



Tehtävissä 2, 4, 6, 7 ja 9 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Millä arvoilla x funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ derivaatta saa arvon nolla?

2. a) Laske $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$.

b) Suunnistaja lähti 1350 m päässä olevalle rastille suuntaan, joka poikkesi 4° rastin suunnasta. Kuinka kaukana rastista suunnistaja oli juostuaan suoraan 1350 m?

3. Henkilö A saa palkkaa 47,30 mk/h ja henkilö B 38,4 % enemmän. Palkkoja korotetaan 1,05 mk/h, kuitenkin vähintään 1,8 %. Kuinka monta prosenttia enemmän saa B palkkaa kuin A palkankorotuksen jälkeen?

4. a) Luonnollisia lukuja a , b ja c sanotaan Pythagoraan luvuiksi, jos on olemassa suorakulmainen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a , b ja c . Määritä kaikki peräkkäiset luonnolliset luvut, jotka ovat Pythagoraan lukuja.

b) Kokeen kirjauksessa merkittiin erehdyksessä 16 prosentille oppilaista yhden numeron ja 6 prosentille oppilaista kahden numeron verran liian pieni arvosana. Kuinka paljon virheellisillä arvosanoilla laskettu keskiarvo poikkesi oikeasta?

5. Suoran maantietunnelin poikkileikkaus on paraabelin muotoinen. Tunnelin korkeus on 7,50 m ja leveys tienpinnan tasossa 8,10 m. Kuinka korkea, 260 cm leveä rekka-auto mahtuu ajamaan tunnelin läpi keskiviivan oikealla puolella pysyen?

6. a) Osoita, että funktio $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x\sqrt{2 + \sqrt{x}} - x\sqrt[4]{x}} \sqrt{x\sqrt{2 + \sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}}$$

on lineaarinen funktio, ja piirrä sen kuvaaja.

b) Todista oikeaksi kaava $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ ja määritä tämän kaavan avulla funktion f suurin ja pienin arvo.

7. a) Suoran ympyräkartion korkeus on 4 ja pohjan säde 3. Määritä sivujanan keskipisteestä pohjaympyrän pisteeseen pitkin kartion vaippapintaa mitatun etäisyyden suurin arvo. Opastus: Levitä kartion vaippapinta tasoon.

b) Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ on koko \mathbb{R} :ssä aidosti kasvava. Muodosta f :n käänteisfunktio.

KÄÄNNÄ!

8. Osoita, että $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$. Määritä jokin sellainen luku h , että

$$0 < \sqrt{x^2 + 1} - x < 10^{-3},$$

kun $x > h$.

9. a) Halkaisijaltaan 20 cm olevaan pyöreään maalitauluun heitetään umpimähkään tikkaa. Olkoon satunnaismuuttuja \underline{x} tauluun osuneen tikkan etäisyys reunasta. Määritä \underline{x} :n kertymäfunktio, tiheysfunktio, odotusarvo ja keskihajonta.
- b) Reaalilukujen joukossa \mathbb{R} määritellään yhteenlaskua muistuttava laskutoimitus $x \circ y$ seuraavasti: $x \circ y = x + y - 2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että laskutoimitus toteuttaa seuraavat ehdot: 1° $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$. 2° $x \circ y = y \circ x$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. 3° On olemassa sellainen luku $\omega \in \mathbb{R}$, että $x \circ \omega = \omega \circ x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Mikä ω on? 4° Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vasta-alkio x^* , jolle $x \circ x^* = x^* \circ x = \omega$.
10. Henkilön on päästävä suoran joen toisella puolella olevaan pisteeseen E, jonne on henkilöä lähinnä olevasta vastarannan kohdasta matkaa 5,2 km myötävirtaan. Henkilön veneen nopeus veteen nähden on 3,2 km/h, joen virtausnopeus 2,3 km/h ja henkilön kävelynopeus 5,9 km/h. Joen leveys on 600 m. Mikä on nopein reitti, kun joki ylitetään suoraviivaisesti, ja kuinka kauan matka pisteeseen E kestää?