyrää pitkin.

12. Erään jatkuvan satunnaismuuttujan tulosjoukko on $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ja jakautuman tiheysfunktio $f(x) = \frac{C}{\sqrt{4 - x^2}}$. Laske vakio C ja jakautuman keskiarvo (odotusarvo).