

Tehtävissä 3, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälö $(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 19)^2$.
2. Laske $\int_0^{\pi/2} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x) dx$.
3. a) Määritä funktion $f: f(x) = xe^{-x}$ ensimmäisen ja toisen derivaatan nollakohdat.
b) Ratkaise yhtälö $x + \sqrt{x} - 2 = 0$.
4. Määritä lausekkeen $(3^x)^y - (\frac{1}{3})^x (\frac{1}{3})^y$ tarkka arvo, kun x ja y ovat yhtälön $x^2 + 2x - 1 = 0$ juuret.
5. Ratkaise epäyhtälö $a^2 + x^2 < 1 + a^2 x^2$, kun vakio a toteuttaa ehdon $1^\circ |a| < 1$, $2^\circ |a| > 1$, $3^\circ |a| = 1$.
6. Mitkä kompleksitason pisteet z toteuttavat yhtälön $iz + \bar{z} + 1 + i = 0$?
7. a) Suoran ympyräkartion pohjan säde on R ja korkeus $H = 3R$. Kartion sisään on asetettu ympyrälieriö, jonka akseli on kartion akselin osa. Määritä lieriön pohjan säde x siten, että lieriön vaipan ja pohjien alojen summa on mahdollisimman suuri.
b) Olkoot $f: A \rightarrow B$ ja $g: B \rightarrow A$ sellaisia kuvauksia, että $(g \circ f)(x) = x$ kaikilla A :n pisteillä x . Osoita, että f on injektio (so. $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$) ja g surjektio (so. $g(B) = A$).
8. a) A ja B heittävät noppaa. Jos pisteluvuksi tulee kuusi, maksaa A B :lle x^3 markkaa, kun taas muussa tapauksessa B maksaa A :lle x markkaa. Millä x :n arvoilla A :n voiton odotusarvo (keskiarvo) on positiivinen, ja milloin se on suurimmillaan?
b) Määritä käyttämättä likiarvoja funktion $f: f(x) = 8 \cos x + 15 \sin x - 17$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2\pi]$.
9. Suora l leikkaa käyrän $y = x^3 - \sqrt{3}x^2$ origossa sekä pisteissä A ja B . Pisteisiin A ja B piirretyt käyrän tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Mikä on l :n yhtälö?
10. a) Osoita, että yhtälöllä $e^{-x} + e^{x^2} - \sqrt{\frac{17}{5}} = 0$ on täsmälleen kaksi reaali-juurta.
b) Lukujono (x_n) määritellään seuraavasti: $x_0 = 0$, $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + 1$, $n = 1, 2, \dots$. Johda lauseke luvulle x_n ja määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.