

YLIOPIILASTUTKINTO 25.9.1991 MATEMATIIKKA, LAAJA OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 3, 5, 6, 7 ja 8 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö  $x^2 - 1 = 3(x + 1)$ .
2. Onko funktio  $f: f(x) = e^x \sin x$  funktion  $g: g(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$  integraalifunktio?
3. a) Määritä vakio  $A$  siten, että  $\int_0^1 (e^x + Ax) dx = 0$ .  
b) Kun tavaran hintaa alennettiin 20 %, sen markkamääräinen myynti kasvoi 2,0 %. Kuinka monella prosentilla kasvoi myyty tavaramäärä?
4. Ratkaise yhtälö  $\cos x = \sqrt{3} \sin x$ .
5. a) Laatikosta, jossa on kolme punaista, neljä sinistä ja viisi mustaa palloa, otetaan umpimähkään kaksi palloa. Mikä on todennäköisyys, että ne ovat samanväriset?  
b) Käyrän  $y^2 = (2 + x)(2 - x)(1 - x)$  muodostama umpinainen silmukka pyörähtää  $x$ -akselin ympäri. Laske muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuus.
6. a) Vektorit  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$  ja  $\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$  ovat kolmion kahtena sivuna. Määritä niiden yhteisestä alkupisteestä piirretyn korkeusjanan pituus.  
b) Henkilö antaa kolmelle ystävälleen yhden joululahjan kullekin, ja käyttää tähän yhteensä 1 000 markkaa. Mikään lahja ei saa maksaa enempää kuin kaksi kertaa kumpi tahansa muista lahjoista. Kuinka paljon kallein lahja voi enintään maksaa? Jos kaksi lahjaa on yhtä kallista, paljonko ne enintään maksavat?
7. a) Osoita, että käyrä  $y = x(1 + \ln x)$  ( $x > 0$ ) ei ole missään kohdassa suoran  $y = x - e^{-1}$  alapuolella.  
b) Tasapaksusta peltilevystä on valmistettava litran vetoinen, suoran ympyrälieriön muotoinen, kanneton ja mahdollisimman kevyt muki. Mitkä ovat sen mitat?
8. a) Osoita, että likimääräisessä kaavassa  $(1 + x)^6 \approx 1 + 6x$  virhe on pienempi kuin  $1,6 \cdot 10^{-3}$ , kun  $0 \leq x \leq 0,01$ .  
b) Osoita, että kaikilla parven  $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay = 5 - 10a$  ympyröillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Mikä tämä piste on? Piirrä ympyräparven kuva.

KÄÄNNÄ !

9. Henkilö  $A$ , joka maksaa tuloistaan veroa 60 %, hankkii vuoden alussa  $x$  markalla obligaatioita, joiden vuotuinen korko on 10 %. Korosta saa verottomana 2 000 mk, ja sen jälkeen korosta puolet on verotonta aina 18 000 markkaan saakka. Esitä korosta vuoden lopussa käteen jäävä osa  $y$   $x$ :n funktiona ja piirrä funktion kuvaaja. Mikä korko on sillä kokonaan verottomalla obligaatiolla, joka antaa 100 000 markan pääomalle saman nettotuoton, jonka  $A$  saa ostaessaan verollisia obligaatioita 100 000 markalla?
10. Osoita, että polynomi  $x^2 + px - \frac{1}{3} - \frac{p}{2}$  vaihtaa merkkinsä välillä  $]0, 1[$ , olipa  $p$  mikä tahansa reaaliluku.