YLIOPPILASTUTKINTO 22.3.1971 MATEMATIIKKA PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Käsiteltävä enintään kymmentä tehtävää. Tehtävät 11 ja 12 vaativat tietoja tavallisen koulukurssin ulkopuolelta.- Vain yksi tehtävä kullekin paperille.

1. Millä x:n arvoilla funktio $e^{-x} + x$ on kasvava?
2. Millä kertoimen m arvoilla suoralla $y = mx + 2$ ja käyrällä $y = x^3 - 3x + 2$ on vain yksi yhteinen piste?
3. Ympyrät, joiden säteet ovat 2, 3 ja 10, sivuavat toisiaan ulkopuolelta. Laske sen kolmion suurin kulma, jonka kärkinä ovat ympyröiden keskipisteet.
4. Tasakylkisen kolmion kanta on 2a ja korkeus a. Määrää korkeusjanalta piste, jonka etäisyyksillä kolmion kärjistä on suurin mahdollinen summa, ja laske tämä summa.
5. Laske umpinaisen käyrän $y^2 = x^2(1-x^2)$ $(x \geq 0)$ rajoittaman alueen pinta-ala.
6. Jompikumpi seuraavista tehtävistä:
   a) Suorakulmaisen suuntaissärmiön pinta-ala on $2a^2$ ja samasta kärjestä lähtevien särmien summa 2a. Laske särmiön lävistäjä.
   b) Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j}$ ovat suuntaissärmiön särminä. Osoita, että vektorin $\bar{a}$ alku- ja loppupisteestä piirretyt särmiön lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
7. Määrää se piste, jossa ellipsin $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ pisteeseen (x_0,y_0) $(y_0 > 0)$ piirretty normaali leikkaa x-akselin. Mitä pistettä tämä piste lähestyy, kun (x_0,y_0) lähestyy pistettä $(a,0)$?
8. Funktio f on määritelty kaikilla reaaliarvoilla, ja yhtälö $f(a+b) = f(a)f(b)$ toteutuu kaikilla arvopareilla a,b. Lisäksi on $f(1) = 3$. Määrää $f(4)$.
9. Osoita, että käyrä $x^4 + y^2 = 1$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 3/2$ sisällä.
10. Luku a on yhtälön $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ juuri. Osoita, että myös a^2 on sen juuri.
11. Osoita, ettei käyrän $x = e^{2t}\cos t$, $y = e^{2t}\sin t$ mikään normaali kulje origon kautta.
12. Yhtälön $x^2 + px + q = 0$ kertoimiksi p ja q valitaan umpimähkään ja toisistaan riippumatta reaaliluvut väleiltä $|p| \leq 2$, $|q| \leq 2$. Mikä on todennäköisyys sille, että yhtälön juuret ovat reaaliset?